Übungsaufgaben 1

1.) a) Z: In metrischen Räumen ist der Limes eindeutig.

Bew.: Sei (X,d) ein metrischer Raum und $(x_n) \subset X$ eine Folge mit $x_n \longrightarrow a$, $x_n \longrightarrow b$.

Aus der Δ-Ungl. folgt:

$$d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Longrightarrow$ $d(a,b) = 0$, da $d(a,b) \geq 0$ und unabhängig von n

$\xRightarrow[\text{von } d]{\text{Definitheit}}$ $a = b$ $\square$

b) (i) Gegenbsp.: Betrachte $X = \{a,b\}$ mit Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, und die Folge $(x_n = a)_n$ in X.

Da die einzige Umgebung von a als auch b X ist, gilt $x_n \longrightarrow a$ und $x_n \longrightarrow b$. aber $a \neq b$

(ii) Z: In einem Hausdorffraum X ist der Limes eindeutig.

Bew.: Sei $(x_n) \subset X$ eine Folge mit $x_n \longrightarrow a$, $x_n \longrightarrow b$.

Ann.: $a \neq b$

$\xRightarrow{\text{Hausdorff}}$ $\exists\, \mathcal{U}, V \subset X$: $\mathcal{U}$ Umg. von x und V Umg. von b mit $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$.

Wg. $x_n \longrightarrow a$ und $x_n \longrightarrow b$ gibt es aber $N_a, N_b \in \mathbb{N}$, sodass

$$x_n \in \mathcal{U} \quad \forall n \geq N_a$$
$$x_n \in V \quad \forall n \geq N_b$$

$\Longrightarrow$ $x_N \in \mathcal{U} \cap V$ wobei $N := \max\{N_a, N_b\}$

$\lightning$ zu $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$

$\square$

2.) Z: $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.

Bew.: Sei $(f_n) \subset C[a,b]$ eine CF.

① Kandidate für Limes bestimmen:

Sei $x \in [a,b]$, $\varepsilon > 0$. Da (f_n) CF ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass gilt: $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N$

$\Longrightarrow \quad (f_n(x))_n$ ist CF in $\mathbb{R}$.

$\overset{\mathbb{R} \text{ vollständig}}{\Longrightarrow} (f_n(x))_n$ konv. in $\mathbb{R}$. Den Grenzwert nennen wir $f(x)$ und erhalten eine Abb. $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n \xrightarrow{\text{pktw.}} f$.

② Der Kandidat konvergiert in der "richtigen" Topologie gegen unsere CF:

Sei $\varepsilon > 0$. Da (f_n) CF ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass gilt: $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N \; \forall x \in [a,b]$

$\Longrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \; \forall x \in [a,b]$

$\Longrightarrow \quad \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

Also gilt: $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.

③ Der Kandidat liegt im "richtigen" Raum:

Da alle f_n stetig sind und $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$, ist f stetig nach einem Satz aus Ana 1.

Aus ①-③ folgt:

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \in C[a,b]$$

□

3.) (X,d) vollständig, $Y \subset X$ Teilraum

Z: Y vollständig $\iff$ $Y \subset X$ abgeschlossen

Bew.: "$\Rightarrow$" Sei $(y_n) \subset Y$ mit $y_n \longrightarrow x \in X$.

$\Longrightarrow$ (y_n) ist CF in X

$\overset{(y_n)\subset Y}{\Longrightarrow}$ (y_n) ist CF in Y

$\overset{Y \text{ vollständig}}{\Longrightarrow}$ $y_n \longrightarrow y \in Y$

$\Longrightarrow$ $x = y \in Y$, also $Y \subset X$ abgeschlossen.

↑ Limes eindeutig, da X Hausdorffsch als metr. Raum.

Beachte: "X vollständig" wurde nicht benutzt.

"$\Leftarrow$" Sei $(y_n) \subset Y$ eine CF in Y.

$\Longrightarrow$ (y_n) ist CF in X.

$\overset{X \text{ vollständig}}{\Longrightarrow}$ $y_n \longrightarrow x \in X$

$\overset{Y \subset X \text{ abgeschl.}}{\Longrightarrow}$ $x \in Y$, also $y_n \longrightarrow x \in Y$. $\square$

4.) a) Z: $(\mathbb{C}^n, \mathcal{T})$ ist ein top. Raum.

Bew.: Bem.: $V(\langle S \rangle) = V(S)$ für $S \subset R$ endl.

