Analysis I – Plenarübung

Übung 1:

Logische Grundbegriffe

Grundlage math. Argumentierens ist das Inbeziehungsetzen von Aussagen, die entweder wahr oder falsch sind.

Bsp.: „Es regnet" Ist eine Aussage
„Dieser Satz ist falsch" Ist keine Aussage

Aussagen können wir verneinen und durch Konjunktion ($\wedge$) und Disjunktion ($\vee$) in Beziehung setzen:

Seien A, B Aussagen. Dann bezeichnet

1. $\neg A$ die Verneinung der Aussage A, d.h. „nicht A"
2. $A \wedge B$ die Aussage „A und B"
3. $A \vee B$ die Aussage „A oder B" (im Sinne von und/oder)

Bem. Oft schreibt man kurz „A", wenn man sagen möchte, dass „A wahr ist" (Kontext)

Übung: • Drücken Sie die Verneinung $\neg(A \wedge B)$ durch Verwendung der Junktoren $\wedge, \vee, \neg$ auf eine andere Weise aus.

$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$

• $\neg(\neg A) = A$

Implikation: Seien wieder A, B Aussagen. Dann ist $(A \Rightarrow B)$ eine neue Aussage, definiert durch

$$(A \Rightarrow B) := (\neg A) \vee B$$

Definition (Äquivalenz von Aussagen):

$$(A \Leftrightarrow B) := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

Achtung: Es gilt $(A \Rightarrow B) = (\neg B \Rightarrow \neg A)$

ABER: $(A \Rightarrow B) \neq (\neg A \Rightarrow \neg B)$

$(A \Rightarrow B)$ ist wahr, wenn $(\neg A)$ wahr ist und B wahr ist. Dann ist aber A falsch und ebenso $\neg B$ falsch d. h. die Aussage $(\neg A \Rightarrow \neg B)$ ist falsch.

Ein mathematischer Satz ist häufig dergestalt, dass wir die Wahrheit einer Aussage $(A \Rightarrow B)$ behaupten. Um die Wahrheit, also den Satz zu beweisen, gibt es verschiedene Strategien:

1. Direkter Beweis: Benutze $[(A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)] \Rightarrow [A \Rightarrow B]$
   Nehme dann an: A ist wahr und folgere, dass B wahr ist
2. Indirekter Beweis: Nehme, zusätzlich zur Annahme „A ist wahr" an, dass „$(\neg B)$ wahr" ist und folgere daraus eine Aussage C, von der wir wissen, dass sie falsch ist.
3. Kontraposition: Beweise/folgere, dass aus $(\neg B)$ wahr folgt, dass $(\neg A)$ wahr ist.

Ana

Analysis I

15.10.14

1. Vorlesung

Einführung:

nichtlinear
stetig

Analysis:
Untersucht Veränderung einer Größe in Abhängigkeit von anderen Größen

Anwendungen
Physik
Chemie
Biologie
Ökonomie

math. Modellierung

lokale qualitative Information

Linearisierung („Ableitung")

Lineare Algebra
Lineare Veränderungen
z.B. $F(x,y) = ax + by$

„Hindernisse"

Analysis

Topologie / Geometrie
(Räume)

Analysis
endl. Mannigfaltigkeiten

Themen:

Grundlagen: Notation, Mengen, insbes. Zahlenmengen
Ungleichungen
Polynome und ihre Nullstellen
Komplexe Zahlen
Folgen, Konvergenz
Reihen, Potenzreihen (Konvergenzkriterien)
Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

Stetigkeit, Differenzierbarkeit
Ableitungsregeln
Riemann-Integral
Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung
Techniken

Mengen:

- endliche Mengen: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – Ordnung irrelevant – erlaubt: $x_i = x_j$ für $i \neq j$
  Bsp: $\{1,2\} = \{2,1\} = \{1,2,2\} = \{2,1,1\}$
- unendliche Mengen: z.B. Zahlenmengen

Lösung von Gleichungen:

$x + 1 = 0$ — Natürliche Zahlen $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\Rightarrow$ Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

$2x = 1$ — Rationale Zahlen $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

$x^2 = 2$ — Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ = Grenzwerte von rationalen Zahlen
= (unendliche) Dezimalbruchentwicklungen

Frage: Ist $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$?

Angenommen, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

o.B.d.A. $\text{ggT}(p,q) = 1$

$2 = \frac{p^2}{q^2}$, $2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ gerade $\Rightarrow p$ gerade

$p = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$ $\quad 2q^2 = 4n^2$, $q^2 = 2n^2$

$\Rightarrow q^2$ gerade $\Rightarrow q$ gerade, $q = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$

$p = 2n$, $q = 2m$: Widerspruch zu $\text{ggT}(p,q) = 1$

$\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ ist „irrational")

Dezimalbruchentwicklung: $\sqrt{2} = 1{,}4142\dots$

$\frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \dots$ „$\longrightarrow$" $\sqrt{2}$

Ana

2. Vorlesung

17.10.14

Leere Menge: $\emptyset$

Teilmengen: Sei B eine Menge

$A \subset B \;:\Longleftrightarrow\; \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B$

„für alle"

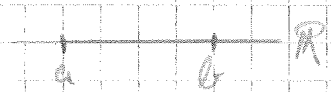
$(A \subset A)$ $(\emptyset \subset A)$

Bsp. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Hinweis: $A = B \Longleftrightarrow (A \subset B$ und $B \subset A)$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < a \leq b\}$

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Vereinigung: A, B Mengen

$A \cup B := \{x \mid x \in A$ oder $x \in B\}$

Verallgemeinerung: Familie von Mengen $\{A_i\}_{i \in I}$ (I ist die sog. „Indexmenge")

$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$

„es existiert"

Durchschnitt:

$A \cap B := \{x \mid x \in A$ und $x \in B\}$

Verallg.: $\{A_i\}_{i \in I}$

$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$

$I = \mathbb{N}$: $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i =: \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$

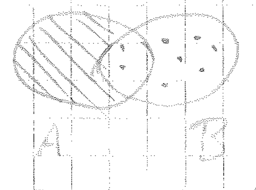
$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$

Bsp.: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right) = \{0\}$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$

$\bigcup_{n=2}^{\infty} [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] = (-1,1)$

Differenzen: $A - B := A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$



Produktmengen: A, B $\quad a, a' \in A$, $b, b' \in B$

geordnete Paare: $(a,b) = (a',b') :\Longleftrightarrow a = a'$ und $b = b'$

$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

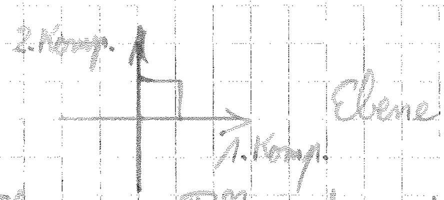
Bsp.: $\{a,b,c\} \times \{1,2\} = \{(a,1), (b,1), (c,1), (a,2), (b,2), (c,2)\}$ 6 Elemente

$3 \cdot 2 = 6$

$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$



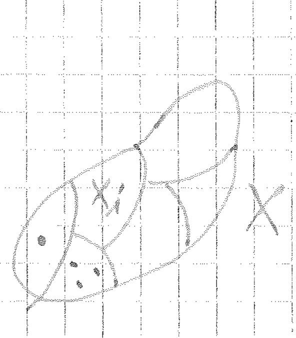
Elem. von $\mathbb{R}^n$ sind geordn. n-Tupel von reellen Zahlen

Partitionen: Eine Partition einer Menge X ist eine Familie $\{X_i\}_{i \in I}$ von Teilmengen $X_i \subset X$, sodass gilt:

$X_i \neq \emptyset \ \forall i \in I$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ für $i \neq j$, $\bigcup_{i \in I} X_i = X$

(X_i, X_j „disjunkt")

Relationen: $x, y \in X$



$x \sim y :\Longleftrightarrow \exists\, i \in I : x, y \in X_i$

Eigenschaften von $\sim$:

(1) Reflexivität: $x \sim x$

(2) Symmetrie: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

(3) Transitivität: $x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Wdh. Ist $\sim$ eine (binär) Relation auf X, dann heißt $\sim$ <u>Äquivalenzrelation</u>, wenn $\sim$ (1), (2), (3) erfüllt.

