Aussagenlogik

Aber zuerst die Grundlage von allem, die Sprache. Die Sprache der Mathematik besteht aus Aussagen.
Eine Aussage ist ein Satz dem man eindeutig das Prädikat **wahr** oder **falsch** zu ordnen kann. Jede Feststellung der Mathematik ist eine Aussage (Matthäus 5,37). Sie ist entweder ein **Axiom** "Für den Operator ‘+’ gelte a+b=b+a" oder entsteht durch Verknüpfen von Aussagen, also **bewiesenen** Folgerungen.

Axiome kommen in der Mathematik in der Regel im Gewand von **Definitionen** vor. Diese führen einen neuen Begriff oder ein neues Symbol ein, für das dann die gelisteten Axiome gelten.

Definition: das logische "nicht", die Negation, gemäß der Wahrheitstabelle

A	¬ A
W	F
F	W

Definition: das logische "und": A∧B

B\A	W	F
W	W	F
F	F	F

Definition: das logische "oder” (inklusives oder): A∨B

B\A	W	F
W	W	W
F	W	F

Definition: Äquivalenz A ⇔ B, gesprochen “A äquivalent B” oder “B genau dann wenn A”

B\A	W	F
W	W	F
F	F	W

Beispiel: $x^3=8$ genau dann, wenn $x=2$

Definition: Implikation A ⇒ B, gesprochen “aus A folgt B”.

B\A	W	F
W	W	W
F	F	W

Merkregel: aus einer falschen Aussage folgt alles.

Beispiel: Aus $x=-1$ *folgt* $x^2=1$, aber nicht umgekehrt.

Benutzung von Äquivalenz und Implikation: wir schreiben A ⇔ B oder A ⇒ B in dem Sinne, dass die Aussage wahr ist. Damit weisen wir dem Term also keinen Wert zu, sondern machen eine Aussage über A und B.

Struktur mathematischer Texte

- Bestehen nur aus Aussagen
- Axiome und Definitionen
- Sätze: Satz, Lemma (Hilfssatz), Korollar (Nachsatz), etc.
  - Haben die Struktur von Implikationen
  - Liste von Voraussetzungen (Annahmen, “wenn”)
  - Folgerungen (“dann”)
  - Werden i.d.R. bewiesen oder sollten es zumindest
- Definitionen und Sätze werden gern numeriert, wichtige Aussagen benannt

Lemma 0.1: Für die logischen “und”- und “oder”-Operatoren gilt:

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$
$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

Beweis: Wahrheitstabelle
Bemerkung: Man nennt diese Eigenschaft Kommutativität

Lemma 0.2: Für die logischen “und”- und “oder”-Operatoren gilt:

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$
$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

Beweis: Wahrheitstabelle
Bemerkung: Diese Eigenschaft heißt Assoziativität. Wenn sie gilt, lässt man in der Regel die Klammern weg.

Lemma 0.3: Für die Verneinung der logischen “und”- und “oder”-Operatoren gilt:
$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$
$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$
Beweis: Wahrheitstabelle

Lemma 0.4: Für die logischen “und”- und “oder”-Operatoren gelten die “Distributivgesetze:
$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$
Beweis: Wahrheitstabelle

Lemma 0.5: Die Implikation $A \Rightarrow B$ lässt sich schreiben als $\neg A \vee B$.
Beweis: Wahrheitstabelle

Lemma 0.6: Transitivität der logischen Operatoren
Beispiel: Wenn der/die Studierende verschläft, kann er/sie nicht in die Vorlesung gehen. Wer nicht in die Vorlesung geht, verpasst die schönen Beispiele. “Kausalketten”

Lemma 0.7: Symmetrie der Äquivalenz, aber nicht der Implikation

Lemma 0.8: Es gilt die “Kontraposition”
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$
Beweis: Wahrheitstabelle

Die Aussage A heißt auch “hinreichende Bedingung für B”, während B “notwendige Bedingung für A” heißt.

Lemma 0.9: Zwischen Implikation und Äquivalenz gilt die Beziehung
$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$$