Übungsaufgaben 2

1.) a) z.z.: f stetig $\iff$ f stetig in x $\forall x \in X$

Bew.: „$\Rightarrow$" Sei $x \in X$ und $\mathcal{U}$ eine Umgebung von $f(x)$.

Dann $\exists V \underset{\text{offen}}{\subset} Y : f(x) \in V \subset \mathcal{U}$

$$\Rightarrow \quad x \in \underbrace{f^{-1}(V)}_{\overset{\cap}{X} \text{ offen, da } f \text{ stetig}} \subset f^{-1}(\mathcal{U})$$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(\mathcal{U})$ ist Umgebung von x.

„$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{U} \subset Y$ offen.

Sei $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$, also $f(x) \in \mathcal{U}$.

Da $\mathcal{U} \subset Y$ offen ist, ist $\mathcal{U}$ Umgebung von $f(x)$.

$\overset{f \text{ stetig in } x}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(\mathcal{U})$ ist Umgebung von x.

$\Rightarrow$ $\exists V_x \subset X$ offen : $x \in V_x \subset f^{-1}(\mathcal{U})$.

Nun gilt:

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{x \in f^{-1}(\mathcal{U})} \{x\} \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(\mathcal{U})} V_x \subset f^{-1}(\mathcal{U})$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{x \in f^{-1}(\mathcal{U})} V_x \subset X \text{ offen}$$

als Vereinigung offener Mengen. $\square$

b) z.z.: f stetig $\iff$ ($A \subset Y$ abgeschl. $\Rightarrow$ $f^{-1}(A) \subset X$ abgeschl.)

Bew.: „$\Rightarrow$" Sei $A \subset Y$ abgeschl.

$\Rightarrow$ $Y \setminus A$ offen

$$\overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \quad X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A) \underset{\text{offen}}{\subset} X$$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(A)$ abgeschl.

„$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{U} \subset Y$ offen.

$\Rightarrow$ $Y \setminus \mathcal{U} \subset Y$ abgeschl.

$$\overset{\text{Voraussetzung}}{\Longrightarrow} \quad X \setminus f^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(Y \setminus \mathcal{U}) \underset{\text{abgeschlossen}}{\subset} X$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(\mathcal{U}) \underset{\text{offen}}{\subset} X$$

$\square$

2.) a) Z: Jede lineare Abb. $A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig.

<u>Bew.:</u> Sei (a_{ij}) die Darstellungsmatrix von A bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$.

Seien
$$pr_i^n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$pr_j^m : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x = \sum_{k=1}^m x_k e_k \longmapsto x_j$$
die Projektionen auf die i-te bzw. j-te Komponente.

Nun gilt: $$(pr_j^m \circ A)(x) = \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot pr_i^n(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, m$

Da pr_i^n stetig ist und Summen als auch Produkte stetiger Abb. stetig sind, ist $pr_j^m \circ A$ stetig für alle $j = 1, \dots, m$.

$\Longrightarrow$ A stetig $\square$

b) Z: $A: C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \int_a^b f(x)dx$ ist stetig.

<u>Bew.:</u> Sei $(f_n) \subset C[a,b]$ mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.

Dann gilt: $$A(f_n) = \int_a^b f_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)dx = A(f)$$

nach Ana 1.
da $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

$\Longrightarrow$ A stetig $\square$

3.) Betrachte für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathcal{U}_n := B_{2^{-(n+1)}}(2^{-n}) \cap (0,1) = \underbrace{(2^{-(n+1)}, 3 \cdot 2^{-(n+1)}) \cap (0,1)} \underset{\text{offen}}{\subseteq} (0,1)$$

Das Schneiden mit $(0,1)$ ist nur für $n = 0$ wichtig.

<u>Beh.:</u> $(0,1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{U}_n$ und $\nexists$ endl. Teilüberdeckung.

<u>Bew.:</u> ① Sei $x \in (0,1)$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}_0$, sodass $2^{-(n+1)} < x \leq 2^{-n}$.

$\Rightarrow \quad x \in (2^{-(n+1)}, 2^{-n}] \cap (0,1) \subset \mathcal{U}_n$

$\Rightarrow \quad x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{U}_n$

② Sei $I \subset \mathbb{N}_0$ eine endl. Teilmenge.

Dann gibt es ein größtes El. n in I.

Wähle $x \in (0, 2^{-(n+1)})$. Dann gilt:

$$x \notin \mathcal{U}_m \quad \text{für alle } m \leq n$$

$$\Rightarrow \quad x \notin \bigcup_{m \in I} \mathcal{U}_m .$$

Da $I \underset{\text{endl.}}{\subset} \mathbb{N}_0$ beliebig war, besitzt die Überdeckung $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ keine endl. Teilüberdeckung. $\square$

4.) <u>Lemma von Lebesgue:</u> Sei (X,d) komp. metr. Raum und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X.

Dann: $\exists\, \delta>0 \;\forall\, Y\subset X$ mit $\operatorname{diam}(Y)<\delta$

$$\exists\, i\in I:\; Y\subset U_i$$

<u>Bew.:</u> Sei $x\in X$. Da $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von X ist, gibt es $i\in I$, sodass $x\in U_i$ gilt. Da $U_i\subset X$ offen ist, gibt es $\varepsilon_x>0$, sodass $B_{2\varepsilon_x}(x)\subset U_i$ gilt.

Betrachte die offene Überdeckung $(B_{\varepsilon_x}(x))_{x\in X}$ von X. Da X kompakt ist, gibt es $S\subset X$ endl., sodass gilt:

$$X=\bigcup_{x\in S} B_{\varepsilon_x}(x). \qquad (*)$$

Sei $\delta := \min_{x\in S} \varepsilon_x > 0$. (beachte: S endl.)

Dann ist δ die gesuchte Lebesgue-Zahl, denn: Sei $Y\subset X$ mit $\operatorname{diam}(Y)<\delta$. Sei $y\in Y$. Dann gibt es wg $(*)$ ein $x\in S$, sodass gilt:

$$y\in B_{\varepsilon_x}(x), \text{ also } d(x,y)<\varepsilon_x$$

Sei nun $z\in Y$. Dann gilt wg. $\operatorname{diam}(Y)<\delta$:

$$d(y,z)<\delta\le\varepsilon_x$$

Mit der Δ-Ungleichung folgt nun:

$$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)<2\varepsilon_x$$

$$\Longrightarrow \quad z\in B_{2\varepsilon_x}(x)$$

Da $z\in Y$ beliebig gewählt war, folgt:

$$Y\subset B_{2\varepsilon_x}(x)\subset U_i \text{ für ein } i\in I$$

nach Wahl von x und ε_x.

$\square$