Institut für Theoretische Physik — Universität Heidelberg
Prof. Ulrich Schwarz — Thorsten Erdmann
Theoretische Physik III: Elektrodynamik — Wintersemester 2014/2015

10. Übungsblatt

Ausgabe 08-01-2015 – Abgabe 13/14-01-2015 – Besprechung 20/21-01-2015

1. Aufgabe [8 Punkte]: Magnetische Monopole

(a) Schreiben Sie die vier Maxwell-Gleichungen als zwei Gleichungen für das komplexe Feld $\boldsymbol{\psi}$, das durch

$$\boldsymbol{\psi} := \boldsymbol{E} + i\boldsymbol{B}$$

definiert ist. Wie folgt die Kontinuitätsgleichung aus dieser Form? **[2P]**

(b) Wie sieht bei verschwindenden Quellen ($\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$) der „Hamilton-Operator“ H in der „Schrödinger-Gleichung“

$$i\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} = H\boldsymbol{\psi}$$

für $\boldsymbol{\psi}$ aus? Welcher Operator, angewendet auf beide Seiten der Gleichung, führt auf die Wellengleichung $\Box\,\boldsymbol{\psi} = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\boldsymbol{\psi} = 0$? **[1P]**

(c) Zeigen Sie, dass die quellenfreien Maxwell-Gleichungen im Vakuum ($\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$) unter den Dualitätstransformationen

$$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}\cos\vartheta + \boldsymbol{B}\sin\vartheta$$
$$\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}' = -\boldsymbol{E}\sin\vartheta + \boldsymbol{B}\cos\vartheta$$

invariant sind. Wie transformiert sich $\boldsymbol{\psi}$? **[2P]**

(d) Zeigen Sie, dass die Invarianz auch mit $\rho \neq 0$, $\boldsymbol{j} \neq 0$ gelten würde, wenn es zusätzlich zu den elektrischen Ladungen ρ_e magnetische Ladungen ρ_m gäbe. Wie lauten dann die Maxwell-Gleichungen? Wie transformieren sich ρ_e, ρ_m, $\boldsymbol{j}_\mathrm{e}$ und $\boldsymbol{j}_\mathrm{m}$? **[2P]**

(e) Angenommen, alle Teilchen hätten das gleiche Verhältnis $\rho_\mathrm{m}/\rho_\mathrm{e}$. Wie können Sie die Maxwell-Gleichungen wieder in ihre ursprüngliche Form, d.h. mit $\rho_\mathrm{m} = 0$, bringen? **[1P]**

2. Aufgabe [3 Punkte]: Nebenbedingungen elektrischer und magnetischer Felder

Die beiden Maxwell-Gleichungen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho\,,$$

die keine Zeitableitung enthalten, können als Nebenbedingungen für die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ aufgefasst werden. Die zeitliche Entwicklung dieser Felder wird durch die beiden übrigen Maxwell-Gleichungen beschrieben. Zeigen Sie, dass diese Nebenbedingungen konsistent sind mit der Zeitentwicklung: Falls die Felder $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ und $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ die Nebenbedingungen zu einem Zeitpunkt t_0 erfüllen, erfüllen die Felder die Nebenbedingungen auch zu jeder späteren Zeit $t > t_0$.

3. Aufgabe [4 Punkte]: Kugelwellen

Betrachten Sie die skalare Wellengleichung $\Box\,\psi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\psi = 0$.

(a) Setzen Sie den Ansatz für Kugelwellen

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \frac{g(r,t)}{r}$$

mit $r = |\boldsymbol{r}|$ in diese Gleichung ein und leiten Sie eine Gleichung für $g(r,t)$ her. **[2P]**

(b) Zeigen Sie, dass Ihre allgemeine Lösung zwei freie Funktionen

$$f_{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

enthält und geben Sie die allgemeine Lösung an. **[2P]**

4. Aufgabe [5 Punkte]: Polarisation ebener Wellen

Wir betrachten eine ebene elektromagnetische Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet, d.h., es ist $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_z$. Mit den reellen Konstanten E_x, E_y und φ_x, φ_y schreiben wir

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \left(E_x e^{i\phi_x}\boldsymbol{e}_x + E_y e^{i\phi_y}\boldsymbol{e}_y\right) e^{i(kz-\omega t)}\,.$$

Das elektrische Feld ist dann durch den Realteil Re$\boldsymbol{E}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie für den Fall $\delta = \varphi_y - \varphi_x = \pi/2$, dass für festes $\boldsymbol{r}$ der Vektor Re$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ eine Ellipse umläuft und geben Sie deren Halbachsen an. **[2P]**

(b) Wodurch sind die Spezialfälle linkszirkularer und linearer Polarisation gekennzeichnet? Was sind in diesen Fällen die Halbachsen der Ellipse? **[2P]**

(c) Fertigen Sie für den allgemeinen Fall elliptischer Polarisation (beliebiges δ) eine Skizze für Re$\boldsymbol{E}$ an, in der Sie verschiedene, geeignete t kennzeichnen. **[1P]**