



Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:

banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS II ÜBUNGSAUFGABEN 6

DEADLINE: Fr. 29. 5. 2015, 16:00. Abgabe in Paaren.

1. Sei $F(x, y, z) = x^4 + 2x \cos y + \sin z$. Zeigen Sie, dass für hinreichend kleine x, y, z die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ nach z aufgelöst werden kann und berechnen Sie für die Lösungsfunktion $z(x, y)$ die partiellen Ableitungen $\partial z / \partial x$ und $\partial z / \partial y$.

2. Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2xy + u^2 + v^2 &= 0 \\ x^3 - y^3 + u^3 + v^3 &= 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, -1)$ die Variablen x, y implizit als Funktionen $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ von u, v definiert. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von $x(u, v)$ und $y(u, v)$.

3. Sei A eine reelle $n \times n$ -Matrix und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A . Wir sagen λ ist ein *einfacher* Eigenwert, wenn $\dim \ker(A - \lambda I) = 1$ und $\ker(A - \lambda I) = \ker(A - \lambda I)^2$ ist. Sei $A(t) = (a_{ij}(t))$ eine Familie von linearen Abbildungen $A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit allen a_{ij} stetig differenzierbar und definiert auf einer offenen Umgebung von $t = 0$ in \mathbb{R} . Beweisen Sie: Ist $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ein einfacher Eigenwert von $A(0)$, dann existiert eine Umgebung U von $t = 0$ in \mathbb{R} , sodass $A(t)$ für jedes $t \in U$ einen reellen Eigenwert besitzt.

Hinweis: Sei x_0 ein normierter Eigenvektor von $A(0)$ zu λ_0 . Wenden Sie den Satz über implizite Funktionen auf die Abbildung $F(x, \lambda, t) = (A(t)x - \lambda x, \langle x, x_0 \rangle - 1)$, definiert auf einer Umgebung von $(x_0, \lambda_0, 0)$ in \mathbb{R}^{n+2} , an.

4. Zeigen Sie:

- (a) Sei V ein Banachraum, $A \subset V$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\phi : A \rightarrow A$ eine Abbildung. Ist eine der iterierten Abbildungen $\phi^n : A \rightarrow A$ eine Kontraktion, dann hat ϕ einen eindeutigen Fixpunkt. Dieser kann durch Iteration von ϕ , ausgehend von einem beliebigen Startpunkt, gefunden werden.
- (b) Die Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) = e^{-x}$, ist keine Kontraktion auf \mathbb{R} , aber $\phi \circ \phi$ ist eine Kontraktion auf \mathbb{R} .

- (c) Approximieren Sie die Lösung der Gleichung $e^{-x} = x$, wobei der Approximationsfehler < 0.01 sein soll.

Hinweis: Der Fehler kann abgeschätzt werden durch

$$\|x_n - \xi\| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \|x_0 - \phi(\phi(x_0))\|,$$

wobei x_0 der Startwert, x_n der Wert der n -ten Iteration von $\phi \circ \phi$, ξ der Fixpunkt und $\lambda < 1$ die Kontraktionskonstante ist.