



Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:
banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS II ÜBUNGSAUFGABEN 5

DEADLINE: Fr. 22. 5. 2015, 16:00. Abgabe in Paaren.

1. Berechnen Sie die Richtungsableitungen der folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen in die angegebenen Richtungen v . (Bem.: Ist $\|v\| \neq 1$, muss v erst normiert werden!)

(a)

$$f(x, y) = \sin(xy), \quad (x, y) = (1, 0), \quad v = (1/2, \sqrt{3}/2).$$

(b)

$$f(x, y, z) = x^2 + ze^y, \quad (x, y, z) = (0, 0, 1), \quad v = (1, 0, 1).$$

2. Die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei in $x \in U$ differenzierbar. Zeigen Sie: Der Gradient gibt die Richtung des stärksten Anstiegs von f an, und seine Norm ist gerade dieser stärkste Anstieg. Genauer ist also folgendes zu zeigen: Ist $\nabla f(x) = 0$, so verschwinden alle Richtungsableitungen in x . Ist aber $\nabla f(x) \neq 0$, dann gibt es unter allen Richtungsableitungen $(\partial_v f)(x)$, $\|v\| = 1$, eine größte, nämlich die Ableitung in Richtung $v = \nabla f(x) / \|\nabla f(x)\|$ des Gradienten. Ihr Wert ist $\|\nabla f(x)\|$.
3. Bestimmen Sie die quadratische Taylor-Approximation der Funktion

$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x - y}{x + y},$$

im Mittelpunkt $(x, y) = (1, 1)$.

4. Bestimmen Sie Lage, Art und Größe aller lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

(a) $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(x) \sin(y) \sin(x+y)$, $U = \{(x, y) \mid 0 < x, y, x+y < \pi\}$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.