

Vorlesungsmitschrift

Theoretische Physik III Elektrodynamik

Dozent Prof. Dr. Ulrich Schwarz

WS 2014/15

Stand November 10, 2014



Universität Heidelberg
Institut für Theoretische Physik

Inhaltsverzeichnis

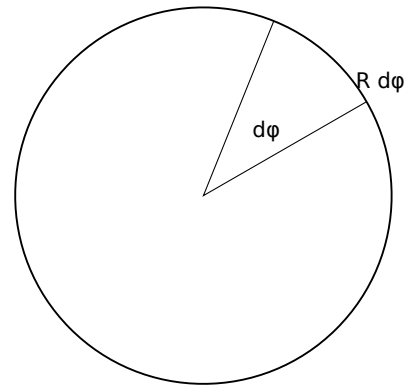
1	Elektrostatik	3
1.1	Notation	3
1.2	Mathematischer Einschub 1: Vektorfelder	5
1.3	Coulombgesetz und Feldgleichungen	19
2	Randwertprobleme und Greensche Funktionen	29

1 Elektrostatik

1.1 Notation

- Ortsvektor: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- Skalarprodukt: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta) = \sum_i a_i b_i = a_i b_i$ (Einstein Konvention)
- Linienintegral einer Funktion f entlang einer Raumkurve $\mathbf{r}(t) : \int f(\mathbf{r}(t)) dt$

z.B. Kreislinie : $L = \int_0^{2\pi} d\phi R = 2\pi R$

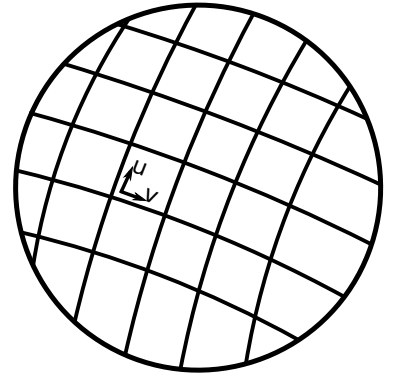


- Oberflächenintegral einer Funktion ueber eine Flaeche. u,v beschreiben die internen Koordinaten der Flaeche $\mathbf{r}(u, v) : \int f(\mathbf{r}(u, v)) dudv$

z.B. Kreisflaeche ($u = \phi, v = r$) : $A = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr = \pi R^2$

z.B. Kugeloberflaeche : $A = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} R^2 \sin(\theta) d\theta = 4\pi R^2$

$(u = \phi, v = \theta)$



- Normalenvektor der durch \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 aufgespannten Tangentialebene:

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{t}_1(u, v) \times \mathbf{t}_2(u, v)}{|\mathbf{t}_1(u, v) \times \mathbf{t}_2(u, v)|}, \quad \mathbf{t}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u}, \quad \mathbf{t}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v}$$

- $\partial V \cong$ Rand von V, wobei V eine Punktmenge ist, z.B. V = Kugel und $\partial V =$ Kugeloberflaeche.

- z.P. \cong zyklische Permutation

- Partielle Ableitungen: $\frac{\partial}{\partial r_i} = \partial_i, \frac{\partial}{\partial r'_i} = \partial'_i$

- Nabla-Operator: $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}$

- Laplace-Operator: $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \partial_i \partial_i, \Delta' = \partial'_i \partial'_i$

1.2 Mathematischer Einschub 1: Vektorfelder

Eine typische Anwendung von Vektorfeldern ist das Fließen einer Flüssigkeit (Hydrodynamik). Man ist eventuell daran interessiert, wie viele Teilchen pro Zeit durch eine Fläche A gehen. Sei $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit am Ort \mathbf{r} .

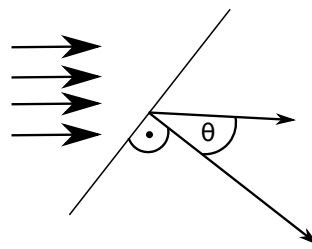
- Im Folgenden Fläche senkrecht zur Geschwindigkeit:

$$\Delta N = \rho \Delta V = \rho A \Delta s = \rho A v \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t A} = \rho v =: j \text{ "Stromdichte"}$$

Der Gesamtstrom durch die Fläche errechnet sich nun zu:

$$I_A = j A = \rho v A = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

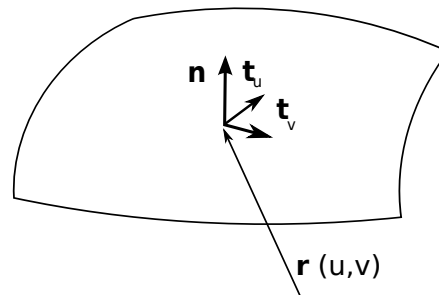
- Gekippte Fläche:



Charakterisiere die Fläche durch den Vektor \mathbf{A} mit $|\mathbf{A}| = A$, $\mathbf{A} \parallel \mathbf{n}$

$$\Rightarrow I_A = \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{j} := \rho \mathbf{v}$$

- Beliebige Flächen:



$$I_A = \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA \approx \sum_{i=1}^N \rho \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_i \frac{\Delta A_i}{V} \text{ ("Riemannsche Diskretisierung des Integrals")}$$

i nummeriert die Plaquetten, in die wir die Fläche aufteilen. Im Folgenden arbeiten wir mit \mathbf{v} als Beispiel fuer ein beliebiges Vektorfeld.

$I_A = \int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ ist dann ein Mass fuer die Durchdringung der Fläche A durch das Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$.

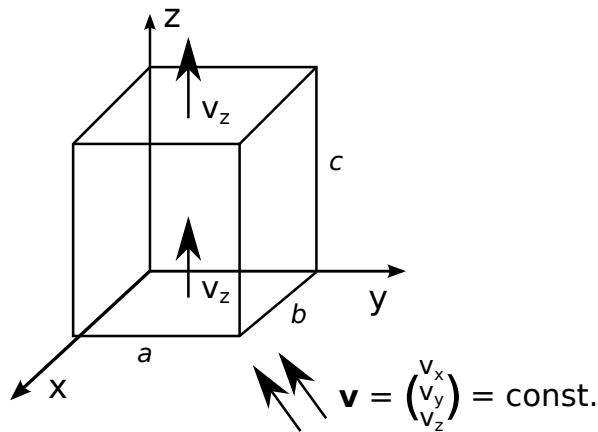
Wir betrachten I_A jetzt fuer **geschlossene** Flaechen A , die ein Volumen einschliessen.

Beispiel 1.

$$\mathbf{v} \equiv \text{const}, \quad V = \text{Quader mit Seitenlaengen } a, b, c$$

Fluss von \mathbf{v} durch die Flaechen A berechnet sich durch:

$$I_A = \oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \approx \sum_{i=1}^6 \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \mathbf{n}_i A_i = v_z ab - v_z ab + v_y ca - v_y ca + v_x bc - v_x bc = 0$$



"Was reinkommt, geht auch wieder raus"

Der Gesamtfluss I_A verschwindet fuer $\mathbf{v} \hat{=} \text{const}$ fuer beliebige geschlossene Flaechen. Der Beweis folgt spaeter.