Sei nun $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X.

Äquivalenzklassen: $[x] := \{x' \in X \mid x' \sim x\} \subset X$

$$[x] = [y] \iff x \sim y$$

Das System der verschiedenen Äquivalenzklassen bildet eine Partition von X.

<u>Bsp.</u>: $\mathbb{Z} = \{\text{gerade}\} \cup \{\text{ungerade}\}$

$\mathbb{Z} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{3n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{3n+2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$n \sim m :\iff n - m \in 3\mathbb{Z} := \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Äqu.klassen: $[0], [1], [2] = [5]$

<u>Abbildungen</u>: Seien A, B Mengen

<u>Def.</u> Eine <u>Abbildung</u> f von A nach B ist eine Vorschrift, die jedem Element von A genau ein Element aus B zuordnet.

<u>Notation</u>: $f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array}$ $\quad f(a)$ heißt Bild von a unter f.

<u>Def.</u>: • A heißt <u>Definitionsbereich</u> von f

• B heißt Wertebereich von f

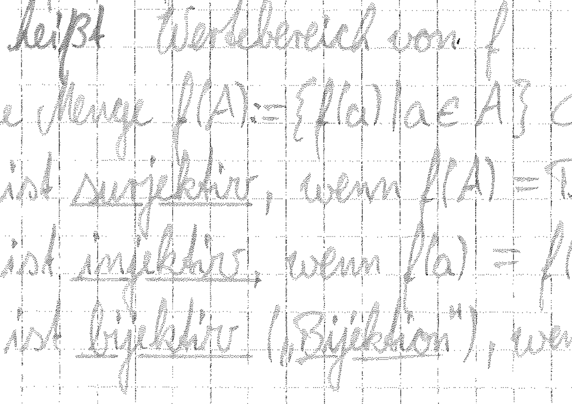
• Die Menge $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \subset B$ heißt <u>Bild von f</u>.

• f ist <u>surjektiv</u>, wenn $f(A) = B$

• f ist <u>injektiv</u>, wenn $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

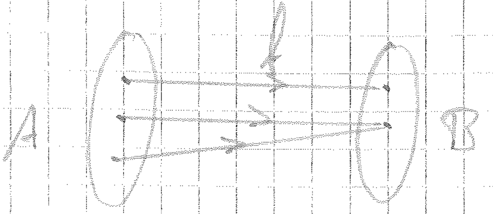
• f ist <u>bijektiv</u> („<u>Bijektion</u>"), wenn f surj. und inj. ist.

<u>Bsp.</u>:

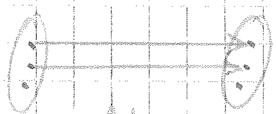


nicht surj.

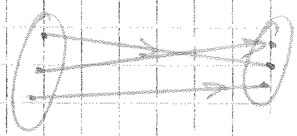
nicht inj.



surj. ✓
nicht inj.



nicht surj.
injektiv



surj.
& inj.
Bijektion

<u>Def.</u>: Zwei Mengen A, B heißen <u>gleichmächtig</u>, wenn $\exists$ Bijektion $f: A \to B$

A heißt <u>abzählbar</u>, wenn A endlich ist oder A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

<u>Satz</u>: Die Vereinigung einer abzählbaren Familie abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

<u>Bew.</u>: Familie: $X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots$ abzählbar

$\Rightarrow \exists$ Bijektionen: $f_i: \mathbb{N} \to X_i \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$\ldots$
$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$\ldots$
$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	$\ldots$
$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)$	$\ldots$

$g: \mathbb{N} \to \bigcup_{i=0} X_i$

$g(0) := f_0(0)$

$g(1) := f_0(1)$ (falls $\neq f_0(0)$)

$g(2) := f_1(0)$ (falls $\neq f_0(0) \neq g(1)$)

Ana

$g(3) := f_2(0)$

$\vdots$

$\Longrightarrow$ g ist surjektiv f injektiv

<u>Korollar</u>: $\mathbb{Q}$ ist <u>abzählbar</u> Bew.: $X_i := \{\frac{i}{q} \mid i \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

<u>3. Vorlesung</u>

22.10.14

Letztes Mal: Abbildungen $f: X \longrightarrow Y$

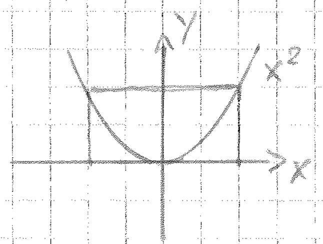
Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

$f: X \longrightarrow Y$ $A \subset X$

Bild von A: $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \subset Y$

$B \subset Y$ <u>Urbild</u> von B: $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$

<u>Bsp.</u>: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$



Nicht surjektiv, nicht injektiv

$(-1 \neq x^2, x \in \mathbb{R})$ $(-2)^2 = 4 = (+2)^2$

<u>Def.</u>: $g: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $g(x) = x^2$

Hier ist $[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ (a,∞)

$(-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ $(-\infty,a)$

g ist surjektiv, injektiv $\Longrightarrow$ g Bijektion

<u>Def.</u>: Der <u>Graph</u> einer Abb. $f: X \longrightarrow Y$ ist die Menge

$\text{Graph}(f) := \{(x,f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\} \subset X \times Y$

<u>Zusammensetzung</u> (Komposition, Hintereinanderausführung) von Abbildungen:

$X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$

Für $x \in X$: $(g \circ f)(x) := g(f(x)) \in Z$

Wir erhalten $g \circ f: X \longrightarrow Z$

Es gilt, mit $Z \xrightarrow{h} A$,
$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f : X \to A$, d.h. $\circ$ ist assoziativ

Def.: Die Identitätsabbildung $id_X : X \to X$
ist die Abb. $id_X(x) = x$, $\forall x \in X$
$id_Y \circ f = f$, $g \circ id_Y = g$

Achtung: Es gilt i.A. nicht $g\circ f = f \circ g$!
z.B. $f(x) = x^2$, $g(x) = x+1$
$$\left.\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(x^2) = x^2+1\\ (f\circ g)(x) &= f(x+1) = (x+1)^2\end{aligned}\right\}\neq$$

Umkehrabbildung:
Sei $f: X \to Y$ eine Bijektion
$y \in Y$ $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$
Wir setzen $f^{-1}(y) := x$
Wir erhalten eine Abb. $f^{-1}: Y \to X$, die sog.
Umkehrabb. (inverse Abb.) zu f.
f^{-1} ist wieder eine Bijektion.
Da $f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(y)) = y$,
gilt $f^{-1}\circ f = id_X$, $f\circ f^{-1} = id_Y$
Bsp.: $g: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $g(x) = x^2$, ist eine Bijektion,
und hat daher eine eindeutige Umkehrabb. $g^{-1}: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $y \in [0,\infty)$
$\sqrt{y} := g^{-1}(y)$

Def.: Eine Menge ist überabzählbar, wenn sie nicht
abzählbar ist

Satz (Cantor): $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Bew.: Wir zeigen sogar, dass $[0,1) \subset \mathbb{R}$ überabzählbar ist.

Anm. Widerspruchsbeweis: Annahme: $[0,1)$ ist abzählbar

$[0,1) = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. Dezimalbruchentwicklungen:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0{,}x_{00}\,x_{01}\,x_{02}\,x_{03}\ldots \\ x_1 = 0{,}x_{10}\,x_{11}\,x_{12}\,x_{13}\ldots \\ x_2 = 0{,}x_{20}\,x_{21}\,x_{22}\,x_{23}\ldots \\ \vdots \end{array}\right\}$$

Wir dürfen o.B.d.A annehmen, dass $\forall i$: unendlich viele $x_{ij} \neq 9$

$(x_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}.)$

Wir definieren $y \in \mathbb{R}$ durch:

$y = 0{,}y_0\,y_1\,y_2\ldots$, wobei

$$y_i := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x_{ii} = 0 \\ 0, & \text{wenn } x_{ii} \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y \in [0,1)$ und $y \neq x_0, y \neq x_1, \ldots$

$y \notin \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} = [0,1)$,

ein Widerspruch.

