



Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:
banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS II ÜBUNGSAUFGABEN 3

DEADLINE: Fr. 8. 5. 2015, 16:00. Abgabe in Paaren.

1. Seien X, Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Bijektion. Ist X kompakt und Y Hausdorffsch, dann ist f ein Homöomorphismus.
2. Zeigen Sie, dass jeder kompakte metrische Raum vollständig ist.
3. (a) Seien r, h positive reelle Zahlen. Die Kurve $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(t) = (r \cos t, r \sin t, ht),$$

beschreibt den Weg, den ein Massepunkt auf der Peripherie einer kreiszylindrischen Schraube mit Radius r und Ganghöhe $2\pi h$ beim Drehen der Schraube zurücklegt, wobei der Punkt sich zu Beginn der Bewegung auf der x_1 -Achse befindet; die Schraube wird einmal vollständig gedreht. Der Tangentialvektor $f'(t)$ besitzt die physikalische Interpretation als Geschwindigkeitsvektor im Zeitpunkt t , seine Norm (Länge) ist die Geschwindigkeit. Bestimmen Sie Geschwindigkeitsvektor und Geschwindigkeit des Massepunktes.

- (b) Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *Doppelpunkt* einer Kurve $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall), wenn es $t, t' \in I$, $t \neq t'$, gibt mit $f(t) = x = f(t')$. Bestimmen Sie die Doppelpunkte der Kurve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$. Bestimmen Sie alle Tangentialvektoren in diesen Doppelpunkten.

4. (a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen (erster Ordnung) der Funktionen

$$f(x, y, z) = xyz \sin(x + y + z), \quad g(x, y, z) = \frac{xe^{2y}}{z} \quad (z \neq 0).$$

- (b) Für ein ideales Gas mit Druck P , Volumen V und absoluter Temperatur T gilt die Zustandsgleichung $PV = cT$ (c eine Konstante). Zeigen Sie, dass für ein solches Gas die Beziehung

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

besteht. (Bem.: der Wert ist also nicht 1, auf den man durch "Kürzen" kommen würde!)