Beispiel 2 (radialsymmetrisches Feld).

$$\mathbf{v} := v(r) \mathbf{e}_r$$

Wir berechnen den Fluss ueber eine Kugelflaechen mit Radius R

$$I_A = \oint_A \mathbf{v} d\mathbf{A} = \oint_A \mathbf{v}(r) \underbrace{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r}_{=1} dA = v(R) 4\pi R^2$$

$$I_A(R) \equiv \text{const} \Rightarrow v(R) \sim \frac{1}{R^2}$$

Wir wollen nun ein lokales Mass fuer die Durchdringung von geschlossenen Flaechen bzw. ein Mass fuer die lokale Quelledichte eines Vektorfeldes definieren.

Definition (Divergenz des Vektorfeldes).

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) := \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{A=\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}$ ist quellenfrei,

$\operatorname{div} \mathbf{v} > 0 \Rightarrow$ es existieren Quellen,

$\operatorname{div} \mathbf{v} < 0 \Rightarrow$ es existieren Senken.

Bemerkung. $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r})$ ist ein skalares Feld

Im Folgenden berechnen wir die Divergenz mit Hilfe eines Quaders.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{1}{V} \oint_A \mathbf{v} d\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} [v_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z - v_x(x, y, z) \Delta y \Delta z \\ &+ v_y(x, y + \Delta y, z) \Delta x \Delta z - v_y(x, y, z) \Delta x \Delta z \\ &+ v_z(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y - v_z(x, y, z) \Delta x \Delta y] \\ &= \frac{v_x(x + \Delta x, y, z) - v_x(x, y, z)}{\Delta x} + \frac{v_y(x, y + \Delta y, z) - v_y(x, y, z)}{\Delta y} \\ &+ \frac{v_z(x, y, z + \Delta z) - v_z(x, y, z)}{\Delta z} \xrightarrow{V \rightarrow 0} \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z \\ &= \partial_i v_i = \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}} \end{aligned}$$

Beispiel.

- $\mathbf{v} \equiv \text{const} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$
- $\mathbf{v} = \mathbf{r} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{r} = 3$
- $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$ (Solche Felder haben konstanten Fluss I_A)

Hier gilt fuer $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{r} = \partial_x \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + z.P. \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{x \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + z.P. \\ &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \end{aligned}$$

Achtung: Fuer $\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{0}{0}$ "nicht definiert!"

Wir moechten nun das Integral der Divergenz ueber ein Volumen V mit $\partial V = A$ berechnen. Es gilt:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \Delta V_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \oint_{A_i} \mathbf{v} d\mathbf{A} = \oint_A \mathbf{v} d\mathbf{A}$$

Bemerkung.

- Wir fuellen unser Volumen V mit hinreichend kleinen Quadern aus.
- Die A_i entsprechen den geschlossenen Oberflaechen dieser Quader.
- Alle internen Flaechenintegrale heben sich weg.

Die vorherige Rechnung begruendet den folgenden Satz:

Theorem (Integralatz von Gauss).

Fuer $A = \partial V$ gilt:

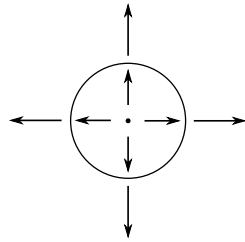
$$\boxed{\oint_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV}$$

Bemerkung. Es existieren Mengen V fuer die der Satz nicht gilt! V muss kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n mit stueckweise glattem Rand sein. Zusaetzlich muss das Vektorfeld in einer offenen Menge stetig differenzierbar sein. Wir werden in dieser Vorlesung allerdings nur solche Faelle betrachten, die diese Vorraussetzungen erfuellen, da wir hier physikalische Felder behandeln, die in dieser Hinsicht gut definiert sind.

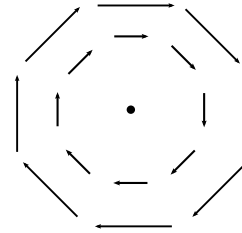
Erste physikalische Anwendung:

Wir wenden den Satz von Gauss auf die Stromdichte $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ an:

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_A &= \oint_{A=\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{j}}_{=\operatorname{div} \mathbf{j}} dV' = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV' = \int_V (-\dot{\rho}) dV' \\ &\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} = -\dot{\rho} \Rightarrow \boxed{\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0} \hat{=} \text{"Kontinuitaetsgleichung"} \end{aligned}$$



keine Wirbel



starke Wirbel

Neben der Queldichte von Vektorfeldern ist eine weitere wichtige Eigenschaft ihre Wirbelstärke (d.h. die Existenz von Zirkulationen). Wir möchten diese im Folgenden charakterisieren. Hierzu verwenden wir die Zirkulation entlang eines geschlossenen Weges C , welcher eine planare Fläche A mit Normalenvektor \mathbf{n} berandet und betrachten den Grenzübergang $A \rightarrow 0$. Dies motiviert die folgende

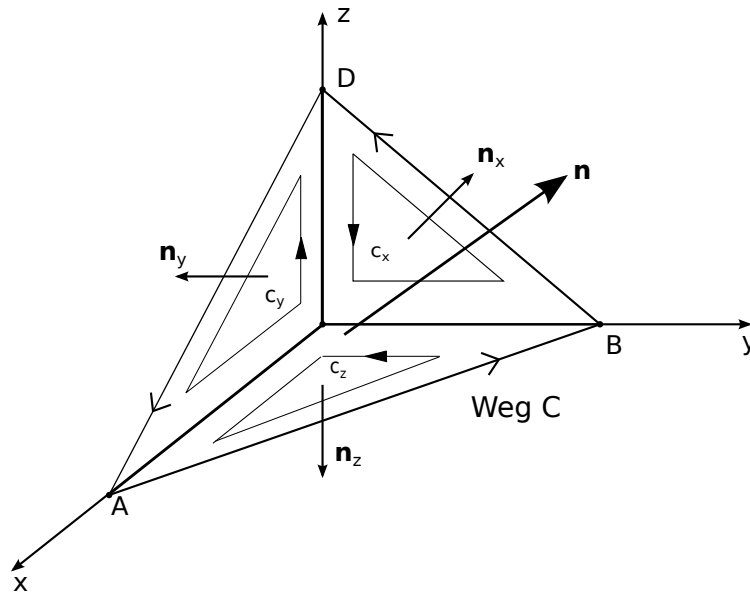
Definition (Rotation des Vektorfelds).

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} := \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_{C=\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}, \quad \text{für } \mathbf{A} \parallel \mathbf{n}$$

Bemerkung.

- $\mathbf{n} \hat{=}$ Flächennormale
- $d\mathbf{s} = \mathbf{t} ds \hat{=}$ Linienelement
- $\mathbf{t} \hat{=}$ Tangentialvektor
- Im Gegensatz zur Divergenz ist die Rotation kein skalares, sondern ein vektorielles Vektorfeld, da sie abhängig von der Flächennormale \mathbf{n} ist.

Behauptung: Ein dreidimensionaler Vektor (*rotv*) beschreibt vollstaendig alle moeglichen Linienintegrale dieser Art. Man sagt die Darstellung ist koordinatenunabhaengig. Wir rechnen dies exemplarisch nach:



$$\text{Weg } C = A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$$

Wir zerlegen C in drei Teilwege, wodurch sich die Inneren Teile paarweise wegheben.

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_x} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_y} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_z} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

Es sei $A_x := \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_x = A \cos(\theta_x)$ mit $\theta_x = \angle(\mathbf{A}, \mathbf{e}_x)$
 A_y, A_z seien analog definiert.