Def.: Eine Menge X hat die Mächtigkeit des Kontinuums, wenn es eine Bijektion $\mathbb{R} \longrightarrow X$ gibt.

Kontinuums-Hypothese: Jede überabzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

Gödel, Cohen: Die KH kann nicht aus den üblichen Axiomen (Zermelo-Fraenkel) der Mengenlehre bewiesen werden. Auch die Verneinung der KH kann nicht bewiesen werden.

Körper

Def.: Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \cdot)$ wobei G eine Menge ist und $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ eine Abb.,

$(g, h) \longmapsto g \cdot h$

sodass: (1) Assoziativität: $\forall g, h, k \in G: (g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$

(2) $\exists$ Element $e \in G$: $g \cdot e = g = e \cdot g \quad \forall g \in G$

(3) $\forall g \in G \ \exists g^{-1} \in G: g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g$

Wir nennen e das <u>neutrale</u> Element.

g^{-1} das <u>Inverse</u> zu g

e ist eindeutig: Wäre $\bar{e}$ auch ein neutrales El., dann

$$\bar{e} = e \cdot \bar{e} = e$$

$$\bar{\bar{g}} = e \cdot \bar{\bar{g}} = \underbrace{\bar{g} \cdot g}_{} \cdot \bar{\bar{g}} = \bar{g} \cdot e = \bar{g} \implies g^{-1} \text{ ist eindeutig}$$

Inverse zu g

<u>Bsp.</u>: - $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe, $e = 0 \quad n + (-n) = 0 = e$

- $(\mathbb{N}, +)$ ist <u>keine</u> Gruppe (keine Inversen!)

- Sei X eine Menge.

$\mathrm{Sym}(X) := \{f: X \to X \mid f \text{ Bijektion}\}$

$(\mathrm{Sym}(X), \circ)$ ist eine Gruppe, $e = id_X$, $f^{-1} \circ f = id_X = e$

i.a. nicht abelsch

<u>Def.</u>: $(G, \cdot)$ ist <u>abelsch</u>, wenn $g \cdot h = h \cdot g \quad \forall g, h \in G$

<u>Def.</u>: Ein <u>Körper</u> ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$, wobei:

(1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(wir schreiben $0 := e$)

(2) $\cdot$ ist eine Abb. $\cdot: K \times K \to K$, die sich einschränken lässt auf $\cdot: K^* \times K^* \to K^* := K - \{0\}$, sodass $(K^*, \cdot)$ eine abelsche Gruppe bildet; (Wir schreiben 1 für das neutrale El.)

(3) Die <u>Distributivgesetze</u> gelten:

$\forall a, b, c \in K: a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

$0 \neq 1 \qquad -a :=$ Inv. El. zu a in $(K, +)$

$(a + (-a) = 0)$

$a^{-1} :=$ Inv. El. zu a in $(K^*, \cdot)$

10 $\qquad a - b = a + (-b) \qquad \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \ (b \neq 0)$

Bsp.: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper
Später werden wir auch den Körper der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ diskutieren.

4. Vorlesung: 24.10.14

Angeordnete Körper

Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen besitzt eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}$, die „positiven" Zahlen, sodass gilt:

(P1) $\forall x \in \mathbb{R}$: Genau eine der folgenden 3 Aussagen gilt:
$$x \in P \text{ oder } x = 0 \text{ oder } -x \in P$$

(P2) $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$

(P3) $x, y \in P \Rightarrow x \cdot y \in P$

Def.: Ein angeordneter Körper ist ein Paar (K, P), wobei K ein Körper ist und $P \subset K$ eine Teilmenge, für die (P1)–(P3) gelten.

Man kann dann definieren: $x, y \in K$.

$x > y :\Leftrightarrow x - y \in P$

$x < y :\Leftrightarrow y > x$

Formelle Konsequenzen:

- Transitivität: $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$

  Bew.: $y - x \in P$, $z - y \in P$
  $$(P2) \Rightarrow (y-x) + (z-y) \in P$$
  $$= z - x$$
  $$\Rightarrow z > x$$

- Ist $x < y$ und $a \neq 0$, dann gilt
$$\begin{cases} ax < ay, & \text{falls } a > 0 \\ ax > ay, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Bew.:
$$(P1)\begin{cases} a\in P : & \text{①} \\ \text{oder} & \\ -a\in P : & \text{②}\end{cases}$$

① $y-x\in P \overset{(P3)}{\Longrightarrow} a\cdot(y-x)\in P$
$$= ay-ax$$
$$\Longrightarrow ay > ax$$

② $\overset{(P3)}{\Longrightarrow} -ay+ax = (-a)(y-x)\in P$
$$\Longrightarrow ax > ay$$

• $x\neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$

Bew.: $\begin{cases} x\in P: \; x\cdot x\in P \quad (P3) \\ \text{oder} \\ -x\in P: \; (-x)\cdot(-x)\in P \quad , x^2=(-x)\cdot(-x)\end{cases}$

Der Absolutbetrag

$x\in\mathbb{R}$
$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x\geq 0 \\ -x, & \text{falls } x<0\end{cases}$$

$|x|\geq 0$, $|-x|=|x|$, $|x|=0 \Longleftrightarrow x=0$,

$|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$, $|x+y|\leq |x|+|y|$ (Dreiecksungleichung)

Prop.: $|x-y| \geq |x|-|y|$

Bew.: $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y|+\underline{|y|} \Longrightarrow |x|-|y|\leq |x-y|$

Bem.: $|x-y| = |y-x| \overset{\text{Prop.}}{\geq} |y|-|x|$

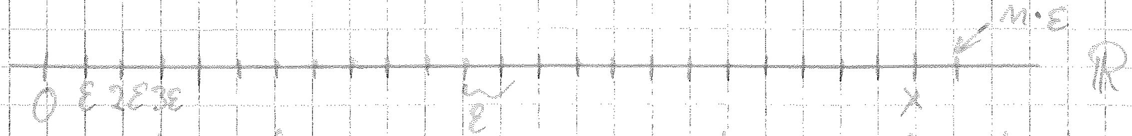
$\Longrightarrow |x-y| \geq \max(|x|-|y|, |y|-|x|) = ||x|-|y||$

$$(\max(a,b) := \begin{cases} a, & a\geq b \\ b, & \text{sonst. } a<b\end{cases}$$

$$|x+y| = |x-(-y)| \geq ||x|-|-y|| = ||x|-|y||.$$

Das Archimedische Axiom

$\forall x>0 \; \forall \varepsilon>0 \; (x,\varepsilon\in\mathbb{R}): \exists n\in\mathbb{N}$, sodass $n\cdot\varepsilon > x$



Dieses Axiom kann in jedem angeordneten Körper formuliert werden, gilt aber nicht unbedingt!

Bsp.: $K := \{ \frac{p}{q} \mid p, q$ reelle Polynome, $q \neq 0 \}$ Variable

$p = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_m \neq 0$ falls $p \neq 0$

$q = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$, $b_m \neq 0$

$P := \{ \frac{p}{q} \mid p \neq 0, \frac{a_m}{b_m} > 0 \} \Longrightarrow (K, P)$ ist ein angeordneter Körper

Das Archimed. Axiom gilt nicht in (K, P):

$a \in \mathbb{R}: \quad x - a > 0$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}: \quad x - n \cdot \varepsilon > 0$

$n \cdot \varepsilon < x$

Zurück zu $\mathbb{R}$: Anwendung in der Analysis: $x = 1$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}: n \cdot \varepsilon > 1, \ \frac{1}{n} < \varepsilon$

Wichtige Ungleichungen

Das Beweisprinzip der (vollständigen) Induktion

Seien $A(n)$ Aussagen, die von natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ abhängen.

$$\forall A: (\underbrace{A(0)}_{\text{Induktionsanfang}} \text{ und } (\forall n \in \mathbb{N}: \overbrace{A(n)}^{\text{Induktionsannahme}} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Induktionsschritt}} A(n+1))) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}: A(n))$$

Die Bernoullische Ungleichung

Prop.: Sei $x \geq -1$ $\quad (1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bew.: Wir verwenden Induktion nach n

$n = 0$: $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0$ ✓

Induktionsannahme: Es gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Zu zeigen ist: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

(z.z.)

