Institut für Theoretische Physik | Universität Heidelberg
Prof. Dr. Tilman Plehn | Dr. Mario Mitter
Theoretische Physik I: Klassische Mechanik | Wintersemester 2014/2015

7. Übungsblatt

Ausgabe 08.12.2014 – Abgabe 15.12.2014 – Besprechung 12.01.2015

20. Aufgabe [6 Punkte]: Parabolische Zylinderkoordinaten

Die Punkte (x_1, x_2, x_3) aus dem $\mathbb{R}^3$ seien mittels parabolischer Zylinderkoordinaten

$$x_1 = \frac{(u^2 - v^2)}{2}\,, \quad x_2 = uv\,, \quad x_3 = z\,, \qquad u, z \in (-\infty, \infty)\,, \quad v \in [0, \infty)\,,$$

parametrisiert.

a) Stellen Sie die Koordinatenscharen, die durch jeweiliges Festhalten zweier Parameter entstehen, graphisch dar.

b) Berechnen Sie, analog zu den in der Vorlesung besprochenen Zylinder- und Kugelkoordinaten, die normierten Basisvektoren in parabolischen Zylinderkoordinaten und überprüfen Sie diese auf Orthogonalität.

c) Stellen Sie den Gradienten in der neuen Basis dar.

21. Aufgabe [6 Punkte]: Jacobimatrix und Gradient in krummlinigen Koordinaten

Berechnen Sie für die Zylinderkoordinaten

$$x_1(\rho, \phi, z) = \rho\cos\phi\,, \quad x_2(\rho, \phi, z) = \rho\sin\phi\,, \quad x_3(\rho, \phi, z) = z\,,$$
$$\rho \in [0, \infty)\,, \quad \phi \in [0, 2\pi)\,, \quad z \in (-\infty, \infty)\,,$$

die zugehörige Jacobimatrix, die als die Matrix der Ableitungen

$$J(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} \partial_\rho x_1(\rho, \phi, z) & \partial_\phi x_1(\rho, \phi, z) & \partial_z x_1(\rho, \phi, z) \\ \partial_\rho x_2(\rho, \phi, z) & \partial_\phi x_2(\rho, \phi, z) & \partial_z x_2(\rho, \phi, z) \\ \partial_\rho x_3(\rho, \phi, z) & \partial_\phi x_3(\rho, \phi, z) & \partial_z x_3(\rho, \phi, z) \end{pmatrix}\,,$$

definiert ist. Berechnen Sie das Inverse der Jacobimatrix J^{-1} und

$$\left(J^{-1}\right)^T \nabla^T_{\rho,\phi,z}\,,$$

wobei $\nabla_{\rho,\phi,z} \equiv (\partial_\rho,\ \partial_\phi,\ \partial_z)$ und die transponierte Matrix $\left(J^{-1}\right)^T$ durch Spiegeln aller Einträge um die Diagonale gewonnen wird. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Gradienten in Zylinderkoordinaten der in der Vorlesung berechnet wurde.

Wiederholen sie die obigen Rechenschritte für die Kugelkoordinaten

$$x_1(\rho,\phi,\theta) = \rho\cos\phi\sin\theta, \quad x_2(\rho,\phi,\theta) = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad x_3(\rho,\phi,\theta) = \rho\cos\theta\ ,$$
$$\rho \in [0,\infty)\ , \quad \phi \in [0,2\pi)\ , \quad \theta \in [0,\pi)\ ,$$

[Hinweis: Die inverse Jacobimatrix kann im Fall der Zylinderkoordinaten aus der transponierten J^T mittels Division durch ρ^2 an "passenden Stellen" (so, dass JJ^{-1} einheitenlos ist) erraten werden. Eine ähnliche Prozedur kann auch verwendet werden, um die inverse Jacobimatrix in Kugelkoordinaten zu erraten, wenn zusätzlich an den "passenden" Stellen durch $\sin^2\theta$ dividiert wird.]

22. Aufgabe [8 Punkte]: Zweikörperproblem

Betrachten Sie ein System von zwei Punktmassen $m_1,\ m_2$, die durch eine masselose Stange der Länge l verbunden sind. Diese Hantel werde nun im (als konstant angenommenen) Schwerefeld von der Erdoberfläche mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\vec{V}_0$ unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes weggeworfen.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Massenmittelpunkt $\vec{X} \equiv (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/(m_1 + m_2)$ auf uns lösen Sie diese.

   [Hinweis: Die, durch die masselose Stange einwirkende Kraft kann als innere Kraft, wie in der Vorlesung besprochen, behandelt werden.]

b) Zerlegen Sie den Gesamtdrehimpuls in einen Schwerpunkt- und einen Relativanteil, d.h. finden Sie $\bar{m}_1$ und $\bar{m}_2$ in einer Darstellung des Gesamtdrehimpulses der Form

$$\vec{L}(t) = \vec{L}_s(t) + \vec{L}_r(t) = \bar{m}_1\vec{X}(t) \times \dot{\vec{X}}(t) + \bar{m}_2\vec{z}(t) \times \dot{\vec{z}}(t)\ ,$$

   wobei $\vec{z} \equiv \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ die Relativkoordinaten darstellt. Berechnen Sie den Schwerpunktanteil $\vec{L}_s(t)$ explizit mit der Lösung der Bewegungsgleichung aus a).

c) Finden Sie die Bewegungsgleichung für die Relativekoordinate und verwenden Sie diese um die zeitliche Änderung des Relativdrehimpulses $\vec{L}_r(t)$ zu berechnen.

d) Zeigen Sie, dass sich die Punktmassen m_1 und m_2 jeweils mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn um den Massenmittelpunkt $\vec{X}$ bewegen.