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} &= \lim_{A \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(\theta_x)}{\cos(\theta_x) A_x} \int_{C_x} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\cos(\theta_y)}{\cos(\theta_y) A_y} \int_{C_y} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\cos(\theta_z)}{\cos(\theta_z) A_z} \int_{C_z} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_x) \\ \cos(\theta_y) \\ \cos(\theta_z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lim_{A_x \rightarrow 0} \frac{1}{A_x} \int_{C_x} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \\ \lim_{A_y \rightarrow 0} \frac{1}{A_y} \int_{C_y} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \\ \lim_{A_z \rightarrow 0} \frac{1}{A_z} \int_{C_z} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{v} \\ &\Rightarrow \text{die kartesischen Komponenten genuegen.} \end{aligned}$$

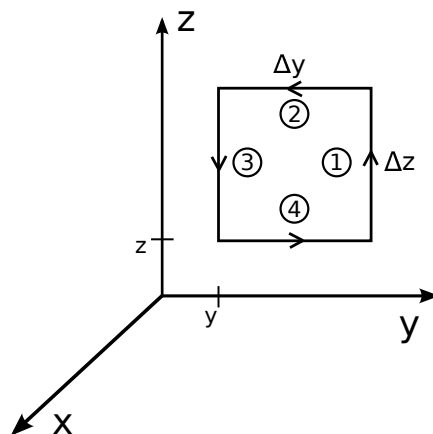
Lemma (Rotation als Differentialoperator).

Fuer die Rotation gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v} \\ (\operatorname{rot} \mathbf{v})_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k \\ \varepsilon_{ijk} &:= \begin{cases} 1, & \text{fuer positive Permutationen,} \\ -1, & \text{fuer negative Permutationen,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis.

Man zeigt komponentenweise die Behauptung:



$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{v})_x &= \frac{1}{\Delta y \Delta z} \oint_{C_x} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \frac{1}{\Delta y \Delta z} [v_z(x, y + \Delta y, z) \Delta z - v_z(x, y, z) \Delta z + v_y(x, y, z + \Delta z) \Delta y + v_y(x, y, z) \Delta y] \\ &= \frac{v_z(x, y + \Delta y, z) - v_z(x, y, z)}{\Delta y} - \frac{v_y(x, y, z + \Delta z) - v_y(x, y, z)}{\Delta z} \\ &= \partial_y v_z - \partial_z v_y \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{v})_y &= \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ (\operatorname{rot} \mathbf{v})_z &= \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{aligned}$$

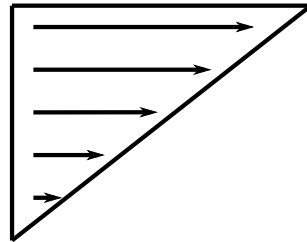
□

Beispiel.

- *Scherfluss*

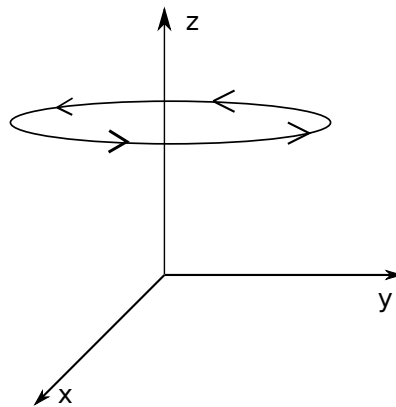
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ az \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Interpretation: Richtung und Betrag der Drehung eines Testteilchens.



- $\mathbf{v} \equiv \text{const} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$

- $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

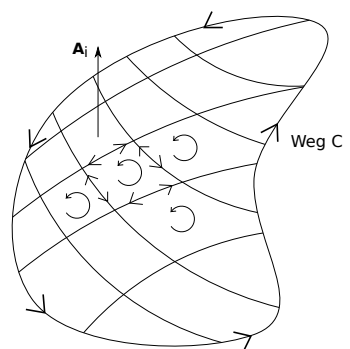


- $\mathbf{v} = \mathbf{r}$ radialsymmetrisch $\Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fuer ein Vektorfeld ergeben sich also zwei wichtige abgeleitete Groessen:

Name	Divergenz	Rotation
Bedeutung	Quellendichte	Wirbelstaerke
Beispiel	$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \operatorname{div} \mathbf{v} = 3, \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$	$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$
Integraldarstellung	$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{A=\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$	$(\operatorname{rot} \mathbf{v})_i = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_{C=\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ <small>$\mathbf{A} \parallel \mathbf{e}_i$</small>
Differentialdarstellung	$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_i v_i$	$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j v_k$

Theorem (Integralsatz von Stokes).

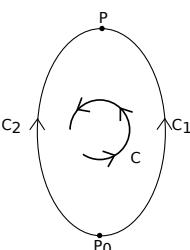
$$\int_A \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \approx \sum_{i=1}^N \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_i dA_i \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \stackrel{(*)}{=} \oint_{C=\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$


$$\Rightarrow \boxed{\int_A \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_A \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{C=\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}} \quad (*) \text{ "interne Strecken heben sich auf"}$$

Korollar.

- Fuer ein wirbelfreies Vektorfeld ($\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$) sind Linienintegrale wegunabhaengig, d.h.

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_A \nabla \times \mathbf{v} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$


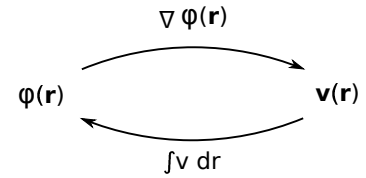
Wir definieren in so einem Fall:

$$\phi(\mathbf{r}) := \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \hat{=} \text{(skalares) potential des Vektorfeldes}$$

- Wegen der Wegunabhängigkeit ist ϕ (bis auf eine Integrationskonstante) eindeutig bestimmt.
- Man kann ϕ und \mathbf{v} wie folgt ineinander ueberfuehren:

$$d\phi = \partial_x \phi dx + \partial_y \phi dy + \partial_z \phi dz = \nabla \phi \cdot d\mathbf{s}$$

$$\Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \int_{r_0}^{\mathbf{r}} d\phi = \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \nabla \phi \cdot d\mathbf{s} = \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \stackrel{\forall C}{\Rightarrow} \mathbf{v} = \nabla \phi$$



- Fuer den Wirbelfluss durch eine geschlossene Flaeche $A = \partial V$, $C = \partial A = 0$ (die Randkurve wird auf einen Punkt zusammengezogen!) gilt:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0 = \oint_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A}$$

D.h. Der Wirbelfluss $\nabla \times \mathbf{v}$ durch eine geschlossene Flaeche verschwindet fuer jedes Vektorfeld \mathbf{v} .

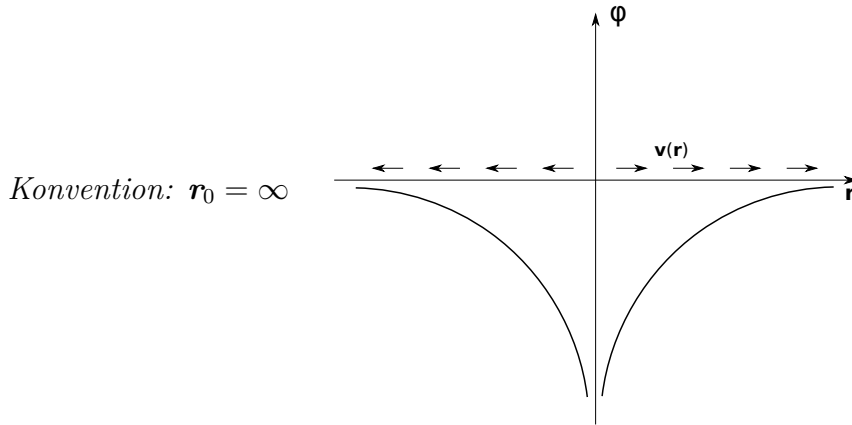
- Das gleiche Ergebnis liefert der Gauss'sche Satz:

$$\oint_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} = \int_V \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})}_{=\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j v_k = 0} dV = 0$$

Beispiel.