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n \geq (1+x)\cdot(1+nx)$$
$$= 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$
$$\geq 1+(n+1)x$$

$$\overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}: (1+x)^n \geq 1+nx$$

Arithmetisches & Geometrisches Mittel

$x, y \geq 0 \qquad A = \frac{1}{2}(x+y), \quad G = \sqrt{xy} = (xy)^{\frac{1}{2}}$

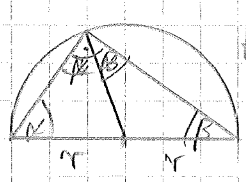
Prop.: $G \leq A$

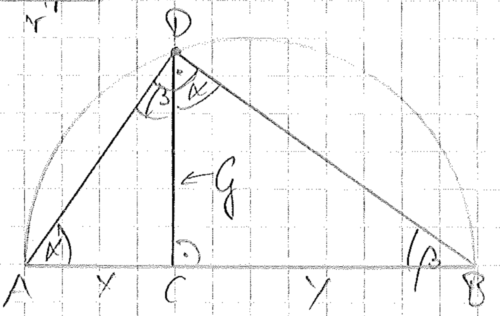
Bew.: $G, A \geq 0$. Also $G \leq A \Longleftrightarrow G^2 \leq A^2$

$$xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2 \Longleftrightarrow 4xy \leq x^2+2xy+y^2$$
$$\Longleftrightarrow \underbrace{x^2-2xy+y^2}_{(x-y)^2} \geq 0$$

Geometrischer Beweis:

Satz von Thales:





$\Rightarrow$ Die Dreiecke ACD und DCB sind ähnlich.

$$\frac{\overline{CD}}{x} = \frac{y}{\overline{CD}}, \quad \overline{CD}^2 = xy, \quad \overline{CD} = G \text{ (geometr. Mittel)}$$

$$\overline{CD} \leq \text{Radius} = \frac{1}{2}(x+y) = A \text{ (arithmet. Mittel)}$$

(Anal)

<u>Allgemeiner</u>: $x_1, \dots, x_n \geq 0$

$A_n := \frac{1}{n}\underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}$

Schreibweise: $=: \sum_{i=1}^{n} x_i$

Sei g die Umkehrabb. der Bijektion $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $(n \in \mathbb{N}-\{0\})$

Wir schreiben $\sqrt[n]{y} := y^{\frac{1}{n}} := g(y)$; $f(x) = x^n$

$G_n := \underbrace{(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n)}^{\frac{1}{n}}$

Schreibweise: $=: \prod_{i=1}^{n} x_i$

<u>Prop.</u>: $G_n \leq A_n$

<u>5. Vorlesung</u>: 29.10.14

$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

<u>Arithmet. Mittel</u>: $A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ $\quad G_2 \leq A_2$ ✓

<u>Geom. Mittel</u>: $G_n = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$

<u>Prop.</u>: $G_n \leq A_n$

<u>Beweis</u>: Ist $X \subset \mathbb{R}$ eine endliche Menge, dann bezeichnet max X die größte der Zahlen in X

min X kleinste — " —

- <u>Fall 1</u> $x_1 = x_2 = \dots = x_n$: $G_n = (x_i^n)^{\frac{1}{n}} = x_i = \frac{1}{n}(n x_i) = A_n$ ✓
- <u>Fall 2</u> $\exists i, j,\ x_i \neq x_j$: $x_m := \min\{x_1, \dots, x_n\}$, $x_M := \max\{x_1, \dots, x_n\}$

Ersetze sowohl x_m als auch x_M $(x_m < x_M)$ durch

$\frac{1}{2}(x_m + x_M)$

Das arithm. Mittel (geom. Mittel) der so erhaltenen Zahlen sei $A_n^{(1)}$ $(G_n^{(1)})$

$A_n^{(1)} = A_n$

$(G_n^{(1)})^n = \frac{1}{4}(x_m + x_M)^2 \cdot \prod(\text{restliche } x_i) \geq x_m \cdot x_M \prod(\text{restl. } x_i)$

$= (G_n)^n$ $\qquad$ da $G_2 \leq A_2$

$G_n^{(1)} \geq G_n$

Sind nicht alle der Faktoren gleich, so wenden wir wieder obige Ersetzung an und erhalten

$G_n^{(2)}, A_n^{(2)}$. $\quad G_n^{(1)} \le G_n^{(2)} = A_n^{(2)} = A_n^{(1)}$

$\vdots$

Nach endlich vielen Schritten sind alle Faktoren gleich, und somit (nach Fall 1) $G_n^{(k)} = A_n^{(k)}$

$$G_n \le G_n^{(1)} \le G_n^{(2)} \le \ldots \le G_n^{(k)} = A_n^{(k)} = \ldots = A_n^{(2)} = A_n^{(1)} = A_n$$

Wir betrachten $a_n := (1+\frac{1}{n})^n,\ n \ge 1$

Fakultät: Frage: Wie viele Anordnungen von k Objekten gibt es?

$\{1, 2, \ldots, k\}$

$$\underbrace{\underset{k}{\square}\ \overset{k-1}{\square}\ \overset{k-2}{\square} \ldots\ldots}_{k \text{ Plätze}}$$

Sei X eine Menge mit k Elementen
$\{f: X \to X \mid f \text{ bij}\}$ hat $k!$ Elemente
„Permutationen"

$$k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\ldots 2\cdot 1 =: k! \quad (k \in \mathbb{N}-\{0\})$$

$$0! = 1$$

Frage: Wie viele k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen gibt es?

$\{1, 2, \ldots, n\}$ $\quad \binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

„n über k"

$$\underbrace{\square \ -\ldots-\ \square}_{k \text{ Plätze}}$$

Binomischer Lehrsatz:

$$\underbrace{(x+y)}_{\text{Binom}}{}^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{„Binomialkoeffizient"}} x^k y^{n-k}$$

Pascalsches Dreieck:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Ana

<u>Bsp.:</u>

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Zurück zu den a_n:

<u>Behauptung:</u> $a_n < a_{n+1}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}_{>0} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n+1}$$

$$1-\frac{2}{n} < 1-\frac{2}{n+1}$$

Obiges Argument zeigt auch, dass

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \le 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2\cdot\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Für $k \geq 2$: $k! = 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k \geq 2^{k-1}$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

(Endliche) geometrische Reihen: Sei $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$s := 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

$$x s = \quad x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1}$$

$$(1-x)s = s - xs = 1 - x^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad s = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

<u>Zusammenfassung:</u>

$$\boxed{1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\text{geom. Reihe}} = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1+2\underbrace{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}_{<1} < 3 \text{ für alle } n$$

<u>Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz</u>

<u>Prop.</u>: $\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \leq \left(\sum x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$

<u>Bew.</u>: $X := \left(\sum x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $Y := \left(\sum y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Ist $X=0$, dann $x_k = 0 \,\forall\, k$ und somit $\sum|x_k y_k| = 0$.

Die Ungleichung stimmt.

