# Übungsaufgaben 6

1.) $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$

$\wedge\ F(0,0,0) = 0$

$\wedge\ \frac{\partial F}{\partial z} = \cos z \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = 1 \neq 0$

also invertierbar

$\xRightarrow[\text{imp. Fkt.}]{\text{Satz über}}$ $\exists\, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, V \subset \mathbb{R}$ offene Umg. von $(0,0)$ bzw. $0$

$\exists!\ z : \mathcal{U} \longrightarrow V$ stetig diffbar

sodass $z(0,0) = 0$

und $F(x,y,z(x,y)) = 0 \quad \forall\, (x,y) \in \mathcal{U}$

Somit ist $0 = x^4 + 2x\cos y + \sin z$

lokal um $(0,0,0)$ nach $z$ auflösbar.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y) = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1}(x,y,z(x,y)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y)) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-4x^3 - 2\cos y}{\cos z(x,y)} \\ \frac{2x\sin y}{\cos z(x,y)} \end{pmatrix} \qquad \forall (x,y) \in \mathcal{U}$$

2.) $$F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} -2xy + u^2 + v^2 \\ x^3 + y^3 + u^3 + v^3 \end{pmatrix}$$

- $F \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$
- $F(1,1,1,-1) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ 3x^2 & -3y^2 \end{pmatrix}$

$$\det \frac{\partial F}{\partial(x,y)} = 6x^3 + 6y^3$$

$$\Longrightarrow \det \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(1,1,1,-1) = 12 \neq 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(1,1,1,-1) \text{ invertierbar}$$

Nach dem Satz über imp. Fkt. gilt nun:

$\exists\, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, $V \subset \mathbb{R}^2$ offene Umg. von $(1,-1)$ bzw. $(1,1)$

$\exists!\, g : \mathcal{U} \longrightarrow V$ stetig diffbar

sodass $g(1,-1) = (1,1)$

und $F(g(u,v), u, v) = 0 \quad \forall (u,v) \in \mathcal{U}$

Wir schreiben auch

$$g(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}.$$

$$Dg(u,v) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(g(u,v),u,v)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial(u,v)}(g(u,v),u,v)$$

$$= \frac{-1}{\det \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(g(u,v),u,v)} \begin{pmatrix} -3y^2(u,v) & 2x(u,v) \\ -3x^2(u,v) & -2y(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 3u^2 & 3v^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^3(u,v)+y^3(u,v)} \begin{pmatrix} u \cdot y^2(u,v) - u^2 x(u,v) & v \cdot y^2(u,v) - v^2 x(u,v) \\ u\, x^2(u,v) - u^2 y(u,v) & v\, x^2(u,v) + v^2 y(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\forall (u,v) \in \mathcal{U}$$

3.) Z: $\exists\, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ Umg. von $0$: $A(t)$ besitzt reellen EW für alle $t \in \mathcal{U}$.

Bew.: Sei $x_0$ ein norm. EV zum einfachen EW $\lambda_0$ von $A(0)$.

Betrachte
$$F(x,\lambda,t) = \begin{pmatrix} A(t)x - \lambda x \\ \langle x, x_0 \rangle - 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: ① $F \in C^1(\mathbb{R}^{n+2}, \mathbb{R}^{n+1})$

② $F(x_0, \lambda_0, 0) = 0$, da $A(0)x_0 = \lambda_0 x_0$ und $\|x_0\| = 1$.

③
$$\frac{\partial F}{\partial(x,\lambda)}(x,\lambda,t) = \begin{pmatrix} A(t) - \lambda \mathbb{1}_n & -x \\ x_0^t & 0 \end{pmatrix}$$

$$B := \frac{\partial F}{\partial(x,\lambda)}(x_0, \lambda_0, 0) = \begin{pmatrix} A(0) - \lambda_0 \mathbb{1}_n & -x_0 \\ x_0^t & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $v \in \ker B$.