- radialsymmetrisches Vektorfeld: $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \mathbf{e}_r \Rightarrow I_A = 4\pi$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{v})_x &= \partial_y \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) - \partial_z \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{z \left(-\frac{3}{2}\right) 2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{y \left(-\frac{3}{2}\right) 2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \\ &\Rightarrow \text{wirbelfrei} \Rightarrow \text{Potential existiert: } \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dr = \int \frac{1}{r^2} dr = -\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \end{aligned}$$



Probe: $\mathbf{v} = \nabla\phi_i, v_i = \partial_i\left(-\frac{1}{r}\right) = \partial_i\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)_i = \left(\frac{(-1)(-\frac{1}{2})2r_i}{r^3}\right)_i = \frac{r}{r^3} \checkmark$

Theorem (1. Greenscher Satz).

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla\psi(\mathbf{r}) \\ \Rightarrow \operatorname{div}\mathbf{a} &= \nabla \cdot \mathbf{a} = \partial_i a_i = \partial_i(\phi\partial_i\psi) = (\partial_i\phi)(\partial_i\psi) + \underbrace{\phi(\partial_i\partial_i\psi)}_{=\Delta} \\ \Rightarrow \int_V [(\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi\Delta\psi] dV &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{A=\partial V} \phi \nabla\psi \cdot \mathbf{n} dA \end{aligned}$$

Mit der Normalenableitung: $\nabla\psi \cdot \mathbf{n} = \partial_n\psi = \partial_i\psi n_i = n_i\partial_i\psi = (\mathbf{n} \cdot \nabla)\psi =: \partial_n\psi$

$$\Rightarrow \boxed{\int_V [(\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi\Delta\psi] dV = \oint_{A=\partial V} \phi \partial_n\psi dA} \quad \hat{=} \quad \mathbf{1. \textit{Greensche Identitaet}}$$

Theorem (2. Greenscher Satz).

Aus dem 1. Greenschen Satz erhaelt man durch Vertauschen von $\phi \leftrightarrow \psi$ und Subtraktion:

$$\Rightarrow \boxed{\int_V [\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi] dV = \oint_{A=\partial V} [\phi\partial_n\psi - \psi\partial_n\phi] dA} \quad \hat{=} \quad \mathbf{2. \textit{Greensche Identitaet}}$$

z.B. $\phi = 1 \Rightarrow \int_V \Delta\psi dV = \oint_{A=\partial V} \partial_n\psi dA$

Theorem (Zerlegungs und Eindeutigkeitsatz).

Jedes Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ wird eindeutig durch sein Quellenfeld $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r})$ und sein Wirbelfeld $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r})$ bestimmt, sofern dieses stetig differenzierbar ist und im Unendlichen hinreichend schnell abfaellt (mindestens wie $\frac{1}{r^2}$).

Beweis. Wir fuehren den Beweis konstruktiv durch, d.h. wir konstruieren zunaechst die

Zerlegung und zeigen im Anschluss deren Eindeutigkeit.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) := \underbrace{\mathbf{v}_D(\mathbf{r})}_{\text{Divergenzanteil}} + \underbrace{\mathbf{v}_R(\mathbf{r})}_{\text{Rotationsanteil}}$$

$$\mathbf{v}_D(\mathbf{r}) := \nabla \underbrace{-\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}_{:=\alpha(\mathbf{r}) \hat{=} \text{"skalares Potential"}}$$

$$\mathbf{v}_R(\mathbf{r}) := \nabla \times \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}_{:=\beta(\mathbf{r}) \hat{=} \text{"Vektorpotential"}}$$

Man sieht leicht ein, dass \mathbf{v}_D rotationsfrei und \mathbf{v}_R divergenzfrei sind, denn es gilt:

$$\text{rot} \mathbf{v}_D = \nabla \times \mathbf{v}_D = \nabla \times \nabla \alpha = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \alpha = 0$$

$$\text{div} \mathbf{v}_R = \nabla \cdot \mathbf{v}_R = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \beta_k = \varepsilon_{kij} \partial_i \partial_j \beta_k = 0$$

Die Zerlegung beruht im Wesentlichen auf den speziellen Eigenschaften der Funktion $\frac{1}{r}$!
Wir definieren:

$$f(\mathbf{r}) := \Delta \frac{1}{r}, \quad r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

Und betrachten die speziellen Eigenschaften von f:

- Für $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ gilt $f(\mathbf{r}) = 0$, denn:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{r} &= \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) = \nabla \cdot \frac{1}{2(x^2 + y^2 + z^2)} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\partial_i \left(\frac{r_i}{r^3} \right) \\ &= - \left(\frac{\partial_i r_i}{r^3} + \frac{\left(-\frac{3}{2}\right) r_i 2r_i}{r^5} \right) = - \left(\frac{3r^2}{r^5} - \frac{\overbrace{3r_i r_i}^{=r^2}}{r^5} \right) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

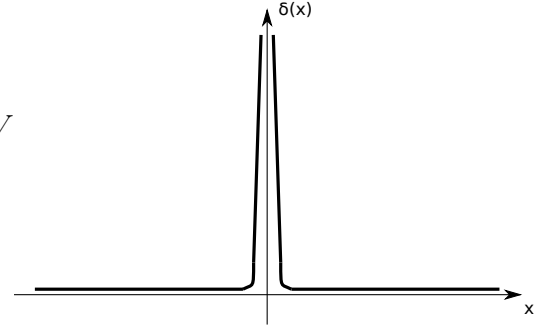
- Falls $\mathbf{0} \in V$ gilt: $\int_V f(\mathbf{r}) dV = -4\pi$. Wir zeigen dies für eine Kugel K im Ursprung:

$$\begin{aligned} \int_K f(\mathbf{r}) dV &= \int_V \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) dV \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{A=\partial K} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot d\mathbf{A} \\ &= \int \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dA = -\frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_V f(\mathbf{r}) = \begin{cases} -4\pi, & \text{falls } \mathbf{0} \in V \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies ist ein Beispiel fuer eine "Distribution" (\rightarrow Funktionalanalysis). Die "Delta-Funktion" ist ebenfalls eine solche und definiert durch:

$$\delta(\mathbf{r}) = 0, \text{ fuer } \mathbf{r} \neq \mathbf{0}, \quad \int_V \delta(\mathbf{r}) = 1, \text{ fuer } \mathbf{0} \in V$$



$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r}), \text{ wobei } -\frac{1}{4\pi r} \text{ die "Greensche Funktion" fuer die Laplace-Gleichung ist.}$$