Ähnlich für $Y=0$

Sei nun $X, Y > 0$ $\quad \xi_k := \frac{|x_k|}{X}$, $\eta_k := \frac{|y_k|}{Y}$

$$\sum \xi_k^2 = \sum \frac{x_k^2}{X^2} = \frac{1}{X^2}\sum x_k^2 = 1$$

Analog $\sum \eta_k^2 = 1$

$$\sum \xi_k \eta_k = \sum \underbrace{\left(\xi_k^2 \eta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{G_2} \leq \sum \underbrace{\frac{1}{2}\left(\xi_k^2+\eta_k^2\right)}_{A_2} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$\Longrightarrow \sum \frac{|x_k y_k|}{X\cdot Y} = \frac{1}{X\cdot Y}\sum |x_k y_k| \leq 1$$

<u>Die Minkowskische Ungleichung</u>

<u>Prop.</u>: $\left(\sum (a_k+b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$

<u>Bew.</u>: $\sum (a_k+b_k)^2 = \sum |a_k+b_k|\cdot\underbrace{|a_k+b_k|}_{\leq |a_k|+|b_k|}$

$$\leq \sum |a_k+b_k||a_k| + \sum |a_k+b_k|\cdot|b_k|$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\sum (a_k+b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum (a_k+b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum (a_k+b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\left(\sum a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Ana

31.10.14

6. Vorlesung:

$G_n \leq A_n$ Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x = \frac{y}{n}$

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \geq 1+y$$

Induktiv nach n: $G_2 \leq A_2$ Ind. Anf. $G_n \leq A_n$

Zu zeigen: $G_{n+1} \leq A_{n+1}$. o.B.d.A. sei x_{n+1} das größte El. von $x_1, \ldots, x_{n+1}$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{(x_1+\ldots+x_n)+x_{n+1}}{(n+1)\cdot A_n} = \frac{n\cdot A_n + x_{n+1}}{(n+1) A_n} = \frac{(n+1)\cdot A_n + (x_{n+1}-A_n)}{(n+1)\cdot A_n}$$

$$= 1 + \frac{\overbrace{x_{n+1}-A_n}^{\geq 0}}{(n+1)\cdot A_n}$$

$$\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x_{n+1}-A_n}{(n+1)\cdot A_n}\right)^{n+1} \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + \frac{x_{n+1}-A_n}{A_n} = \frac{x_{n+1}}{A_n}$$

Multipliziere mit A_n^{n+1}: $A_{n+1}^{n+1} \geq x_{n+1} A_n^n \geq x_{n+1} G_n^n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}$

$$\Rightarrow A_{n+1} \geq (x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} = G_{n+1}$$

Die komplexen Zahlen

Problem: In $\mathbb{R}$ hat die Gleichung $\underbrace{\underbrace{x^2}_{\geq 0}+1}_{\geq 1}=0$ keine Lösung

Frage: $\exists$ Körper K, $\mathbb{R} \subset K$, sodass $x^2+1=0$ in K lösbar ist?

Wir wollen auf der Menge $\mathbb{R}^2$ Operationen $+$ und $\cdot$ einführen, sodass $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper wird.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

Addition: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1+x_2, y_1+y_2)$

Multiplikation: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$

Eigenschaften: $+$ ist kommutativ, $\cdot$ ist kommutativ

$(0,0) + (x,y) = (x,y) \Rightarrow (0,0) =: 0$ verhält sich als Nullelement

$(1,0)\cdot(x,y) = (1\cdot x - 0\cdot y,\ 1\cdot y + 0\cdot x) = (x,y)$

$\Longrightarrow (1,0) =: 1$ ist das Eins-Elem. von $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$

<u>Inverse El.</u>: $(-x,-y) + (x,y) = (0,0) = 0$

<u>Beh.</u>: $(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ (für $(x,y) \neq (0,0)$)

$$(x,y)\cdot(x,y)^{-1} = (x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy+xy}{x^2+y^2}\right) = (1,0) = 1$$

Es gelten auch die Assoziativ- und Distributivgesetze

$\Longrightarrow$ $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ist ein Körper. Wir nennen diesen Körper den Körper der <u>komplexen Zahlen</u>, $\mathbb{C}$.

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \\ \ \ \rotatebox{90}{$\in$} \\ x \longmapsto (x,0) \end{array}$$

Schreibweise $i := (0,1)$ „<u>imaginäre Einheit</u>"

$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$

$\Longrightarrow$ Die Gleichung $x^2+1=0$ ist in $\mathbb{C}$ lösbar, $x = i$ ist eine mögliche Lösung (Kor.: $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper)

$x, y \in \mathbb{R}$

$x + iy = (x,0) + (0,1)\cdot(y,0) = (x,y)$

$\Longrightarrow$ Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben als $z = x + iy$, $x,y \in \mathbb{R}$.

<u>Realteil</u> $\operatorname{Re}(x+iy) := x \in \mathbb{R}$

<u>Imaginärteil</u> $\operatorname{Im}(x+iy) := y \in \mathbb{R}$

<u>konjugiert</u> komplexe Zahl: Wenn $z = x+iy$, dann $\bar{z} := x - iy$

Ist z reell, dann $z = \bar{z}$.

<u>Allgemein</u>: $\bar{\bar{z}} = z$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $\overline{(z_1+z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

$z\cdot\bar{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2+y^2 \underset{\geq 0}{\in \mathbb{R}}$

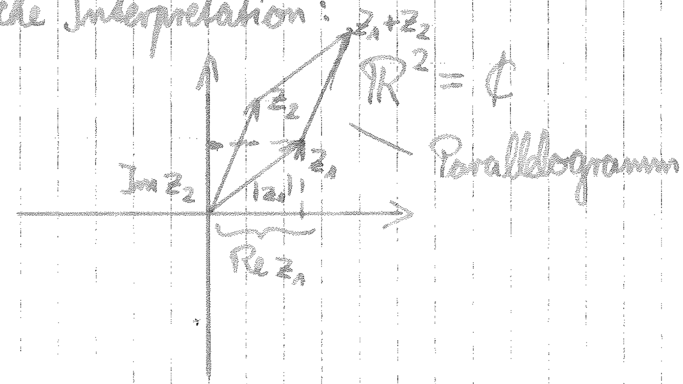
Ana

$|z| := \sqrt{z\bar{z}}\ , \ = \sqrt{x^2+y^2} \quad |z| \in \mathbb{R},\ |z| \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$

$|z| = |\bar{z}|$. $\quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Minkowskische Ungleichung $\Longrightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Geometrische Interpretation:



$z + \bar{z} = 2x \Longrightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$

$z - \bar{z} = 2iy \Longrightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

<u>Polynome und ihre Nullstellen</u>

Sei K ein Körper.

Def. Ein <u>Polynom</u> (über K) ist ein formaler Ausdruck

$p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, mit $a_i \in K$ und

$a_n \neq 0$ falls $p \neq 0$

Wenn $p \neq 0$: $\deg(p) := n$ „Grad" von p

(Oft: $\deg(0) :=$ „$-\infty$")

Wir bezeichnen die Menge aller Polynome mit $K[x]$. Man nennt die $a_i \in K$ die <u>Koeffizienten</u> von p.

<u>Addition</u>: $q = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ (sagen wir $m \leq n$)

$p + q := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + (a_m + b_m)x^m + \ldots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$

<u>Multiplikation</u>: $x^n \cdot x^m := x^{n+m}$, $a x^n := ax^n \quad a \in K$

Es sollen die Assoz.- u. Distributivgesetze, sowie Kommutativität gelten.

(<u>Bem</u>: Mit dieser Operation wird $K[x]$ zu einem sog. „<u>Ring</u>".)

$p \in K[x]$ definiert eine Abb.

$$f_p : K \to K$$
$$a \mapsto p(a) = a_n a^n + \ldots + a_1 a + a_0 \in K$$

Wir müssen sorgfältig zwischen p und f_p unterscheiden.

Im Allg. bestimmt f_p nicht p!

(Bsp. Sei $K = \mathbb{Z}/2$ der Körper mit 2 Elementen, $1+1=0$

$p = x^2 + x \in \mathbb{Z}/2[x]$

$\neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} p(0) = 0 \\ p(1) = 1^2 + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{f_p}_{=0} : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2$$

05.11.14 7. Vorlesung:

K ein Körper

$K[x]$ = Polynome mit Koeffizienten in K

$K[y]$ = ...

