Definition 1.2.3a: Seien $(G, \oplus)$ und $(H, \odot)$ Gruppen mit ihren inneren Verknüpfungen. Ein Gruppenhomomorphismus ist eine Abbildung $\varphi : G \to H$ der Menge G auf die Menge H, die mit den Gruppenoperationen in dem Sinne verträglich ist, dass

$$\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \odot \varphi(b).$$

Wenn die Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist, dann spricht man dem Homomorphismus dieselben Eigenschaften zu. Bijektive Homomorphismen nennt man in der Regel Isomorphismen.

Bemerkung Homomorphismen werden oft dadurch versinnbildlicht, dass man die involvierten Abbildungen in ein Diagramm zusammenfasst:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\oplus"] \arrow[d, "\varphi"'] & G \arrow[d, "\varphi"] \\ H \times H \arrow[r, "\odot"] & H \end{tikzcd}$$

Die Eigenschaft von φ, Homomorphismus zu sein bedeutet hier, dass man im Diagramm zuerst nach rechts und dann nach unten, oder zuerst nach unten und dann nach rechts laufen kann, und doch immer dasselbe Ergebnis erhält. Man sagt: „das Diagramm kommutiert“. Beachten Sie, dass das φ links auf zwei Elemente angewandt wird.

Lemma 1.2.3b Ist $\varphi : (G, \oplus) \to (H, \odot)$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt

1. $\varphi(e_G) = e_H$
2. $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

Beweis: Für das neutrale Element gilt:

$$e_H \odot \varphi(e_G) = \varphi(e_G) = \varphi(e_G \oplus e_G) = \varphi(e_G) \odot \varphi(e_G),$$

woraus wegen der Eindeutigkeit des neutralen Elementes folgt, dass $e_H = \varphi(e_G)$. Ebenso gilt:

$$e_H = \varphi(e_G) = \varphi(a \oplus a^{-1}) = \varphi(a) \odot \varphi(a^{-1}),$$

woraus die Aussage widerum über die Eindeutigkeit des inversen Elementes folgt.

Definition 1.2.3c Der Kern eines Gruppenhomomorphismus ist das Urbild des neutralen Elements. Ausführlicher formuliert: sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und e_H das neutrale Element in H. Dann definieren wir:

$$\ker \varphi = \varphi^{-1}(e_H).$$

Satz 1.2.3d Ist $\varphi : (G, \oplus) \to (H, \odot)$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist $\ker \varphi$ eine Untergruppe von G.

Beweis: Zunächst gilt:

$$a, b \in \ker \varphi \Rightarrow \varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \odot \varphi(b) = e_H \odot e_H = e_H \to a \oplus b \in \ker \varphi,$$

die Menge $\ker \varphi$ ist also abgeschlossen unter der Gruppenoperation. Aus Lemma 1.2.3b folgt, dass das neutrale und das inverse Element zu $a \in \ker \varphi$ ebenfalls im Kern liegen.

Beispiel: Die Exponentialfunktion $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ mit $x \mapsto e^x$ ist ein Gruppen-Isomorphismus. Die Logarithmusfunktion ist ihre Inverse.

Beispiel: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{Z}_6, \oplus) &\to \mathfrak{S}_3 \\ n &\mapsto \sigma_{n+1} \end{aligned}$$

ist bijektiv, sie bildet das neutrale Element 0 auf das neutrale Element σ_1 ab, doch ist sie kein Gruppenisomorphismus, da zum Beispiel

$$1 + 1 = 2$$
$$\varphi(1) \circ \varphi(1) = \sigma_2 \circ \sigma_2 = \sigma_1 = \varphi(0)$$