



Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:

banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS I ÜBUNGSAUFGABEN 6

DEADLINE: Fr. 28. 11. 2014, 16:00.

1. Bestimmen Sie den Grenzwert der konvergenten Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7 \cdot 3^{n+2}}{5^n}.$$

2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n (x - 3)^n ?$$

3. Ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{n^4 + 2n^3 + n^2}$$

konvergent oder divergent? Beweisen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie im Falle von Konvergenz den Grenzwert.

Hinweis: Es ist $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$; verwenden Sie die Technik der Teleskopreihen.

4. Sei P_0 ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1 in der Ebene. Auf jeder der 3 Seiten errichte über dem mittleren Drittel der Seite ein nach außen zeigendes gleichseitiges Dreieck, danach lösche die mittleren Drittel. Das so erhaltene Polygon P_1 hat also 12 Seiten der Seitenlänge $\frac{1}{3}$. Wende dieses Konstruktionsverfahren induktiv an, um Polygone P_2, P_3, \dots zu erhalten. (P_{n+1} entsteht also aus P_n , indem man für jede Seite von P_n über dem mittleren Drittel der Seite ein nach außen zeigendes gleichseitiges Dreieck errichtet und dann die mittleren Drittel entfernt.) Sei L_n die Gesamtlänge des Polygons P_n und A_n der Flächeninhalt, der von P_n umschlossen wird. Zeigen Sie, dass die Folge (L_n) divergiert, während die Folge (A_n) konvergiert. Bestimmen Sie $\lim A_n$. Die Kurve, die sich als Grenzkurve der P_n ergibt, hat also unendliche Länge, umschließt aber eine endliche Fläche! Diese Grenzkurve ist ein Beispiel eines sog. *Fraktals*.