$(K[x], +, \cdot)$

$\deg(p \cdot q) = \deg p + \deg q$, da in einem Körper: $a \neq 0, b \neq 0$
$\Rightarrow a \cdot b \neq 0$

Nullstellen:

Def.: Wir nennen $a \in K$ Nullstelle von $p \in K[x]$, wenn $p(a) = 0 \in K$
$(= f_p(a))$

$x^2 - a^2 = (x-a) \cdot (x+a) \in K[x]$

Allgemeiner: $x^k - a^k = (x-a) \cdot (x^{k-1} + x^{k-2} a + \ldots + x a^{k-2} + a^{k-1})$

Sei $p \in K[x]$ und $a \in K$ eine Nullstelle von $p = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

$\Rightarrow p(x) = p(x) - p(a) = a_n (x^n - a^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + a_1 (x-a)$

$= a_n (x-a)$ (Pol Grad $n-1$) $+ a_{n-1}(x-a)$ (Grad $n-2$) $+ \ldots$

$+ a_1 (x-a)$

$= (x-a) \cdot \tilde{p}(x)$, $\tilde{p} \in K[x]$ Grad $\tilde{p} = n-1$

Ana

Wir zeigen auch: $(x-a)$ teilt p:
Iterativ:
$p(x) = (x-a)^m \cdot q(x)$, $q \in K[x]$ und a ist keine Nullstelle von q. Dann heißt m die Vielfachheit der Nullstelle a.
Wir erhalten:

Satz 1: Ist $p \in K[x]^n$ & $\deg p \geq 1$, dann hat p höchstens n verschiedene Nullstellen $a_1, \dots, a_k$ und p hat die Form
$p(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdot (x-a_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_k)^{m_k} \cdot q(x)$,
wobei $q \in K[x]$ keine Nullstellen hat.

Satz 2: Seien $p, q \in K[x]$, $\deg p \leq n$, $\deg q \leq n$
Gilt $f_p(a) = f_q(a)$ für mind. $n+1$ verschiedene $a \in K$, dann $p = q$.

Bew: Seien $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in K$ paarweise verschieden mit
$f_p(a_i) = f_q(a_i)$ $\forall i = 1, \dots, n+1$
$\Longrightarrow$ $f_{p-q}(a_i) = 0$ $\forall i$
Ist $\deg(p-q) \geq 1$: $\deg(p-q) \leq n$, andererseits hat $p-q$ mind. $n+1$ verschiedene Nullstellen
Dies stünde im Widerspruch zu Satz 1.
$\Longrightarrow$ $p-q$ ist das konstante Polyn.
Die Konstante muss aber 0, da $p-q$ Nullstelle hat.

Kor.: Ist K ein unendlicher Körper, dann bestimmt f_p eindeutig $p \in K[x]$

Kor.: Für $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ bestimmt f_p eindeutig $p \in K[x]$.

Def.: Ein Körper K ist algebraisch abgeschlossen, wenn jedes $p \in K[x]$, $\deg p > 0$, eine Nullstelle in K hat.

Bsp.: $K = \mathbb{R}$ ist nicht alg. abgeschlossen: $p = x^2+1$

Fundamentalsatz der Algebra:

$\mathbb{C}$ ist algebr. abgeschlossen.

$p \in \mathbb{C}[z] \Rightarrow \qquad (c \in \mathbb{C})$

$p(z) = c\cdot(z-a_1)^{m_1}\cdot(z-a_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(z-a_k)^{m_k}$

(vollständiger Zerfall in Linearfaktoren)

Bsp.: ① $p(z) = z^2+1 \qquad z^2 = -1$

$i^2 = -1 = (-i)^2$

p hat Nullstellen $i, -i$

In der Tat ist $p = (z+i)\cdot(z+i)$

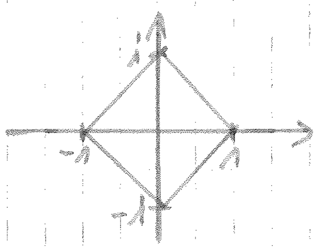
② $p(z) = z^4 - 1 \qquad z^4 = -1$

$i^4 = (-i)^2 = 1 = (-i)^4 \qquad 1^4 = 1 = (-1)^4$

p hat die 4 Nullstellen $\pm i, \pm 1$

In der Tat ist

$z^4 - 1 = (z-1)(z+1)\cdot(z-i)\cdot(z+i)$



In $\mathbb{C}$ hat 1 genau 4 4-te Wurzeln

Zu reellen Polynomen

$p \in \mathbb{R}[z] \subset \mathbb{C}[z]$

In $\mathbb{C}[z]$,

$p = c\cdot(z-a_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(z-a_k)^{m_k}, \; a_i \in \mathbb{C}$

Ist $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, dann auch $\overline{a}$:

$p = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0, \; b_i \in \mathbb{R} \rightarrow \overline{b_i} = b_i$

$p(\overline{a}) = b_n \overline{a}^n + b_{n-1}\overline{a}^{n-1} + \ldots + b_1 \overline{a} + b_0$

$= \overline{b_n a^n} + \overline{b_{n-1} a^{n-1}} + \ldots + \overline{b_1 a} + \overline{b_0}$

$= \overline{p(a)} = \overline{0} = 0$

$(z-a)(z-\overline{a}) = z^2 - \underbrace{2\,\mathrm{Re}(a)}_{\in\mathbb{R}} z + \underbrace{|a|^2}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[z]$

Wir haben bewiesen:

Satz: Jedes reelle Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ lässt sich schreiben als

$$p(x) = c \cdot (x-a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_k)^{m_k} \cdot \underbrace{(x^2+A_1x+B_1)} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x^2+A_\ell x+B_\ell)}$$

$a_i \in \mathbb{R}$ $\qquad A_i, B_i \in \mathbb{R}$

haben keine reellen Nullstellen

Wir werden diese Darstellung später im Rahmen von sog. „Partialbruchzerlegungen" von reellen rationalen Funktionen verwenden.

Das Vollständigkeitsaxiom

Wir haben bisher die Körperaxiome, die Ordnungsaxiome und das archimedische Axiom besprochen.
$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind beide archimedisch angeordnete Körper, aber $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht strukturell gleich („isomorph"), z.B. sind $\mathbb{Q}$ u. $\mathbb{R}$ nicht gleichmächtig.
Daraus folgt, dass obige Axiome $\mathbb{R}$ noch nicht vollständig charakterisieren; also muss ein weiteres Axiom hinzutreten.

Def.: Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Menge von reellen Zahlen.
X ist nach unten beschränkt, wenn $\exists a \in \mathbb{R}$, sodass $a \leq x \; \forall x \in X$. Dann nennen wir a untere Schranke von X
X ist nach oben beschränkt, wenn $\exists b \in \mathbb{R}$, mit $x \leq b \; \forall x \in X$
Wir sagen X ist beschränkt, wenn es nach unten und nach oben beschr. ist.

Def.: Eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ nennt man kleinste obere Schranke (oder auch Supremum) von X, wenn:
(1) S ist obere Schranke von X, und
(2) für jede obere Schranke S' von X gilt $S \leq S'$.

$S \in \mathbb{R}$ ist größte untere Schr. (oder Infimum) von X, wenn:
(1) S ist untere Schr. von X und
(2) für jede untere Schr. S' von X gilt $S \geq S'$
Wenn das Supremum von X existiert, dann ist es eindeutig (denn S, S' Supremum von $X \Rightarrow S \leq S', S' \leq S$) und wir schreiben dafür $\sup X$
Analog verhält es sich mit dem Infimum $\inf X$
Eine obere Schranke S ist das Supremum von X genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in X : x > S - \varepsilon$$

07.11.14 8. Vorlesung:
Letztes Mal: Begriffe Supremum, Infimum

Def.: $X \subset \mathbb{R}$. Hat X ein Supremum S und ist $S \in X$, dann nennen wir S das Maximum von X.
Ähnlich definiert man das Minimum von X.

