Institut für Theoretische Physik | Universität Heidelberg
Prof. Dr. Tilman Plehn | Dr. Mario Mitter
Theoretische Physik I: Klassische Mechanik | Wintersemester 2014/2015

6. Übungsblatt

Ausgabe 01.12.2014 – Abgabe 08.12.2014 – Besprechung 15.12.2014

17. Aufgabe [4 Punkte]: Nabla-Operator

Zeigen Sie unter Verwendung des Kronecker-Deltas und des Levi-Civita-Symbols folgende Relationen für (zweimal stetig differenzierbare) dreidimensionale Vektorfelder $\vec{a}(x, y, z)$ und $\vec{b}(x, y, z)$ und ein (differenzierbares) skalares Feld $w(x, y, z)$:

a) $\nabla \times (w\vec{a}) = w(\nabla \times a) - \vec{a} \times (\nabla w)$,

b) $\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a})$,

c) $\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \left(\vec{b} \cdot \nabla\right) \vec{a} + \vec{a} \left(\nabla \cdot \vec{b}\right) - (\vec{a} \cdot \nabla)\, \vec{b} - \vec{b}\,(\nabla \cdot \vec{a})$,

d) $\nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla^2\, \vec{a}$.

18. Aufgabe [8 Punkte]: Stokes'scher Satz

Gegeben sei das Vektorfeld:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2 + (x^2 - y)\mathbf{e}_3 \ ,$$

sowie die Fläche $\mathcal{S}$, welche aus der Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ mit $z \geq 0$ besteht.

a) Ist das Kraftfeld $\mathbf{F}(x, y, z)$ konservativ?

b) Berechnen Sie explizit das Integral:

$$\int_{\mathcal{S}} d\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)) \ .$$

[Hinweis: Die Halbkugel lässt sich in sphärischen Polarkoordinaten sehr einfach darstellen:

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = R\, \mathbf{e}_r \ ,$$

mit $0 \leq \phi < 2\pi$ und $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Das gerichtete Flächenelement erhält man dann durch:

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{x}(\theta,\phi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{x}(\theta,\phi)}{\partial \phi} d\theta d\phi \ .$$

Um das Doppelintegral zu lösen, integriert man zuerst eine der Variablen aus und anschließend die andere.]

c) Berechnen Sie dasselbe Integral mithilfe des Stokes'schen Integralsatzes:

$$\int_{\mathcal{S}} d\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}(x,y,z)) = \int_{\partial\mathcal{S}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(x,y,z) \; .$$

19. Aufgabe [8 Punkte]: Beschleunigte Bewegung in verschiedenen Koordinaten

Eine Punktmasse m bewege sich als Funktion der Zeit t auf der Kurve

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\, e^{-\gamma t}\vec{e}_1 + R\sin(\omega t)\, e^{-\gamma t}\vec{e}_2 + \left(z + vt + \frac{a}{2}t^2\right)\vec{e}_3 \; , \quad \omega, a, v, z \in \mathbb{R}, \; \gamma > 0 \; ,$$

wobei $\vec{e}_i$ die Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems darstellen.

a) Skizzieren Sie die Bahnkurve und berechnen Sie die Geschwindigkeit, Beschleunigung, kinetische Energie und Drehimpuls.

b) Berechnen Sie dieselben Größen wie in Punkt a) nun in einem Bezugssystem, dass sich mit konstanter Geschwindigkeit $v >$ in die positive x_3-Richtung bewegt. Was ändert sich (nicht) und wieso? Welchen Einfluss hat z im Grenzfall $a = 0, \; \gamma = 0$

c) Stellen Sie die Bewegung nun in Zylinderkoordinaten dar. Berechnen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung und vergleichen Sie mit a).

[Hinweis: Die Basisvektoren der Zylinderkoordinaten sind ortsabhängig und somit in den Zeitableitungen für Geschwindigkeit und Beschleunigung mit zu berücksichtigen.]