Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Mathematisches Institut

Prof. Dr. Markus Banagl

D–69120 Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288
Telefon: (06221) 54–5763
Telefax: (06221) 54–8312
email:
banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS II
ÜBUNGSAUFGABEN 2

DEADLINE: Mo. 4. 5. 2015, 13:00. Abgabe in Paaren.

1. Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.
   (a) Zeigen Sie: f ist stetig genau dann, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.
   (b) Zeigen Sie: f ist stetig genau dann, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X ist.
2. (a) Beweisen Sie, dass jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig ist.
   (b) In Aufgabe 2 des 1. Übungsblattes haben wir den Raum $C[a, b]$ aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zusammen mit der Supremumsnorm $||f||_\infty$ betrachtet. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $A : C[a, b] \to \mathbb{R}$,
   $$A(f) := \int_a^b f(x)dx,$$
   stetig ist.
3. Geben Sie eine offene Überdeckung des Intervalls $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ an, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.
4. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Zeigen Sie: Es gibt eine reelle Zahl $\delta > 0$, sodass für jede Teilmenge $Y \subset X$ mit $\operatorname{diam}(Y) < \delta$ ein i mit $Y \subset U_i$ existiert.