Bsp.: • $X = \mathbb{R}$ ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.
$X = \mathbb{R}$ hat kein Supremum und kein Infimum
• $X = (a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$ X ist nach unten beschränkt, aber nicht nach oben. X hat ein Infimum, $\inf X = a$
a ist untere Schranke von X. Ist $\varepsilon > 0$, dann $\exists x > a$ mit $x < a + \varepsilon \Rightarrow \inf (a, \infty) = a$.
Aber: $a \notin X \Rightarrow X$ hat kein Minimum
• $X = (-\infty, b)$, $b \in \mathbb{R} \Rightarrow \sup X$ existiert und $\sup X = b$
$b \notin X \Rightarrow X$ hat kein Maximum
• $X = (a, b)$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ ist beschränkt.
$\inf X = a$, $\sup X = b$

(Bsp)

- $X = [a,b) (= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\})$
  $\inf X = a$ & $a \in X = [a,b)$
  $\Rightarrow$ X hat ein Minimum, und zwar $\min X = a$
- $X = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
  $\operatorname{Max} X = 1 \; (= \sup X)$
  0 ist untere Schranke. Es ist sogar $\inf X = 0$:
  $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} - \{0\}: \frac{1}{n} < \varepsilon = \varepsilon + \underline{\underline{0}}$
  ($\Leftarrow$ archimedisches Axiom)
  X hat <u>kein</u> Min, denn $0 \notin X$

<u>Vollständigkeitsaxiom</u>: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.

<u>Bem.</u>: $X = \emptyset$ ist beschränkt; <u>jede</u> reelle Zahl ist obere und untere Schranke von $\emptyset \Rightarrow \emptyset$ hat kein Sup., kein Inf.

<u>Bem.</u>: Man kann zeigen, dass jeder vollständige archimedisch angeordnete Körper isomorph zu $\mathbb{R}$ ist. Somit benötigen wir keine weiteren Axiome, um $\mathbb{R}$ zu charakterisieren.

<u>Prop.</u>: Sei K ein angeordneter Körper. Gilt in K das Vollständigkeitsaxiom, dann auch das archimedische Axiom

<u>Bew.</u>: Archimed. Ax: $\forall x > 0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > x$.

Angenommen, $\exists x_0 > 0 \; \exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : n\varepsilon \leq x_0$

$X := \{n\varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$. X ist nach oben beschränkt (x_0 ist eine obere Schr.) Vollst.ax. $\Rightarrow \exists S = \sup X$

$\exists \xi \in X : \xi > S - \varepsilon \qquad \xi = n\varepsilon$ für geeignetes n

$n\varepsilon > S - \varepsilon$, $\underbrace{(n+1)\varepsilon}_{\in X} > S$, Widerspruch

<u>Prop.</u>: Ist $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ mit B ist nach oben beschränkt. Dann gilt: $\sup A \leq \sup B$

Bew.: $\sup B$ ist auch eine obere Schranke von A. Da $\sup A$ die kleinste obere Schr. von A, gilt $\sup A \leq \sup B$

Konvergenz von Zahlenfolgen

Def.: Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (manchmal auch $\mathbb{N} - \{0, 1, \dots, k-1\} \to \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ \overset{\cup}{n} &\mapsto a_n \end{aligned}$$

Wir schreiben auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder kurz

Bsp.: ① (a_n) $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n = a$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$= (a, a, a, a, \dots)$ die konstante Folge

② (a_n) mit $a_n = (-1)^n$
$= (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

③ $(a_n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad (a_n)_{n = 1, 2, 3, \dots}$

④ Sei $x \in \mathbb{R}$
(a_n) mit $a_n = x^n = (1, x, x^2, x^3, \dots)$

! **Konvergenz:**

Def.: Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Wir sagen (a_n) konvergiert, wenn

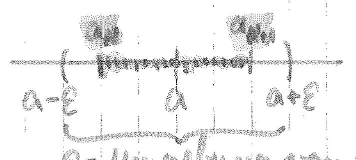
$\exists a \in \mathbb{R}$, sodass: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Wir nennen a einen Grenzwert von (a_n) (od. Limes)

Wir schreiben: $a_n \to a$ für $n \to \infty$

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim a_n$$



(Nichtkonvergente Folgen: „divergent")

Ana

Satz: (Eindeutigkeit des Grenzwertes)

Gilt $a_n \to a$ und $a_n \to a'$, dann ist $a = a'$

Bew.: Ang. $a \neq a' \Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{2}|a-a'| > 0$

$a_n \to a \Rightarrow \exists N : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq N$;

$a_n \to a' \Rightarrow \exists N' : |a_n - a'| < \varepsilon \ \forall n \geq N'$

$\Rightarrow$ für alle $n \geq \max\{N, N'\}$:

$\underline{|a-a'|} \leq |a-a_n| + |a_n - a'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \underline{|a-a'|}$

Widerspruch $\Rightarrow a = a'$

Bsp.: (1) konst. Folge $a_n = a$

Beh.: konvergent, mit Grenzwert a:

$|a_n - a| = |a-a| = 0 < \varepsilon$

(2) $a_n = (-1)^n$ Wir zeigen, (a_n) divergiert

Ang.: $\exists a$ mit $a_n \to a$. Für $\varepsilon := 1 > 0$

$\exists N$ sodass $|a_n - a| < 1 \ \forall n \geq N$

$2 = |a_{n+1} - a_n| \leq \underbrace{|a_{n+1} - a|}_{<1} + \underbrace{|a - a_n|}_{<1} < 2 \quad \forall n \geq N$

Widerspruch

$\Rightarrow (a_n)$ divergiert

(3) $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ Beh.: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Gegeben $\varepsilon > 0$, setze $N > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \ \forall n \geq N$

(4) $x \in \mathbb{R} \quad a_n = x^n$

Fall: $|x| < 1$ Beh.: $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

Klar, wenn $x = 0$ Ann.: $0 < |x| < 1$

$\Rightarrow \exists y > 0 : \frac{1}{|x|} = 1 + y$

$|x^n - 0| = |x|^n = \frac{1}{(1+y)^n} \leq \frac{1}{1+ny} \leq \frac{1}{ny}$

Bernoullische Ungleichung

Wähle $N > \frac{1}{\varepsilon y}$. Dann ist $|x^n - 0| \leq \frac{1}{ny} < \varepsilon$, für $n \geq N$

12.11.14 **9. Vorlesung:**

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$

Konvergenz: $a_n \longrightarrow a$ für $n \longrightarrow \infty$

$$:\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq N$$

$$N = N(\varepsilon)$$

① (a_n), $a_n = a$ (konstante Folge) $a_n \longrightarrow a$

② $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

③ $a_n = (-1)^n$ divergent.

$(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

④ $x \in \mathbb{R}$ $a_n = x^n$

Fall 1: $|x| < 1 \Longrightarrow \lim x^n = 0$

Fall 2: $x = 1$ ① $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$

Fall 3: $x = -1$ ③ $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x^n \nexists$ ((x^n) ist divergent)

Fall 4: $|x| > 1$ Dies folgt aus der Prop unten

Def.: Eine Folge (a_n) ist (nach oben bzw. nach unten) beschränkt, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (nach oben bzw. nach unten) beschränkt ist.

Prop. Eine konvergente Folge ist beschränkt.

Bew.: Es gelte $a_n \longrightarrow a$. Für $\varepsilon := 1$ gibt es also ein N mit

$$|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq N$$

$M := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$

Für $n \geq N$: $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| + M$

Für $n < N$: $|a_n| \leq M < 1 + |a| + M$

$\Longrightarrow \forall n : |a_n| < 1 + |a| + M$, d.h. (a_n) ist beschränkt

(Ana)

Wenn $|x| > 1$, dann ist $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und folglich divergent nach der Prop.

Teilfolgen: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.
Sei $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit
$n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$
Dann nennen wir die Folge $(a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ eine Teilfolge von (a_n).

