Übungsaufgaben 11

1.) Wir schreiben K als Normalbereich bzgl. der x-Achse:

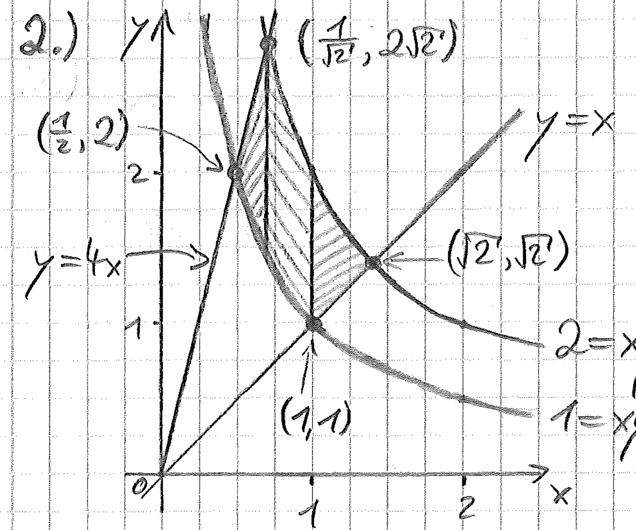
$$K = \{(x,y) \mid x \in [0,1],\ y \in [0,x]\}$$

$$\int_K e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 x e^{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_{x=0}^{1} = \frac{e-1}{2}$$

2.)



Wir teilen K in drei Normalbereiche bzgl. der x-Achse:

$$K_1 = \{(x,y) \mid x \in [\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}],\ y \in [\tfrac{1}{x}, 4x]\}$$

$$K_2 = \{(x,y) \mid x \in [\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1],\ y \in [\tfrac{1}{x}, \tfrac{2}{x}]\}$$

$$K_3 = \{(x,y) \mid x \in [1, \sqrt{2}],\ y \in [x, \tfrac{2}{x}]\}$$

$$\Rightarrow \int_K xy\,dx\,dy = \int_{K_1} xy\,dx\,dy + \int_{K_2} xy\,dx\,dy + \int_{K_3} xy\,dx\,dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{\frac{1}{x}}^{4x} xy\,dy\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} xy\,dy\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{x}^{\frac{2}{x}} xy\,dy\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(8x^3 - \frac{1}{2x}\right)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x}\right)dx + \int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2}x^3\right)dx$$

$$= \ldots = \frac{3}{2}\log(2)$$

Alternativ: Transformiere K mit

$$T: B \longrightarrow K \quad , \quad (u,v) \longmapsto \left(\tfrac{u}{v}, v\right) \quad ,$$

wobei $B := \{(u,v) \mid u \in [1,2],\ v \in [\sqrt{u}, 2\sqrt{u}]\}$.

4.) z.z.: $\operatorname{supp} f$ kompakt, $f \in C^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy = 0$, $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\,dx = 1$

Bew.: Setze $g_{ij}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \phi_i(x)\cdot\phi_j(y)$.

① Dann gilt: $\operatorname{supp}(g_{ij}) \subset \operatorname{supp}(\phi_i) \times \operatorname{supp}(\phi_j) \subset (2^{-i}, 2^{1-i}) \times (2^{-j}, 2^{1-j})$. $(*)$

Für ein $k \in \mathbb{N}$ folgt: $\operatorname{supp}(g_{ij}) \subset [0, 2^{1-k}]^2 \quad \forall i,j \geq k$

Wg $f(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} (g_{ii}(x,y) - g_{i+1,i}(x,y))$

folgt $f(x,y) = \sum_{i=1}^{k} (g_{ii}(x,y) - g_{i+1,i}(x,y)) \quad \forall (x,y) \notin [0, 2^{1-k}]$

Das heißt: Auf $\mathbb{R}^2 \setminus [0, 2^{1-k}]$ ist f lokal endlich.

Da $k \in \mathbb{N}$ beliebig war, gilt sogar f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ lokal endlich.

① Wg $f = \sum_{i=1}^{\infty} (g_{ii} - g_{i+1,i})$ gilt:

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (\operatorname{supp} g_{ii} \cup \operatorname{supp} g_{i+1,i}) \overset{(*)}{\subset} [0,1]^2$$

Somit ist $\operatorname{supp} f$ beschränkt. Da $\operatorname{supp} f$ nach Def. abgeschlossen ist, folgt die Kompaktheit von $\operatorname{supp} f$.

② Wie oben gezeigt, ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ lokal endl. und somit dort stetig.

③ Fall 1: $y \neq 0$: Da f lokal endlich außerhalb von $(0,0)$ ist,

gilt: $$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \phi_i(x)\,dx}_{=1} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \phi_{i+1}(x)\,dx}_{=1} \Big)\, \phi_i(y) = 0$$

Fall 2: $y = 0$: Wg $0 \notin (2^{-i}, 2^{1-i})\ \forall i \in \mathbb{N}$ folgt direkt aus $\operatorname{supp} \phi_i \subset (2^{-i}, 2^{1-i})$: $f(\cdot, 0) = 0$, also $\int_{\mathbb{R}} f(x,0)\,dx = 0$

Insgesamt: $$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} 0\,dy = 0$$

④ f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ lokal endlich, also insbesondere pktweise endlich. Also dürfen wir die Reihe umordnen:

$$f(x,y) = \phi_1(x)\phi_1(y) + \underbrace{\sum_{i=2}^{\infty} \phi_i(x)\big(\phi_i(y) - \phi_{i-1}(y)\big)}_{=: g(x,y)}$$

$$\int\int f(x,y)\,dy\,dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \phi_1(x)\,dx}_{=1} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \phi_1(y)\,dy}_{=1} + \underbrace{\int\int g(x,y)\,dy\,dx}_{=0 \text{ analog zu ③}} = 1 \qquad \square$$