Übungen zur Linearen Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat
Dr. Dörte Beigel
Philipp Siehr

Blatt 2
Abgabetermin: Freitag, 31.10.2014, 11 Uhr

Aufgabe 2.1 (**Mengen** - *5 Punkte*)
Seien folgende Mengen definiert:

$$C = \{\emptyset\}, \qquad A = \{C\}, \qquad B = \{A, \emptyset\}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) $\emptyset \in A$	b) $\emptyset \subset A$	c) $\emptyset \in B$	d) $\emptyset \subset B$
e) $C \in A$	f) $C \subset A$	g) $C \in B$	h) $C \subset B$

Wieviele Elemente hat $A \cap B$ und wieviele $A \cup B$. Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2.2 (**Beweistechniken** - *2 Punkte*)
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen nicht für beliebige Mengen A, B, und C gelten:

a) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$.

b) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$.

Aufgabe 2.3 (**Abbildungen I** - *3 Punkte*)
Überprüfen Sie jede der folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $x \mapsto 5x + 7$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ mit $x \mapsto \begin{cases} 2x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

c) $f : M \to \{a\}$ mit $x \mapsto a$. Dabei sei $M \neq \emptyset$ beliebig. Treffen Sie die nötigen Fallunterscheidungen!

Bitte wenden

Aufgabe 2.4 (**Abbildungen II** - *3 Punkte*)
Seien A, B Mengen und $f : A \to B,\ g : B \to A$ Abbildungen mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Dabei ist $\mathrm{id}_A : A \to A, x \mapsto x$, die identische Abbildung auf A.

a) Zeigen Sie, dass dann f injektiv und g surjektiv ist.

b) Finden Sie ein Beispiel dafür, dass f nicht surjektiv sein muss und g nicht injektiv.

Aufgabe 2.5 (**Modulo als Abbildung** - *3 Punkte*)
Sei $m \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte Zahl. Jede Zahl $z \in \mathbb{Z}$ lässt sich mit Rest durch m teilen, wobei wir den Divisionsrest mit $r \in \mathbb{Z}$ bezeichnen. Mathematisch formuliert heißt das, dass es Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, \dots, m-1\}$ gibt, so dass

$$z = mk + r. \tag{2.1}$$

Nun definieren wir die „Modulo"-Abbildung, die einer ganzen Zahl z den Rest r bzgl. der Division durch m gemäß (2.1), zuordnet:

$$\begin{aligned} \mathrm{mod}_m : \mathbb{Z} &\to \{0, \dots, m-1\}, \\ z &\mapsto r. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Zahlen k und r dieser Division mit Rest bei gegebenem m und z eindeutig bestimmt sind.

b) Untersuchen Sie die Abbildung mod_m auf Bijektivität.