Wir berechnen nun:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \int_V \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right)_i &= \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l \int_V \frac{v_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &\stackrel{*}{=} \underbrace{\frac{1}{4\pi} \partial_i \partial_j \int_V \frac{v_j(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \partial_i \partial_j \int_V \frac{v_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}_{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{1}{4\pi} \partial_i \int_V v_j(\mathbf{r}) \partial_j \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = -\frac{1}{4\pi} \partial_i \int_V \partial'_j \left(v_j(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - (\partial'_j v_j(\mathbf{r}')) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &\stackrel{\text{Gauss}}{=} -\frac{1}{4\pi} \oint_{A=\partial V} \frac{v_j(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA_j - \partial_i \alpha(\mathbf{r}) = -\partial_i \alpha(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$(2) = -\frac{1}{4\pi} \int_V v_i(\mathbf{r}') \underbrace{\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{=-4\pi \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} dV' = v_i(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned} * \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \\ \Rightarrow v_i(\mathbf{r}) &= \partial_i \alpha(\mathbf{r}) + A \end{aligned}$$

Bleibt noch zu zeigen: $A = \nabla \times \beta(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned}
4\pi\beta_i(\mathbf{r}) &= \left(\nabla \times \int_V \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \right)_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \int_V \frac{v_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' = -\varepsilon_{ijk} \int_V v_k(\mathbf{r}') \partial_j' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \\
&= -\varepsilon_{ijk} \int_V \partial_j \left(\frac{v_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) + \left(\partial_j' v_k(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dV' \\
&\stackrel{Gauss}{=} 0 + \left(\int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right)_i \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Damit ist die Konstruktion abgeschlossen. Wir muessen lediglich noch die Eindeutigkeit beweisen. Hierzu nehmen wir an, es existieren zwei Vektorfelder die unsere Forderungen erfullen und folgern dass diese gleich sein muessen. Seien also $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ zwei Vektorfelder mit

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{v}_1 &= \nabla \cdot \mathbf{v}_2, \quad \nabla \times \mathbf{v}_1 = \nabla \times \mathbf{v}_2 \\
\mathbf{D} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{v}_1 - \nabla \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{v}_1 - \nabla \times \mathbf{v}_2 = 0 \\
\stackrel{wirbelfrei}{\Rightarrow} \mathbf{D} &= \nabla\psi \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \Delta\psi = 0
\end{aligned}$$

ψ ist das zu \mathbf{D} gehoernde Potential. Insbesondere ist \mathbf{D} quellen- und wirbelfrei. Mit der 1. Greenschen Identitaet fuer $\phi = \psi$ folgt:

$$\begin{aligned}
\int_V \left[\underbrace{\psi \Delta\psi}_{=0} + (\nabla\psi)^2 \right] dV' &= \oint_{A=\partial V} \psi \nabla\psi \cdot d\mathbf{A} = 0 \\
\text{Im } \infty \text{ faellt alles ab} &\Rightarrow \int (\nabla\psi)^2 dV = 0 \Rightarrow \nabla\psi = 0 = \mathbf{D} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

□

Korollar.

- Ein wirbelfreies Vektorfeld ist ein Gradientenfeld
- Ein quellenfreies Vektorfeld ist ein Wirbelfeld
- Im allgemeinen Fall haben wir eine Ueberlagerung der Form:

$$\mathbf{v} = \nabla\alpha + \nabla \times \beta$$

- Wichtige Eigenschaften des skalaren Potentials:

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &= -\frac{1}{4\pi} \int \Delta \left(\frac{\nabla' \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dV' = -\frac{1}{4\pi} \int \nabla' \cdot \nabla' (-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')) dV' \\
&= \boxed{\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \Delta\alpha}
\end{aligned}$$

- Analog folgt fuer das Vektorpotential:

$$\boxed{\Delta\beta = -\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})}$$

1.3 Coulombgesetz und Feldgleichungen

Experimentelle Grundlagen:

- Die Coulombkraft ist eine Zentralkraft, die quadratisch mit dem Abstand abfaellt. Experimentell bestaetigt von 10^{-12}m bis $10^8\text{m} \hat{=} 20$ Groessenordnungen.
- Die Coulombkraft ist proportional zu den elektrischen Ladungen q_1 und q_2 . Gleichartige Ladungen stossen sich ab, gegengesetzte ziehen sich an (Im Gegensatz zur Gravitation!). $\Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = kq_1q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$
- Die Wechselwirkungsstaerke k haengt vom Masssystem (bzw. von der Einheit der Ladungen) ab.

Zwei Standardsysteme

- SI-System (oder MKSA): A (Ampere) fuer Stromstaerke ist die fundamentale Einheit. $1A = \frac{C}{s}$ mit C fuer Coulomb. Praktisch wird A definiert fuer die Stromstaerke in zwei parallelen Leitern mit Abstand 1m, die sich mit der Kraft $2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$ anziehen.
Elektronenladung:

$$\rho = 1,6 \cdot 10^{-19}C \qquad k \stackrel{*}{=} 10^{-7} \frac{Nc^2}{A^2} \stackrel{**}{\approx} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

* Magnetostatik, $c \hat{=} \text{Lichtgeschwindigkeit}$

** ϵ_0 Dielektrizitaetskonstante des Vakuums

In vielen Buechern: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1q_2}{r^2}$ (z.B. Nolting, typisch fuer Experimentalphysik)

- Gauss-System (oder CGS): Die Ladungseinheit wird so gewaehlt, dass $k = 1$. Ausserdem wird Laenge in cm und Kraft in $dyn = 10^{-5}N$ gemessen. Die Ladungseinheit heisst esu fuer *electrostatic unit* mit $esu = dyn^{1/2}cm = \frac{g^{1/2}cm^{3/2}}{s}$
Die Elektronenladung ist hier: $e = 4,8 \cdot 10^{-10}esu$, $esu = 3,3 \cdot 10^{-10}C$ (z.B. Fliessbach, typisch fuer theoretische Physik)

Vergleich zur Gravitation:

- Die Abstandsabhaengigkeit ist die Gleiche, allerdings ist diese bei der Gravitation deutlich schwaecher. Fuer ein Proton und ein Elektron im Abstand im Bohrradius $0,53\text{\AA}$ gilt:

$$F_C = 8 \cdot 10^{-8}N \qquad F_G = 4 \cdot 10^{-47}N$$

Dies entspricht einem Unterschied von 39 Groessenordnungen! Aber: auf grossen Skalen heben sich negative und positive elektrische Ladungen auf und die Gravitation dominiert!

- Elektrische Ladungen koennen sich gegenseitig schwaechen ("Abschirmung" oder "Screening").

Ab jetzt gelte: $k = 1$

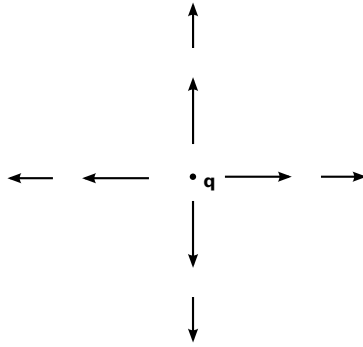
Experimentelle Beobachtung: Die Coulombkraft fuer mehrere Ladungen kann einfach aufsummiert werden (Superpositionsprinzip):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N qq_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} =: q\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad q \hat{=} \text{"Testladung"}$$

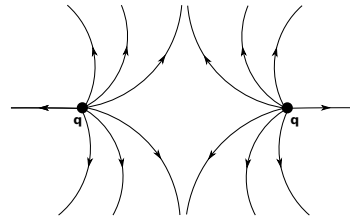
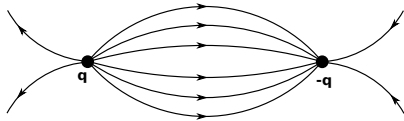
Hierbei entspricht \mathbf{E} der elektrischen Feldstaerke (auch elektrisches Feld oder E-Feld).

