Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D–69120 Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288
Telefon: (06221) 54–5763
Telefax: (06221) 54–8312
email:
banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS II
ÜBUNGSAUFGABEN 1

DEADLINE: Fr. 24. 4. 2015, 16:00. Abgabe in Paaren.

1. (a) Zeigen Sie: In einem metrischen Raum ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig durch die Folge bestimmt.

   (b) Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung von* x, wenn es eine offene Menge $V \subset X$ gibt mit $x \in V \subset U$. Sei $(x_n) \subset X$ eine Folge von Punkten. Wir sagen (x_n) *konvergiert* gegen $x \in X$, wenn zu jeder Umgebung $U \subset X$ von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass der Grenzwert in topologischen Räumen nicht eindeutig sein muss. Wie verhält sich das, wenn man das Hausdorffaxiom annimmt?

2. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Beweisen Sie, dass der Vektorraum

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\},$$

   ausgestattet mit der Supremumsnorm $||f||_\infty$, vollständig ist.

3. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie: Y mit der induzierten Metrik d_Y ist genau dann vollständig, wenn Y abgeschlossen in X ist.

4. Sei $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ die Menge aller Polynome in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit komplexen Koeffizienten. Ist $S = \{f_1, \ldots, f_r\} \subset R$ irgendeine endliche Teilmenge, dann setzen wir

$$\langle S \rangle = \{a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r : a_i \in R\}.$$

   Definiere eine Teilmenge $V(\langle S \rangle) \subset \mathbb{C}^n$ durch

$$V(\langle S \rangle) = \{p \in \mathbb{C}^n : f(p) = 0 \text{ für alle } f \in \langle S \rangle\}.$$

   Sei $\mathcal{T}$ die Kollektion

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{C}^n - V : V = V(\langle S \rangle) \text{ für ein } S \text{ wie oben}\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{C}^n$ ist. *Hinweis:* Sie dürfen die algebraische Tatsache verwenden, dass für eine gegebene Familie $\{S_\alpha\}$, die Menge

$$\{g_1 + \ldots + g_k : g_i \in \langle S_{\alpha_i} \rangle \text{ für ein } \alpha_i\}$$

gleich $\langle S \rangle$ für eine endliche Teilmenge $S \subset R$ ist.

(b) Beschreiben Sie alle abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{C}^1, \mathcal{T})$.