Mengenlehre (Bosch 1.1)

Intuitive Definition einer Menge: man kann genau sagen, was drin ist und was nicht. Was drin ist heißt Element der Menge.

Russellsche Antinomie: Sei X die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Gilt nun $X \in X$, so folgt nach der Definition von X, dass $X \notin X$, was umgekehrt $X \in X$ impliziert.

Wir verzichten hier auf den sehr technischen axiomatischen Aufbau der Mengenlehre, behalten das aber für die Zukunft als Problem im Auge. Betrachten wir zum Beispiel nur die Zahlenmengen aus der Schule, so genügt das durchaus: $\mathbb{N}\mathbb{Z}\mathbb{Q}\mathbb{R}$

Differenzmenge, Schnittmenge und Vereinigungsmenge durch logische Symbole

$$A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$$

$$A \cap B = \{x \in A | x \in B\} = \{x \in B | x \in A\} = \{x \in X | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \in X | x \in A \vee x \in B\}$$

Erweiterung auf Vereinigungen und Schnitte über Indexmengen.

Gleichheit von Mengen

Potenzmenge

Kartesisches Produkt

Definition 1.1.1: f: $X \to Y$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet, das wir dann f(x) nennen. Präziser: eine Abbildung von X nach Y ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $X \times Y$ mit der Eigenschaft, dass, wenn für zwei Elemente (x1,y1) und (x2,y2) gilt x1=x2, dann folgt y1=y2. X heißt Definitionsbereich von f, Y heißt Bild- oder Wertebereich.

Identische Abbildung idX

Gleichheit von Abbildungen

Komposition von Abbildungen

Bild f(M), M Teilmenge X

Urbild von N, N Teilmenge Y und von y Element Y

Definition 1.1.1a:

A. Eine Abbildung heißt injektiv (one-to-one), wenn aus $f(x)=f(y)$ folgt $x=y$, wenn also das Urbild eines Elements nur ein Element enthält.
B. Eine Abbildung heißt surjektiv (onto), wenn es zu jedem y aus Y ein x in X gibt mit $f(x)=y$
C. Eine Abbildung heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Injektiv, sujektiv, bijektiv

Lemma 1.1.1b: Das Bild einer Menge M mit n Elementen unter der Abbildung f hat höchstens n Elemente. Es hat genau n Elemente, wenn f injektiv ist. (Beweis durch Induktion)

Satz 1.1.1.c: Für eine Abbildung $f: M \to N$, wobei $\#M=m$ und $\#N=n$ gelten folgende Eigenschaften:

A. Wenn $m>n$, dann ist f nicht injektiv
B. Wenn $m<n$, dann ist f nicht surjektiv
C. Wenn $m=n$, dann gilt: f ist injektiv genau dann, wenn f surjektiv ist.

Beispiel einer bijektiven Abbildung von N0 nach Z

Bemerkung: Eine Menge M hat nicht endliche Kardinalität, wenn es eine injektive Abbildung von M auf eine echte Teilmenge von M gibt.

Satz 1.1.1d: Umkehrabbildung: Existenz und Eindeutigkeit