Beispiel.

- Punktladung



- Zwei Punktladungen



Typischerweise betrachtet man $N \gg 1 \Rightarrow$ Kontinuumsbeschreibung
Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}') = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$ auf einer Skala von 100\AA

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

Andere Richtung: $\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \underbrace{\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}_{\phi(\mathbf{r})}, \phi(\mathbf{r}) \hat{=} (\text{skal.}) \text{ elektr. Potential, bis auf } k \in \mathbb{R} \text{ eindeutig}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r})$$

\mathbf{E} ist ein Gradientenfeld, d.h. es gilt: $\text{rot}\mathbf{E} = 0$. Wir berechnen die Divergenz:

$$\text{div}\mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = -\Delta\phi = -\Delta \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = - \int \rho(\mathbf{r}') (-4\pi) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = 4\pi\rho(\mathbf{r})$$

Somit erhalten wir die **Feldgleichungen der Elektrostatik**, der Spezialfall der **Maxwell-Gleichungen** fuer $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ und $\partial_t \mathbf{E} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{E} &= \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \text{div}\mathbf{E} &= \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Oft ist es viel einfacher mit ϕ statt mit \mathbf{E} zu arbeiten (eine statt drei Komponenten).

Es gilt:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \boxed{\Delta\phi = -4\pi\rho}$$

Dies ist die **Grundgleichung der Elektrostatik ("Poisson-Gleichung")**. Sie ist eine in ϕ lineare, inhomogene, partielle Differentialgleichung 2. Ordnung. Im Prinzip ist die Lösung das Poisson-Integral:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Aber: meistens hat man Randwertprobleme. Feldgleichungen in integraler Form:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \Rightarrow I_A = \oint_{A=\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \stackrel{Gauss}{=} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV' = 4\pi \int_V \rho dV' = 4\pi Q$$

\Rightarrow **Gauss Gesetz:** Der Gesamtfluss eines Vektorfeldes \mathbf{E} durch eine geschlossene Fläche A ist gleich 4π mal der *eingeschlossenen Ladung* Q .

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} \stackrel{Stokes}{=} \oint_{C=\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0}$$

Linienintegrale sind wegunabhängig, es gibt keine geschlossenen Feldlinien.

Wir berechnen die **Energie des elektrostatischen Feldes**. Hierzu bewegen wir eine Testladung q von \mathbf{r}_1 nach \mathbf{r}_2 . Dafür muss Arbeit geleistet werden. Wir nehmen **hier** an, dass die Bewegung von q das elektrostatische Feld nicht verändert:

$$W_{12} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{r}_2 \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{12} = q [\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)]}$$

Die elektrostatische Arbeit entspricht genau der Potentialdifferenz (oder "Spannung" V). Für positives W_{12} wird Energie gespeichert, für negatives W_{12} wird Energie frei. Die Einheit von W ist J für Joule. $q\phi(\mathbf{r})$ ist die elektrostatische Energie der Ladung in einem gegebenen E-Feld. Eine bewegliche Ladung wird in Richtung der Feldlinien beschleunigt und ändert dabei ihre potentielle Energie. Falls sie sich sehr langsam bewegt (überdämpft, keine Masse), dann entsprechen ihre Trajektorien genau den Feldlinien. Eine Verschiebung entlang der Äquipotentiallinien ändert die Energie nicht und benötigt keine Arbeit.

Wir betrachten eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ im externen Feld $\phi_{ext}(\mathbf{r})$:

$$\boxed{W_{ext} = \int \rho(\mathbf{r}') \phi_{ext}(\mathbf{r}') dV'}$$

In Wirklichkeit haben wir aber meistens die Situation, dass das elektrische Feld durch die Ladungen selbst verursacht wird. Was ist die Energie der Ladungsverteilung in ihrem eigenen Feld? Wir bringen N Ladungen q_i sukzessiv vom Unendlichen an die Positionen \mathbf{r}_i :

$$W_{int} \stackrel{*}{=} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \stackrel{i \neq j}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

* Superposition der Coulombkraft und $i = 1$ kostet noch keine Energie.

Würde man im letzten Schritt $i = j$ zulassen, wäre der Term im Nenner 0! In anderen Worten: die Selbstenergie einer Ladung in ihrem eigenen Feld würde divergieren.

$$\xrightarrow{\text{Kontinuumslimes}} \boxed{\frac{1}{2} \int dV \int \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = W_{int}}$$

Dieses Integral ist wohldefiniert, da ρ stetig ist.

$$\begin{aligned} \Rightarrow W_{int} &= \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') dV' \stackrel{\text{Poisson}}{=} -\frac{1}{8\pi} \int (\Delta\phi) \phi dV' \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{8\pi} \int -\nabla\phi \cdot \nabla\phi dV' = \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dV' \hat{=} \text{"elektrostatische Energie"} \\ &\Rightarrow \boxed{\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2} \hat{=} \text{"elektrostatische Energiedichte"} \end{aligned}$$

Homogen geladene Kugel

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & \text{falls } r \leq R \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Feldgleichungen können auf drei Wegen gelöst werden:

1. Gauss-Gesetz

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' = \begin{cases} \frac{16\pi^2}{3} \rho_0 r^3 = 4\pi Q \frac{r^3}{R^3}, & \text{falls } r \leq R \\ \frac{16\pi^2}{3} \rho_0 R^3 = 4\pi Q, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wobei $Q = \int \rho(\mathbf{r}) dV' = \rho_0 \frac{4\pi R^3}{3}$ die Gesamtladung ist.

$$\Rightarrow E(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{R^3}, & \text{falls } r \leq R \\ \frac{Q}{r^2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Potential erhält man durch Integration ($\phi' = -E$):

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{R} \left(-\frac{r^2}{2R^2} + \frac{3}{2} \right), & \text{falls } r \leq R \\ \frac{Q}{R}, & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Poisson-Gleichung

In Kugelkoordinaten erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$-4\pi\rho(r) = \Delta\phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right)$$

$$r > R : \rho = 0 \Rightarrow \text{homogene GDGL } (r^2\phi')' = 0 \Rightarrow \phi = -\frac{c_1}{r} + c_2$$

$$r \leq R : \rho = \rho_0 \Rightarrow \text{inhomogene GDGL } (\rho^2\phi')' = 0 \Rightarrow \phi = -\frac{2\pi}{3}\rho_0 r^2 - \frac{c_3}{r} + c_4$$

Wir muessen nun allerdings noch die Integrationskonstanten bestimmen! Aus $\phi(\infty) = 0$ folgt $c_2 = 0$. Da wir keine Punktladung im Ursprung haben ist $\phi(0)$ endlich und somit $c_3 = 0$. Ferner hat sowohl $\rho(r)$ als auch $\Delta\phi$ ($r^2\phi'$)' einen Sprung bei $r = R$, ϕ und ϕ' muessen aber in $r = R$ stetig sein. Somit erhalten wir $c_1 = -Q$ und $c_4 = \frac{3Q}{2R}$ und erhalten die gleiche Loesung wie in (1)!