Schreibe $v = \begin{pmatrix} w \\ \mu \end{pmatrix}$, wobei $w \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$Bv = 0$$

$$\Longrightarrow \quad Cw - \mu x_0 = 0 \quad \wedge \quad x_0^t w = 0 \qquad (*)$$

wobei $C := A(0) - \lambda_0 \mathbb{1}_n$

$$\overset{x_0 \text{ EV von } A(0)}{\underset{\text{zum EW } \lambda_0}{\Longrightarrow}} \quad C^2 w = -\mu C x_0 = 0 \quad \wedge \quad \langle x_0, w \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \quad w \in \underbrace{\ker C^2}_{= \langle x_0 \rangle} \quad \wedge \quad w \in \langle x_0 \rangle \setminus \{0\}$$

$\langle x_0 \rangle$, da $x_0 \in \ker C \subset \ker C^2$, $x_0 \neq 0$,
und $\dim \ker C^2 = \dim \ker C = 1$
($\lambda_0$ ist einfacher EW)

$$\Longrightarrow \quad w = 0$$

Mit $(*)$ folgt: $\mu x_0 = Cw = 0$

$$\overset{x_0 \neq 0}{\Longrightarrow} \quad \mu = 0$$

Also gilt: $v = 0$

Somit folgt: $\ker B = 0$

$$\Longrightarrow \quad B \text{ regulär}$$

Nach dem Satz über imp. Fkt. folgt aus ①, ②, ③:

$\exists\, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offene Umg von $0$ bzw. $(x_0, \lambda_0)$

$\exists!\, g : \mathcal{U} \longrightarrow V$ stetig diff'bar

so dass $g(0) = (x_0, \lambda_0)$

und $F(g(t), t) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{U}$.

Schreibe $g(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix}$ wobei $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda(t) \in \mathbb{R}$

Dann folgt:

$$A(t)\, x(t) = \underset{\uparrow \text{ reeller EW}}{\lambda(t)}\, x(t) \qquad \forall t \in \mathcal{U}$$

$\square$

4.) a) Z: $\phi$ hat genau einen Fixpkt, der durch Iteration von $\phi$ gefunden werden kann.

Bew.: $\psi := \phi^n : A \longrightarrow A$ Kontraktion, $A$ vollständig

$\xRightarrow[\text{Fixpktsatz}]{\text{Banachscher}}$ $\exists! x_0 \in A : \psi(x_0) = x_0$ und $\forall x \in A : \psi^k(x) \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0$

① Existenz: $\phi(\psi(x)) = \phi^{n+1}(x) = \psi(\phi(x)) \quad \forall x \in A$

$\Longrightarrow \psi(\phi(x_0)) = \phi(\psi(x_0)) = \phi(x_0)$

$\Longrightarrow \phi(x_0)$ ist Fixpkt von $\psi$.

$\xRightarrow{\text{Eindeutigkeit}} \phi(x_0) = x_0$

② Eindeutigkeit: Sei $x$ Fixpkt von $\phi$.

$\Longrightarrow \psi(x) = \phi^{n-1}(x) = \ldots = \phi(x) = x$

$\xRightarrow{\text{Eindeutigkeit}} x = x_0$

③ Iteration: Für $m \in \mathbb{N}$ gibt es eindeutige $k_m \in \mathbb{N}, r_m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, sodass gilt: $m = k_m \cdot n + r_m$ (Division mit Rest)

Sei $x \in A$. Dann gilt:

$$\| \phi^m(x) - x_0 \| = \| \psi^{k_m}(\phi^{r_m}(x)) - x_0 \|$$
$$\leq \max_{r = 0,1,\ldots,n-1} \| \psi^{k_m}(\phi^r(x)) - x_0 \| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

da $\psi^k(\phi^r(x)) \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0 \quad \forall r = 0, 1, \ldots, n-1$

und $k_m \xrightarrow[m \to \infty]{} \infty$. □

b) Z: $\psi = \phi^2$ Kontraktion

Bew.: MWS $\Longrightarrow |\psi(x) - \psi(y)| \leq \|\psi'\|_\infty |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$\psi'(x) = e^{-(e^{-x} + x)}$

Wg. $e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ folgt

$0 \leq \psi'(x) \leq e^{-1}$

$\Longrightarrow \|\psi'\|_\infty \leq \frac{1}{e} < 1$

Wähle $\lambda = \frac{1}{e} = \|\psi'\|_\infty$ als Kontraktionskonstante

c) —