| | |
|---|---|
| Institut für Theoretische Physik | Universität Heidelberg |
| Prof. Ulrich Schwarz | Thorsten Erdmann |
| **Theoretische Physik III: Elektrodynamik** | Wintersemester 2014/2015 |

# 11. Übungsblatt

Ausgabe 13-01-2015 – Abgabe 20/21-01-2015 – Besprechung 27/28-01-2015

## 1. Aufgabe [6 Punkte]: Hohlraumstrahlung

Die Oberfläche eines Quaders der Kantenlängen $a$, $b$ und $c$ bestehe aus einem ideal leitenden Material. Im Innern des Quaders seien keine Ladungen oder Ströme, aber ein oszillierendes elektromagnetisches Feld. Für dieses benutzen wir den Ansatz

$$E_l(\boldsymbol{r},t) = E_l^0 \cos(k_l r_l) \sin(k_m r_m) \sin(k_n r_n) \, e^{-i\omega t}$$

wobei die Indices $(l,m,n) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$. Welche Einschränkungen an $\boldsymbol{E}$ folgen aus den Maxwell-Gleichungen und den Randbedingungen? Wie lautet $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$? Welches ist die kleinste mögliche Frequenz, so dass $\boldsymbol{E} \neq 0$?
HINWEIS: Beachten Sie, dass die Tangentialkomponente von $\boldsymbol{E}$ auf den Oberflächen des Quaders verschwindet.

## 2. Aufgabe [7 Punkte]: Energie und Impuls elektromagnetischer Wellen

Wir schreiben elektromagnetische Wellen oft in Form komplexer Vektoren. Physikalisch relevant ist jedoch nur der Realteil.

(a) Geben Sie ein Beispiel an, dass für einen komplexwertigen Vektor $\boldsymbol{a}$ im allgemeinen $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{a}^2 \neq (\mathrm{Re}\,\boldsymbol{a})^2$, wobei $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^*)/2$. **[1P]**

(b) Es seien $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})e^{i\omega t}$ und $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})e^{i\omega t}$. Geben Sie einen Ausdruck für $d = (\mathrm{Re}\,\boldsymbol{a}) \cdot (\mathrm{Re}\,\boldsymbol{b})$ an. Was ergibt sich für $\langle d \rangle_t$, d.h., für den zeitlichen Mittelwert von $d$ über eine Periode $T = 2\pi/\omega$? **[1P]**

Wir betrachten nun eine ebene elektromagnetische Welle mit

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}\,, \quad \boldsymbol{B} = \left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right) \times \boldsymbol{E} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{k} = 0$$

im Vakuum betrachten.

(c) Bestimmen Sie die Energiedichte $w$ der Welle sowie ihr zeitliches Mittel $\langle w \rangle_t$. Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\boldsymbol{S}$ und seine zeitliches Mittel $\langle \boldsymbol{S} \rangle_t$. Wie hängen $w$ und $\boldsymbol{S}$ zusammen, und wie $\langle w \rangle_t$ und $\langle \boldsymbol{S} \rangle_t$? Wie lässt sich das Ergebnis interpretieren? **[3P]**
HINWEIS: Drücken Sie dabei überall das magnetische durch das elektrische Feld aus.

(d) Geben Sie die Impulsdichte $\boldsymbol{g}$ des elektromagnetischen Feldes und ihr zeitliches Mittel $\langle \boldsymbol{g} \rangle_t$ an. **[2P]**

**3. Aufgabe [7 Punkte]: Wellenpaket in einer Dimension**

Gegeben sei ein Wellenpaket, das sich in positiver $x$-Richtung ausbreite,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{a}(k) e^{i(\omega(k)t + kx)} \, .$$

(a) Nehmen Sie an, dass $\omega(k)$ im Spektralbereich des Wellenpaketes linear approximiert werden kann, d.h.,

$$\omega(k) \approx \omega_0 + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$$

wobei $\omega_0 = \omega(k_0)$. Zeigen Sie, dass sich das Wellenpaket mit der Gruppengeschwindigkeit $v_\mathrm{g} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$ unverändert fortpflanzt (bis auf eine ortsunabhängige Phasenverschiebung). **[2P]**

(b) Untersuchen Sie nun den zeitlichen Verlauf des Wellenpaketes für eine nicht-lineare Dispersionsrelation mit

$$\omega(k) = \frac{1}{2} a k^2$$

für den Fall, dass das Wellenpaket zum Zeitpunkt $t = 0$ die Form

$$u(x,0) = u_0 \cos(k_0 x) e^{-x^2/2\delta}$$

habe. **[5P]**