Übungsaufgaben 10

1.) Seien ω, η 1-Formen auf $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Wir schreiben: $\omega = \sum_{i=1}^n \lambda_i dx_i$, $\eta = \sum_{i=1}^n \mu_i dx_i$.

• <u>Beh.:</u> ω, η geschlossen $\Longrightarrow$ $\omega + \eta$ geschlossen

<u>Bew.:</u> $\omega + \eta = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) dx_i$

$$\begin{aligned} \partial_j(\lambda_i + \mu_i) &= \partial_j \lambda_i + \partial_j \mu_i \\ &= \partial_i \lambda_j + \partial_i \mu_j \quad \text{, da } \omega, \eta \text{ geschlossen.} \\ &= \partial_i (\lambda_j + \mu_j) \qquad \square \end{aligned}$$

• <u>Beh.:</u> ω, η exakt $\Longrightarrow$ $\omega + \eta$ exakt

<u>Bew.:</u> ω, η exakt $\Longrightarrow \exists\, g, h \in C^1(\mathbb{R}^n): \omega = dg,\ \eta = dh$

$\Longrightarrow \omega + \eta = dg + dh = d(g+h)$ $\square$

• <u>Beh.:</u> i. A. gilt <u>nicht</u>: ω geschlossen $\Longrightarrow$ $f\omega$ geschlossen

<u>Bew.:</u> Betrachte z.B.: $\omega = dx_2$ und $f(x) = x_1$

Dann gilt: $\partial_j \lambda_i = 0 \quad \forall i,j$, also ω geschlossen.

Aber: $\partial_1 (f(x) \underbrace{\lambda_2(x)}_{=1}) = \partial_1 x_1 = 1 \neq 0 = \partial_2 (f(x) \underbrace{\lambda_1(x)}_{=0})$

Somit ist $f\omega = x_1 dx_2$ nicht geschlossen. $\square$

• <u>Beh.:</u> i. A. gilt <u>nicht</u>: ω exakt $\Longrightarrow$ $f\omega$ exakt

<u>Bew.:</u> Wie zuvor: $\omega = dx_2$ und $f(x) = x_2$

ω ist exakt, da $\omega = dg$ mit $g(x) = x_2$.

Aber wie wir schon wissen, ist $f\omega$ nicht geschlossen und somit nicht exakt. $\square$

2.) Z: V einf. zshg.

<u>Bew.:</u> ① <u>V wegzshg.</u>:

Seien $p, q \in V$. Da f surjektiv ist,

$\exists\, a, b \in \mathcal{U}: f(a) = p,\ f(b) = q.$

Da $\mathcal{U}$ wegzshg. ist,

$\exists\, \gamma: I \longrightarrow \mathcal{U}$ stetig : $\gamma(0) = a,\ \gamma(1) = b.$

Da f stetig ist, ist $\gamma' := f \circ \gamma : I \longrightarrow V$ eine Kurve in V mit $\gamma'(0) = f(a) = p$ und $\gamma'(1) = f(b) = q$. #

② Jede Schleife in V ist nullhomotop:

Sei γ eine geschlossene Kurve in V. $\gamma(0) = p = \gamma(1)$

Da f^{-1} stetig ist, ist $\gamma' := f^{-1} \circ \gamma$ eine geschl. Kurve in $\mathcal{U}$.

Da $\mathcal{U}$ einf. zshg. ist, gibt es eine Homotopie

$$H : I \times I \xrightarrow{\text{stetig}} \mathcal{U} \quad \text{mit} \quad H(0,\cdot) = \gamma', \quad H(1,\cdot) = q := f^{-1}(p)$$

sowie $H(\cdot, 0) = q = H(\cdot, 1)$.

Da f stetig ist, ist $H' := f \circ H$ eine Homotopie mit

$$H'(0,\cdot) = f \circ \gamma' = \gamma \quad , \quad H'(1,\cdot) = f(q) = p$$
$$H'(\cdot, 0) = f(q) = p \quad , \quad H'(\cdot, 1) = f(q) = p$$

Also ist γ nullhomotop. $\square$

3.) ① $f(x,y) := xy - \frac{1}{2}y^2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$\partial_x f = y$, $\partial_y f = x - y$

Also ist f ein Potential zum VF $(y, x-y)$ auf $\mathbb{R}^2$.

② $\operatorname{rot}(y, y-x) = \partial_y(y) - \partial_x(y-x) = 2 \neq 0$

Also besitzt das VF $(y, y-x)$ kein Potential auf $\mathbb{R}^2$.

4.)

$f(x,y,z) := \frac{1}{2}\log(x^2+y^2+z^2) = \log(r)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$

$$\partial_x f(x,y,z) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

$\partial_y f$, $\partial_z f$ analog.

$$\Longrightarrow \quad df = \partial_x f\, dx + \partial_y f\, dy + \partial_z f\, dz$$
$$= \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r^2}$$
$$= \omega$$

Also ist ω exakt.