Übungsaufgaben 4

1.) Z: $\partial_1 \partial_2 f(0,0) \neq \partial_2 \partial_1 f(0,0)$

Bew.:
$$\partial_1 f(x,y) = \begin{cases} y\,\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} & : \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & : \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

Es reicht aber auch folgendes zu betrachten:

$$f(x,y) = xy \cdot g(x,y) \quad , \text{ wobei } \quad g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$
für $(x,y) \neq 0$.

$$\partial_1 f(x,y) = y\,g(x,y) + xy\,\partial_1 g(x,y) \quad \text{für } (x,y) \neq 0 .$$

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\Longrightarrow \partial_2 \partial_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\partial_1 f(0,h) - \partial_1 f(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\,g(0,h) - 0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} g(0,h) = -1$$

Um $\partial_1 \partial_2 f(0,0)$ zu bestimmen, müssen wir die Rollen von x und y vertauschen. Unter $(x,y) \longmapsto (y,x)$ transformiert sich $f(x,y)$ zu $-f(y,x)$.

$$\Longrightarrow \quad \partial_1 \partial_2 f(0,0) = -\partial_2 \partial_1 f(0,0) = 1$$
$$\Longrightarrow \quad \partial_1 \partial_2 f(0,0) \neq \partial_2 \partial_1 f(0,0) \qquad \blacksquare$$

3.) Total diff'bar: $J_f = 0$ (geraten oder aus dem 2. Teil)

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - J_f\binom{x}{y}|}{\|\binom{x}{y}\|_2} = \sqrt{x^2+y^2}\,|\sin(x^2+y^2)^{-1/2}| \le \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$$

part. Ableitung unstetig:

$$\partial_1 f(x,y) = 2x \sin(x^2+y^2)^{-1/2} - x(x^2+y^2)^{-1/2}\cos(x^2+y^2)^{-1/2}$$

für $(x,y) \neq 0$

$$\partial_1 f(\tfrac{1}{n}, 0) = \underbrace{\frac{2}{n}\sin(n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} - \underbrace{\cos(n)}_{\text{divergiert für } n \to \infty}$$

$\Longrightarrow$ $\partial_1 f$ ist unstetig in $(0,0)$.

Analog zeigt man, dass $\partial_2 f$ unstetig in $(0,0)$.

4.)

$$J_F(x,y) = \left(\frac{2xy^4+1}{x(xy^4+1)}, \frac{2(xy^4-1)}{y(xy^4+1)}\right)$$

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}\,y} & -\frac{\sqrt{x}}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$J_f(u,v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2}, \frac{2v}{u^2+v^2}\right)$$

$$(J_f \circ g)(x,y) = \left(\frac{2y^3}{xy^4+1}, \frac{2\sqrt{x}\,y}{x(xy^4+1)}\right)$$

$$J_F = (J_f \circ g) \cdot J_g$$