Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Tilman Plehn
Theoretische Physik I: Klassische Mechanik

Universität Heidelberg
Dr. Mario Mitter
Wintersemester 2014/2015

3. Übungsblatt

Ausgabe 03.11.2014 – Abgabe 10.11.2014 – Besprechung 17.11.2014

7. Aufgabe [8 Punkte]: Getriebener Oszillator mit Dämpfung

In den letzten Übungsblättern wurden sowohl der freie (Ü2) als auch der getriebene Oszillator ohne Dämpfung (Ü6) diskutiert. Betrachten Sie nun für $|\omega_0| > \gamma > 0$ den getriebenen Oszillator mit Dämpfung:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f\cos(\omega t)\ .$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung mit dem Ansatz $x_{\mathrm{H}}(t) = \exp(\alpha t)$, wobei der Faktor α im Exponenten durch eine allgemeine komplexe Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ gegeben ist.

b) Verwenden Sie den Ansatz $x_{\mathrm{P}}(t) = A\cos(\omega t+\delta)$ um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden.

c) Wie verhält sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung für große Zeiten $t \to \infty$. Bei welchem Wert von ω wird die Amplitude A maximal. Finden Sie das ω mit maximaler Amplitude im Grenzfall $t \to \infty$.

[Hinweis: Zur Bestimmung der Phasenverschiebung δ und Amplitude A und könnten die Additionstheoreme $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$ und $\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta)+\sin(\alpha)\cos(\beta)$ sowie die Relationen $\sin(\arctan x) = x/\sqrt{1+x^2}$ und $\cos(\arctan x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ hilfreich sein.]

8. Aufgabe [6 Punkte]: Vektorraum

Zeigen Sie, dass die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0\ ,$$

zusammen mit Addition und Multikplikation der Lösungsfunktionen mit einer reellen Zahl die Eigenschaften eines Vektorraumes erfüllen. Bestimmen Sie die Dimension des Vektorraumes.

9. Aufgabe [6 Punkte]: Vektoraddition, lineare Abhängigkeit und Basis

Gegeben seien vier Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

a) Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \vec{v}_i$ und $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \vec{v}_i$ mit den Skalaren $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

b) Sind die Mengen $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\}$ und $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4\}$ linear unabhängig.

c) Stellen sie den Vektor $\vec{v}_4$ als Linearkombination der Basiselemente $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\}$ dar.

d) Bilden alle dreielementigen Teilmengen von $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4\}$ eine Basis?