4. Übungsblatt

Ausgabe 10.11.2014 – Abgabe 17.11.2014 – Besprechung 24.11.2014

10. Aufgabe [7 Punkte]: Inneres Produkt

Gegeben sei eine Basis $B = \{\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3\}$ für den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$. Folglich kann jeder beliebige Vektor $\vec{v}$ bzw. $\vec{w}$ aus $\mathbb{R}^3$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $v_{i,B}$ bzw. $w_{i,B}$, $i = 1, 2, 3$ bezüglich dieser Basis als $\vec{v} = v_{i,B}\vec{b}_i$ bzw. $\vec{w} = w_{i,B}\vec{b}_i$ (Einstein'sche Summenkonvention) dargestellt werden.
Zeigen Sie, dass

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_B \equiv w_{i,B} v_{i,B} = w_{1,B} v_{1,B} + w_{2,B} v_{2,B} + w_{3,B} v_{3,B} \ ,$$

die Eigenschaften eines Inneren Produktes (bilinear, symmetrisch, positiv semidefinit) hat.
Zeigen Sie, dass die gegebene Basis B bezüglich diesem Inneren Produkt eine Orthonormalbasis ist.
Verwenden Sie diese Eigenschaft um eine explizite Darstellung der Komponenten eines Vektors $\vec{v}$ bezüglich der Basis B als Innere Produkte mit den Basisvektoren zu finden.
Berechnen Sie $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_B$ mit

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

11. Aufgabe [6 Punkte]: Vektorprodukt

Gegeben seien zwei Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \ , \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \ .$$

Beweisen Sie durch explizites Nachrechnen die Eigenschaften

a) $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$,

b) $\vec{v} \times (\alpha \vec{v}) = \vec{w} \times (\alpha \vec{w}) = 0$ mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$,

des Vektorproduktes. Interpretieren Sie Eigenschaft a).

12. Aufgabe [7 Punkte]: Energie und Drehimpuls

Ein punktförmiges Objekt der Masse m bewegt sich an einer Schnur der Länge r mit Geschwindigkeit $|\vec{v}| = v$ auf einer Kreisbahn um den Ursprung.

a) Berechnen Sie den Drehimpuls und drücken sie die kinetische Energie sowie die auf die Punktmasse wirkende Kraft durch den Betrag des Drehimpulses und die Länge der Schnur aus.

b) Nun wird die Länge der Schnur durch Auf- bzw. Abrollen am Befestigungspunkt im Ursprung auf den Wert $\tilde{r}$ verändert. Geben Sie den neuen Drehimpuls und die neue Geschwindigkeit der Punktmasse an.

c) Berechnen Sie die Energiedifferenz der Punktmasse auf der neuen Kreisbahn im Vergleich zur alten Kreisbahn aus dem Wegintegral der Kraft und vergleichen Sie mit dem Ergebnis das sich aus der Differenz der Ausdrücke für die Energie aus a) ergibt.