



Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:

banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS II ÜBUNGSAUFGABEN 11

DEADLINE: Fr. 3. 7. 2015, 16:00. Abgabe in Paaren.

1. Berechnen Sie das Integral

$$\int_K e^{x^2} dx dy,$$

wobei $K \subset \mathbb{R}^2$ jenes Dreieck im 1. Quadranten ist, das durch die Geraden $y = 0$, $x = 1$, $y = x$, begrenzt wird.

2. Berechnen Sie das Integral

$$\int_K xy dx dy,$$

wobei $K \subset \mathbb{R}^2$ jener kompakte Bereich im 1. Quadranten ist, der durch die Kurven $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ begrenzt wird.

3. Berechnen Sie

$$\int_K z^2 dx dy dz,$$

wobei $K \subset \mathbb{R}^3$ die kompakte Kugel $K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ist, indem Sie *sphärische Polarkoordinaten* verwenden:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

4. Für $i = 1, 2, \dots$ sei $\phi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\text{supp}(\phi_i) \subset (2^{-i}, 2^{1-i})$ und $\int_{\mathbb{R}} \phi_i = 1$. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$f(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_i(x) - \phi_{i+1}(x)) \phi_i(y).$$

Zeigen Sie: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ hat kompakten Träger, ist stetig auf $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, und

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = 0, \quad \text{aber} \quad \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = 1.$$