Bew.: "$\subset$" klar, da $S \subset \langle S \rangle$

"$\supset$" $p \in \mathbb{C}^n$ mit $f_i(p) = 0 \ \forall i$ wobei $S = \{f_1, \dots, f_r\}$

$\Longrightarrow 0 = \sum_{i=1}^{r} a_i(p) f_i(p) \quad \forall a_i \in R$ #

① $S = \{0\} \Longrightarrow V(\langle S \rangle) = V(0) = \mathbb{C}^n$

jeweils konstante Polynome

$\Longrightarrow \emptyset = \mathbb{C}^n \setminus V(\langle S \rangle) \in \mathcal{T}$

$S = \{1\} \Longrightarrow V(\langle S \rangle) = V(R) = V(1) = \emptyset$

$\Longrightarrow \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n \setminus V(\langle S \rangle) \in \mathcal{T}$

② Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{T}$. Dann gibt es $S_1 = \{f_1, \dots, f_{r_1}\} \subset R$ und $S_2 = \{g_1, \dots, g_{r_2}\} \subset R$ mit $\mathcal{U}_1 = \mathbb{C}^n \setminus V(\langle S_1 \rangle)$, $\mathcal{U}_2 = \mathbb{C}^n \setminus V(\langle S_2 \rangle)$.

Es gilt: $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \mathbb{C}^n \setminus (V(\langle S_1 \rangle) \cup V(\langle S_2 \rangle))$

Gesucht: $S \subset R$ endl, sodass $V(\langle S \rangle) = V(\langle S_1 \rangle) \cup V(\langle S_2 \rangle)$.

$$V(\langle S_1 \rangle) \cup V(\langle S_2 \rangle)$$
$$\overset{\text{Bem.}}{=} V(S_1) \cup V(S_2)$$
$$= \{p \in \mathbb{C}^n \mid (f_i(p) = 0 \ \forall i) \vee (g_j(p) = 0 \ \forall j)\}$$

$= \{p \in \mathbb{C}^n \mid (f_i(p) = 0 \vee g_j(p) = 0) \;\; \forall i,j\}$

$= \{p \in \mathbb{C}^n \mid f_i(p) g_j(p) = 0 \;\; \forall i,j\}$

$= V(S) \overset{\text{Bem.}}{=} V(\langle S \rangle)$, wobei $S = \{f \cdot g \mid f \in S_1, g \in S_2\} \underset{\text{endl.}}{\subset} R$

Also $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \mathcal{T}$ und somit auch alle endl. Schnitte.

③ Sei $(\mathcal{U}_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$. $\mathcal{U}_i = \mathbb{C}^n \setminus V(\langle S_i \rangle)$, $S_i \subset R$ endl.

Es gilt: $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i = \mathbb{C}^n \setminus \bigcap_{i \in I} V(\langle S_i \rangle)$

<u>Gesucht:</u> $S \subset R$ endl. mit $V(\langle S \rangle) = \bigcap_{i \in I} V(\langle S_i \rangle)$.

$\bigcap_{i \in I} V(\langle S_i \rangle)$

$= \{p \in \mathbb{C}^n \mid f(p) = 0 \;\; \forall f \in \bigcup_{i \in I} \langle S_i \rangle\}$

$= \{p \in \mathbb{C}^n \mid f(p) = 0 \;\; \forall f \in \mathcal{J}\} = V(\langle S \rangle)$

wobei $\mathcal{J} = \{\sum_{i \in I} f_i \mid f_i \in S_i, \text{ fast alle } f_i = 0\} = \langle S \rangle$

Hinweis $\exists\, S \subset R$ endl. (Hilberts Basissatz)

<u>denn:</u> „$\subset$" $f(p) = 0 \;\; \forall f \in \bigcup_{i \in I} \langle S_i \rangle$

$\Rightarrow f_1(p) + \ldots + f_k(p) = 0 \;\; \forall f_i \in \langle S_{\alpha_i} \rangle$

„$\supset$" klar, da $\bigcup_{i \in I} \langle S_i \rangle \subset \mathcal{J}$.

Also $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$. □

b) <u>Beh.:</u> $\mathcal{T}^c = \{\mathbb{C}\} \cup \{A \subset \mathbb{C} \mid A \text{ endl.}\}$ sind die abgeschlossenen Mengen in $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$.

<u>Bew.:</u> $\mathcal{T}^c = \{\mathbb{C} \setminus \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}$

$= \{V(\langle S \rangle) = V(S) \mid S \subset R \text{ endl.}\}$

„$\subset$": Sei $A \in \mathcal{T}^c$. Dann gibt es $S = \{f_1, \ldots, f_r\} \subset R = \mathbb{C}[x]$

sodass $A = V(S) = \{p \in \mathbb{C} \mid f_i(p) = 0 \;\; \forall i\}$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat jedes von 0 verschiedene Polynom nur endl. viele Nst.

$\overset{S \text{ endl.}}{\Longrightarrow}$ A endl. oder $A = \mathbb{C}$ (falls $f_i = 0 \;\forall i$)

„$\supset$": $\mathbb{C} \in \mathcal{T}^c$ klar

Sei $A \subset \mathbb{C}$ endl. Betrachte das Polynom

$f(x) = \prod_{a \in A} (x - a)$.

Dann gilt: $A = V(\{f\}) = \{p \in \mathbb{C}^n \mid f(p) = 0\}$

□