Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Mathematisches Institut

Prof. Dr. Markus Banagl

D–69120 Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288
Telefon: (06221) 54–5763
Telefax: (06221) 54–8312
email: banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS II
ÜBUNGSAUFGABEN 12

DEADLINE: Fr. 10. 7. 2015, 16:00. Abgabe in Paaren.

1. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ das Paraboloid $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$. Berechnen Sie den Flächeninhalt von M.

2. Eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $\varphi(t_1, t_2) = (t_1 \cos t_2, t_1 \sin t_2, t_2)$, $t_1 \in [0, 1]$, $t_2 \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie das Flächenintegral
$$\int_M \langle V, n \rangle dS$$
für das Vektorfeld $V(x, y, z) = (y, -x, 0)$, wobei n der Einheitsnormalenvektor $n = N/||N||$ auf M ist, $N = \partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi$.

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $B \subset U$ ein kompakter Bereich, auf den Green's Formel anwendbar ist. Es bezeichne n den nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor auf ∂B. Zeigen Sie: Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion, deren Richtungsableitung $\partial_n f$ in Richtung n nichtnegativ auf ∂B und nicht identisch 0 auf ∂B ist, dann kann f auf B nicht harmonisch sein.
Hinweis: Zur Erinnerung: f heißt *harmonisch* auf B, wenn $\Delta f = 0$ auf B gilt, wobei $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ der Laplaceoperator auf der Ebene ist. Zeigen Sie
$$\int_{\partial B} \partial_n f ds = \iint_B \Delta f$$
mit Hilfe des Satzes von Green.

4. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $r > 0$, und $rM \subset \mathbb{R}^n$ das Bild von M unter der Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto rx$. Zeigen Sie: Dann ist rM wieder eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und für jede stetige Funktion $f : rM \to \mathbb{R}$ gilt
$$\int_{rM} f(x) dS(x) = \int_M f(ry) r^k dS(y).$$