Übungen zur Linearen Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat
Dr. Dörte Beigel
Philipp Siehr

Blatt 6
Abgabetermin: Freitag, 28.11.2014, 11 Uhr

Aufgabe 6.1 (**Vektorraum der Abbildungen** - *4 Punkte*)
Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und V ein Vektorraum über einem Körper K. Sei $\mathrm{Abb}(X, V)$ die Menge aller Abbildungen von X nach V. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(X, V)$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : \ & \mathrm{Abb}(X, V) \times \mathrm{Abb}(X, V) \to \mathrm{Abb}(X, V) \\ & (f, g) \mapsto (f + g), \ \text{mit } (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \ & K \times \mathrm{Abb}(X, V) \to \mathrm{Abb}(X, V) \\ & (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f, \ \text{mit } (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ein K-Vektorraum ist.
Hinweis: Bei dieser Aufgabe müssen sie viele Eigenschaften nachrechnen.

Aufgabe 6.2 (**Vektorraum der Polynome** - *3 Punkte*)
Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Ein reelles Polynom $p \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ von maximalem Grad n über dem Körper $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung der Form:

$$x \mapsto p(x),$$
$$\text{wobei} \qquad p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i,$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1 \dots n$ und einer Variablen $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}_n = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \text{ Polynom von maximalem Grad } n\}$ mit

$$\begin{aligned} + : \ & \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n \\ & (f, g) \mapsto (f + g), \ \text{mit } (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \ & \mathbb{R} \times \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n \\ & (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f, \ \text{mit } (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Bitte wenden

Aufgabe 6.3 (**Vektorräume** - *3 Punkte*)
Betrachten Sie die folgenden Mengen mit den Verknüpfungen „+“ und „·“ wie in den vorherigen Aufgaben.
Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit und begründen Sie Ihre Antworten kurz.

a) $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ hat nur endlich viele Nullstellen}\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) $B = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{Q}\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

c) $C = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{Q}\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

d) $D = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \cdot x = 1\ \forall x \in \mathbb{R}\}$
ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

e) $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

f) $F_c = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = c\}$ mit $c \in \mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Hinweis: Sie müssen bei keiner Teilaufgabe alle Vektorraum-Axiome, aber gegebenenfalls die Untervektorraum-Axiome, nachrechnen.

Aufgabe 6.4 (**Zeigen oder widerlegen** - *4 Punkte*)
Seien $l, m, n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_l \in K^m$ sowie $w_1, \ldots, w_l \in K^n$.
Für $i = 1, \ldots, l$ sei $u_i \in K^{m+n}$ der Vektor, der zuerst die Einträge von v_i und dann von w_i enthält:

$$u_i = (v_{i,1}, \ldots, v_{i,m}, w_{i,1}, \ldots, w_{i,n}).$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $(v_1, \ldots, v_l)$ ist linear unabhängig $\Rightarrow$ $(u_1, \ldots, u_l)$ ist linear unabhängig.

b) $(v_1, \ldots, v_l)$ ist linear abhängig $\Rightarrow$ $(u_1, \ldots, u_l)$ ist linear abhängig.

c) $(v_1, \ldots, v_l)$ ist ein Erzeugendensystem von K^m $\Rightarrow$ $(u_1, \ldots, u_l)$ ist ein Erzeugendensystem von K^{m+n}.

d) $(v_1, \ldots, v_l)$ ist kein Erzeugendensystem von K^m $\Rightarrow$ $(u_1, \ldots, u_l)$ ist kein Erzeugendensystem von K^{m+n}.