Übungsaufgaben 3

1.) z.z.: f ist ein Homöomorphismus.

Bew.: Sei $A \subset X$ abgeschlossen.

$\overset{X \text{ kompakt}}{\Longrightarrow}$ A kompakt

$\overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $f(A)$ kompakt

$\overset{Y \text{ Hausdorffsch}}{\Longrightarrow}$ $f(A)$ abgeschlossen.

Da f bijektiv, sei g die Umkehrabbildung zu f.

Dann gilt: $A \subset X$ abgeschl. $\Rightarrow$ $g^{-1}(A) = f(A) \subset Y$ abgeschl.

Also ist g stetig und somit f ein Homöomorphismus. $\square$

2.) Sei (X, d) komp. metrischer Raum.

z.z.: X ist vollständig.

Bew.: Sei (x_n) eine CF in X.

Da X kompakt ist,

$\exists\, (x_{n_k})$ TF von (x_n): $\quad x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x \in X$.

Sei $\varepsilon > 0$. Da (x_n) CF ist, gilt:

$\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, m, n \geq N: \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$.

Wg. $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$, gilt:

$\exists\, K \in \mathbb{N}\ \forall\, k \geq K: \quad d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$.

Da $n_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, finden wir $k_0 \geq K$ mit $n_{k_0} \geq N$.

Nun gilt für alle $n \geq N$:

$$d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_{k_0}})}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ \text{da } n \geq N \\ \text{und } n_{k_0} \geq N}} + \underbrace{d(x_{n_{k_0}}, x)}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ \text{da } k_0 \geq K}} < \varepsilon$$

Also gilt: $\quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. $\square$

BRUNNEN

3.) b) Doppelpunkte:

Seien $t, t' \in \mathbb{R}$, $t \neq t'$, mit $f(t) = f(t')$.

$$\Rightarrow \begin{cases} t^3 - t = t'^3 - t' & (*) \\ \wedge \quad t^2 - 1 = t'^2 - 1 & (**) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad t^2 = t'^2$$

$$\Rightarrow \quad t = -t' \quad , \text{ da } t \neq t'.$$

Eingesetzt in (**) folgt:

$$t^3 - t = (-t)^3 - (-t)$$

$$\Rightarrow \quad 2t^3 - 2t = 0$$

$$\Rightarrow \quad t(t^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{t = 0}_{} \quad \vee \quad t = 1 \quad \vee \quad t = -1$$

$$\xRightarrow{t=-t'} \quad t = 0 = t' \ \lightning \text{ zu } t \neq t'.$$

$$\xRightarrow{t=-t'} \quad (t = 1 \wedge t' = -1) \vee (t = -1 \wedge t' = 1)$$

Also erhalten wir maximal einen Doppelpunkt bei $t = 1$ und $t' = -1$.

Es gilt: $f(1) = (0,0) = f(-1)$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ ist einziger Doppelpunkt von f.

Tangentialvektoren:

$$f'(t) = (3t^2 - 1, 2t)$$

$$f'(1) = (2, 2)$$

$$f'(-1) = (2, -2)$$