



Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:
banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS I ÜBUNGSAUFGABEN 2

DEADLINE: Fr. 31. 10. 2014, 16:00.

1. Zeigen Sie: In einem angeordneten Körper hat die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung. Geben Sie genau an, an welchen Stellen Sie welches der Axiome (P1), (P2), (P3) verwenden.
2. Sei n eine positive ganze Zahl und x_1, x_2, \dots, x_n reelle Zahlen mit $x_i \geq 1$ für $i = 1, \dots, n$. Beweisen Sie, dass

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq \frac{2^n}{n+1} \left(1 + \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

Gelingt es Ihnen sogar einen Beweis zu finden, der ohne vollständige Induktion auskommt?

3. Wann genau besteht Gleichheit in der Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$? Beweisen Sie Ihre Antwort. Seien x, x_0, ϵ reelle Zahlen mit $\epsilon > 0$. Zeigen Sie, dass $|x - x_0| < \epsilon$ genau dann, wenn $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.
4. Beweisen Sie die Identität

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \sum_{j,k=1, k < j}^n (a_k b_j - a_j b_k)^2$$

für reelle Zahlen $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$.