3. Integraldarstellung fuer ϕ

Wir legen \mathbf{r} in z-Richtung und nutzen die Rotationssymmetrie des Problems um die z-Achse aus. Sei also:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}, \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} r' \sin\theta \\ r' \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = r'^2 + r^2 - 2rr' \cos\theta$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 \frac{\rho_0}{(r'^2 + r^2 - 2rr' \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} d(\cos\theta) \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{r} \int_0^R dr' r' (|r + r'| - |r - r'|) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $\frac{2}{a}(b+ax)^{\frac{1}{2}}$ als Stammfunktion von $\frac{1}{(b+ax)^{\frac{1}{2}}}$ verwendet. Wir unterscheiden zwei Faelle:

$$r > R \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3r} = \frac{Q}{r}$$

$$r < R \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\rho_0}{r} \left(\int_0^r r'^2 dr' + \int_r^R rr' dr' \right) = \frac{Q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Was wieder das gleiche Ergebnis wie (1) und (2) liefert.

Weitere Beispiele

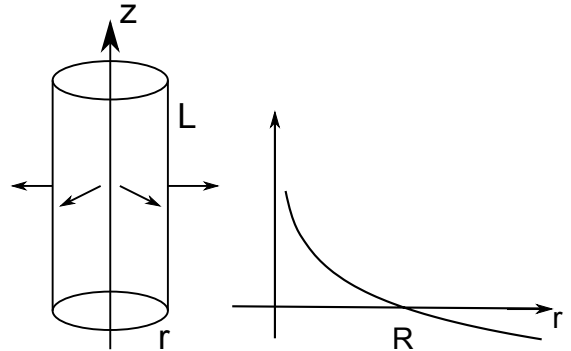
- **Geladene Linie:** Linienladungsdichte $\lambda = \frac{Q}{L}$, z.B. DNA: $\lambda = \frac{-2e}{3.4\text{\AA}}$. Aus dem Gauss-Gesetz folgt:

$$2\pi r L E(r) = 4\pi \lambda L$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{2\lambda}{r}$$

$$\Rightarrow \phi(r) = -2\lambda \ln\left(\frac{r}{R}\right) = -\lambda \ln\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

\Rightarrow divergiert fuer r klein!



- **Geladene Ebene:** Flaechenladungsdichte σ . Nach Gauss liefert nur der Deckel und Boden Beitrage:

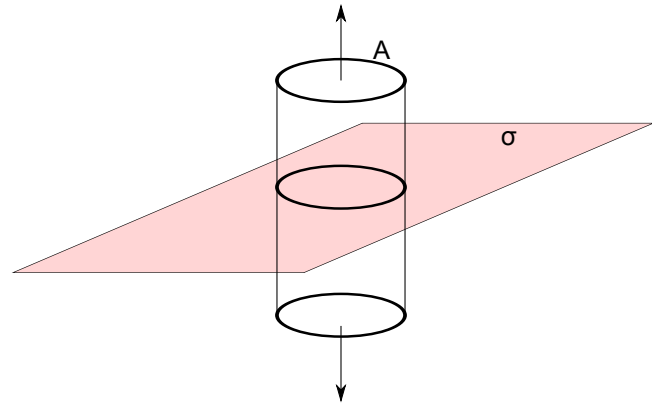
$$2AE_z = 4\pi\sigma A$$

$$\Rightarrow E_z = 2\pi\sigma$$

$$\Rightarrow \phi(z) = -2\pi\sigma z$$

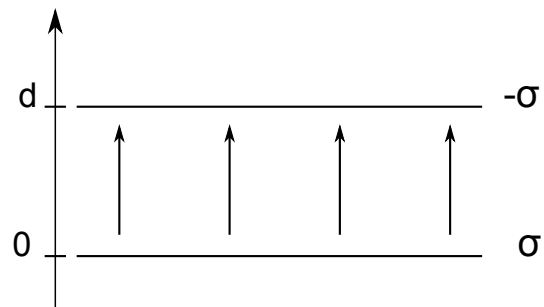
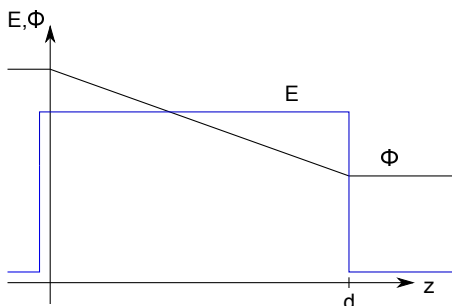
\Rightarrow Kraft unabhaengig vom Abstand.

Potential steigt linear an.



- **Plattenkondensator:** Zwei geladene Ebenen. Feldlinien parallel zwischen den Platten. Im Aussenraum heben sich die beiden Kraefte auf, im Innenraum hingegen addieren sich die beiden Kraefte zu $4\pi\sigma$. Fuer die Gesamtladung gilt: $Q_{ges} = Q - Q = 0$. C bezeichne die Kapazitaet des Kondensators. Die **Potentialdifferenz** entspricht der Spannung U :

$$\Delta\phi = U = 4\pi\sigma d = 4\pi\frac{Q}{A}d = 4\pi\frac{d}{A}Q = \frac{1}{C}Q$$

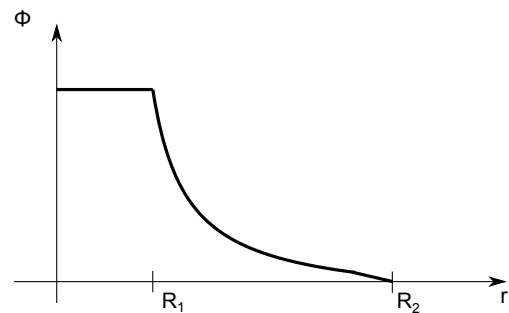
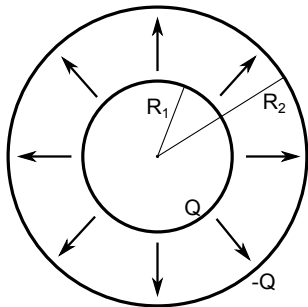


- **Kugelkondensator:** Zwei Kugelschalen mit Radien R_1 und R_2 , Ladungen Q und $-Q$. Kugelsymmetrie und Gauss liefern:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{falls } r < R_1 \\ \frac{Q}{r^2} & \text{falls } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{falls } r > R_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \begin{cases} Q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) & \text{falls } r < R_1 \\ Q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) & \text{falls } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{falls } r > R_2 \end{cases}$$

$$V = \phi(R_1) - \phi(R_2), \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

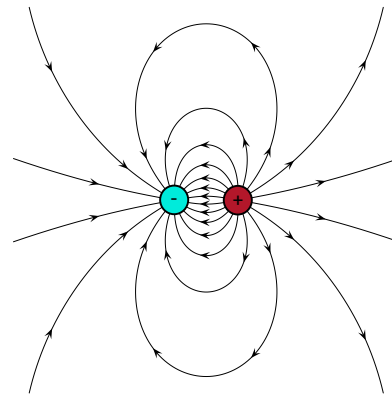
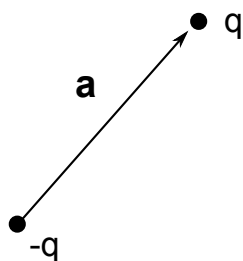


- **Dipol:** Zwei gleichgrosse, aber entgegengesetzte Ladungen sind durch einen Abstandsvektor \mathbf{a} getrennt. Eigentlich ist das Potential bekannt ($\phi(\mathbf{r}) = \frac{-q}{|\mathbf{r}|} + \frac{+q}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}$), wir interessieren uns aber fuer den Grenzfall $|\mathbf{a}| \ll |\mathbf{r}|$. Wir verwenden hierzu die multivariate Taylorentwicklung:

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial r_i}(\mathbf{a} = 0) a_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial r_j \partial r_i}(\mathbf{a} = 0) a_i a_j + \dots$$

$$= f(\mathbf{r}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) f(\mathbf{0}) + \frac{1}{2} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{0}) + \dots$$

Dipol: $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$



$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = \left((x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{-r_i}{r^3} \right) (-a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{-\delta_{ij}}{r^3} + \frac{3r_i r_j}{r^5} \right) (-a_i) (-a_j) + \dots \\
&\Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \frac{-q}{|\mathbf{r}|} + q \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})^2}{r^3} - \frac{\mathbf{a}^2}{r^3} \right) \right) \\
&= \frac{q\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^3} + O\left(\frac{\mathbf{a}^2}{r^3}\right) \xrightarrow{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{(q\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}}{r^3} \\
&\xrightarrow{q\mathbf{a} =: \mathbf{p}} \boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}}
\end{aligned}$$

Vergleiche mit $\phi \sim \frac{1}{r}$. Hier: $\phi \sim \frac{1}{r^2}$. Oberste Ordnung hat sich weggehoben. In Kugelkoordinaten gilt:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

Fuer $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r})$ gilt:

– Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
E_r &= -\partial_r \phi = \frac{2p \cos \theta}{r^3} \\
E_\theta &= -\frac{1}{r} \partial_\theta \phi = \frac{p \sin \theta}{r^3} \\
E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \phi = 0
\end{aligned}$$

– Kartesisch: $E_i = -\partial_i \phi = -\partial_i \left(\frac{r_j p_j}{r^3} \right) = -\left(\frac{\delta_{ij} p_j}{r^3} - \frac{3r_j p_j r_i}{r^5} \right)$

$\Rightarrow \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{p}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r}}{r^5} \right)$ Welche Kraft wirkt auf den Dipol in einem aeußeren Feld $\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r})$?

$$\mathbf{F} = -q\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{0}) + q\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{a}) \stackrel{Taylor}{\approx} -q\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{0}) + q(\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{0}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}))|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}}$$

Wenn $\mathbf{E}_{ext} \equiv const \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{0}$

Drehmoment um $\mathbf{0}$: $\mathbf{M} = -q(\mathbf{0} \times \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{0})) + q(\mathbf{a} \times \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{a})) = \mathbf{0} + q(\mathbf{a} \times \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{a}))$
 \Rightarrow bei $\mathbf{E}_{ext} \equiv const$ dreht sich der Dipol. \mathbf{M} verschwindet fuer $\mathbf{a} \parallel \mathbf{E}_{ext}$. Was ist die zugehoerige Energie? Welche Konfiguration ist sinnvoller ($\uparrow\uparrow$ oder $\uparrow\downarrow$)?

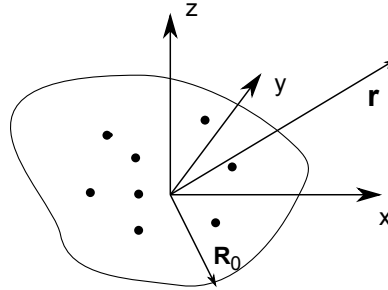
$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{ext} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext}) - \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}_{ext}) = -\nabla V \\
&\Rightarrow \boxed{V = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext}}
\end{aligned}$$

Die potentielle Energie eines Dipols im aeußeren Feld $\uparrow\uparrow$ ist somit guenstiger.

Kartesische Multipolentwicklungen

Wir betrachten eine beliebige Ladungsverteilung, die um den Ursprung lokalisiert ist. Es bezeichne Q die Gesamtladung, \mathbf{p} das Dipolmoment und Q_{ij} den Quadripoltenor (bzw. das Quadripolmoment). Fuer das Potential am Ort \mathbf{r} ergibt sich mit dem Poisson-Integral:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\phi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$



Entwicklung um $\frac{|\mathbf{r}'|}{R_0} \gg 1$ liefert:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \int \phi(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r} + \sum_i \left(\frac{-r_i}{r^3} \right) (-r'_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \underbrace{\left(\frac{3r_i r_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right)}_{=: R_{ij}} (-r'_i) (-r'_j) \right) + \dots dV' \\ &= \frac{1}{r} \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}') dV'}_{=Q} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV'}_{=\mathbf{p}} = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + ? + \dots \end{aligned}$$

Bemerkung: R_{ij} ist ein spurloser Tensor, d.h. $\sum_{i=1}^3 R_{ii} = 0 = \frac{3r^2}{r^5} - \frac{3}{r^3}$

Wir uebertragen jetzt die Eigenschaft "Spurlosigkeit" auf $r'_i r'_j$ (auch ein Tensor) und erhalten auf Grund der Spurlosigkeit von R_{ij} das gleiche Ergebnis:

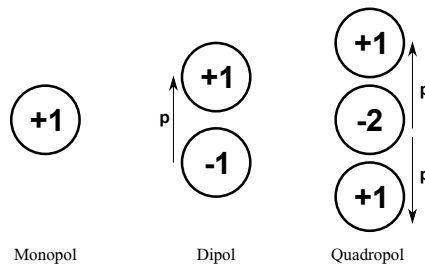
$$\frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}') \left(\sum_{i,j} R_{ij} \right) \left(r'_i r'_j - r'^2 \frac{\delta_{ij}}{3} \right) dV'$$

Deshalb koennen wir den isotropen Teil von R_{ij} weglassen. Es folgt:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}') \sum_{i,j} \left(\frac{3r_i r_j}{r^5} \right) \left(r'_i r'_j - r'^2 \frac{\delta_{ij}}{3} \right) dV' = \frac{1}{2} \frac{r_i r_j}{r^5} \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}') \left(3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij} \right) dV'}_{=: Q_{ij}} \\ \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} Q_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5} + \dots \end{aligned}$$

↪ Weit draussen sieht man eine Punktladung! Die Ausnahmen sind:

- $Q = 0 \Rightarrow$ Dipol dominiert
- $\mathbf{p} = \mathbf{0} \Rightarrow$ Quadripol dominiert



2 Randwertprobleme und Greensche Funktionen

Fuer eine gegebene Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ folgt das elektrostatische Potential $p(\mathbf{h})$ in im unbegrenzten Raum aus dem Poisson-Integral:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Fuer viele praktische Anwendungen muss man aber das Potential in einem Raumbereich berechnen, der durch Oberflaechen berandet ist, die ganz bestimmte elektrostatische Eigenschaften haben. Der Standardfall sind metallische Leiter, also z.B. eine Punktladung vor einer Metalplatte: In einem Metall gibt es frei bewegliche Elektronen \Rightarrow im Gleichgewicht muss im Metall gelten: $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\phi \equiv \text{const.}$ Wie sind die Gegebenheiten direkt an der Oberflaeche? Hier sammeln sich Ladungen mit einer Flaechenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ an. Wir legen einen flachen Quader um die Oberflaeche und erhalten mit dem Gauss-Gesetz:

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int \left(\underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2}_{\text{Deckel}} - \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1}_{\text{Boden}} \right) dA = 4\pi\sigma(\mathbf{r}) A$$
$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{n}(\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_1(\mathbf{r})) = 4\pi\sigma(\mathbf{r})}$$

Die Normalkomponente von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ macht an einer Oberflaeche mit Flaechenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ einen Sprung von $4\pi\sigma(\mathbf{r})$.