Bsp.: $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots)$ ist eine Teilfolge von $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$
Unmittelbar aus der Def. von Konvergenz folgt:
(Wenn $a_n \to a$, dann konvergiert auch jede Teilfolge von (a_n) gegen a)$^{(*)}$

⑤ $\underbrace{a_n = \frac{1}{n^p}}$, $p = 2, 3, \dots$

ist eine Teilfolge von $(\frac{1}{n})_{n=1,2,\dots}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

⑥ $a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}$, $p = 2, 3, \dots$ $\quad (p = 2: a_n = \frac{1}{\sqrt{n}})$
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben
$\Rightarrow \varepsilon^p > 0$. $\quad N \geq \frac{1}{\varepsilon^p}$
$\Rightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} < \varepsilon$ für $n > N$
$(n > \frac{1}{\varepsilon^p},\ n\varepsilon^p > 1,\ (n\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}} > 1,\ n^{\frac{1}{p}} > \frac{1}{\varepsilon})$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} = 0$

⑦ Bh.: $a_n = \sqrt[n]{n} \to 1$
Bew.: $b_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$
$$n = (1 + b_n)^n = \underline{1} + \binom{n}{1} b_n + \underline{\binom{n}{2} b_n^2} + \dots + \binom{n}{n} b_n^n$$
$$> 1 + \binom{n}{2} b_n^2$$
$b_n^2 < \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n}$ $\quad b_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ $\quad$ Sei $\varepsilon > 0$ gegeben
Nach ⑥ $(p=2)$ $\exists N: \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \forall n \geq N$
$|\sqrt[n]{n} - 1| = b_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{2}\cdot\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon \quad \forall n \geq N$

Vergleichssatz: Seien (a_n), (b_n) Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$

Gibt es ein N, sodass $a_n \le b_n \ \forall n \ge N$, dann gilt auch $a \le b$

Bew.: Angenommen $a > b$ $\quad \varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$

$a_n \to a \Rightarrow \exists N' : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \ge N' \Rightarrow a_n > a - \varepsilon \ \forall n \ge N'$

$b_n \to b \Rightarrow \exists N'' : |b_n - b| < \varepsilon \ \forall n \ge N'' \Rightarrow b_n < b + \varepsilon \ \forall n \ge N''$

$a_n - b_n > (a-\varepsilon) - (b+\varepsilon) = (a-b) - 2\varepsilon = (a-b) - (a-b) = 0$

$\forall n \ge \max\{N, N', N''\}$

$\Rightarrow a_n > b_n \ \forall n \ge \max\{N, N', N''\}$

Widerspruch $a_n \le b_n \ \forall n \ge N$

$\Rightarrow \underline{a \le b}$.

Bem.: Aus $a_n < b_n \ \forall n$ kann man im Allg. nicht folgern, dass $a < b$ (lediglich $a \le b$)

Bsp.: $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$

Einschnürungssatz: $a_n \to a$, $b_n \to a$

(c_n) mit: $\exists N : a_n \le c_n \le b_n \ \forall n \ge N$

Dann konvergiert auch (c_n) und zwar gegen a

Bew.: Gegeben $\varepsilon > 0$ $\quad a_n \to a \Rightarrow \exists N' : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \ge N'$

$b_n \to a \Rightarrow \exists N'' : |b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \ge N''$

$c_n \ge a : |c_n - a| = c_n - a \le b_n - a = |b_n - a| \quad \forall n$

$c_n < a : |c_n - a| = a - c_n \le a - a_n = |a_n - a|$

$|c_n - a| \le |b_n - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \forall n \ge \max\{N, N', N''\}$

Satz über Multiplikation mit beschränkten Folgen

Gegeben: $a_n \to 0$, (b_n) beschränkt

Dann $a_n b_n \to 0$

Bew.: $\exists$ Konstante $c > 0 : |b_n| < c \quad \forall n$

für $\varepsilon > 0 \ \exists N : |a_n - 0| = |a_n| < \frac{\varepsilon}{c} \ \forall n \ge N$

$|a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon \quad \forall n \ge N$

Ana

10. Vorlesung: 14.11.14

Rechenregeln für konvergente Folgen

Satz: Seien $(a_n),(b_n)$ konvergente Folgen, $a_n \to a$, $b_n \to b$

Dann gilt:

(1) $a_n + b_n \to a+b$

(2) $a_n \cdot b_n \to ab$

(3) Ist $b \neq 0$, dann $\exists N: b_n \neq 0 \ \forall n \geq N$ und es gilt

$$\underbrace{\frac{a_n}{b_n}}_{(n \geq N)} \to \frac{a}{b}$$

Bew.: (1) Gegeben $\varepsilon > 0$

$a_n \to a \Rightarrow \exists N: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq N$

$b_n \to b \Rightarrow \exists N': |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq N'$

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a| + |b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $n \geq \max\{N, N'\}$

(2) $a_n b_n \to ab \Leftrightarrow a_n b_n - ab \to 0$

$a_n b_n - ab = a_n b_n - a b_n + a b_n - ab$ mit (1)

$$= \underbrace{\underbrace{(a_n - a)}_{\to 0} b_n}_{\to 0} + \underbrace{(b_n - b)}_{\to 0} a \to 0 + 0 = 0$$

b_n: beschränkt, da konvergent; a: beschränkt (konstant)

(3) Ann. $b \neq 0$. $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$

$b_n \to b \Rightarrow \exists N: ||b_n| - |b|| < \frac{|b|}{2}$ $\quad |b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$

Wir zeigen zunächst $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$:

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b_n b} = \underbrace{(b - b_n)}_{\to 0} \cdot \frac{1}{b_n b} \to 0 \quad (\text{für } n \geq N)$$

$$\left|\frac{1}{b_n b}\right| < \frac{2}{|b|^2}$$

(2) $\Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot \frac{1}{b}$

Anwendungen:

I) Sei $p \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Wenn $b_n \to b$, dann $p(b_n) \to p(b)$

$$\lim_{n\to\infty} p(b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_k b_n^k + a_{k-1} b_n^{k-1} + \dots + a_1 b_n + a_0)$$

$$\underset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} (a_k b_n^k) + \lim_{n\to\infty}(a_{k-1} b_n^{k-1}) + \dots + \lim_{n\to\infty}(a_1 b_n) + \lim_{n\to\infty} a_0$$

$$\underset{(2)}{=} a_k \cdot (\lim b_n)^k + a_{k-1} (\lim b_n)^{k-1} + \dots + a_1 (\lim b_n) + a_0$$

$$= a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0 = p(b)$$

II) Rationale Ausdrücke:

$p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $q \neq 0$, $\deg p = \deg q = k$

$$p(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0$$

Beh.: $\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a_k}{b_k}$

Bew.: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k \cdot (a_k + \overbrace{\frac{a_{k-1}}{n}}^{\to 0} + \dots + \overbrace{\frac{a_1}{n^{k-1}}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{a_0}{n^k}}^{\to 0})}{n^k \cdot (b_k + \underbrace{\frac{b_{k-1}}{n}}_{\to 0} + \dots + \underbrace{\frac{b_1}{n^{k-1}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{b_0}{n^k}}_{\to 0})}$$

III) Rekursiv definierte Folgen

Aufgabe: Berechne $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}$

Man soll also den Grenzwert der Folge

$1, \sqrt{1+\sqrt{1}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \dots$

bestimmen. (Wir werden später sehen, dass diese Folge tatsächlich konvergiert)

$a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ („rekursive Definition" einer Folge)

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Ana

$a_{n+1}^2 = 1 + a_n \quad , a_{n+1}^2 - a_n - 1 = 0$

$0 = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1}^2 - a_n - 1) = (\lim a_{n+1})^2 - (\lim a_n) - 1$

$\overset{\text{Rechenregeln}}{=} a^2 - a - 1$

Wir erhalten die quadratische Gleichung

$a^2 - a - 1 = 0 \quad$ quadr. Formel $\Longrightarrow$

$\boxed{a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$ ($\longrightarrow$ „goldener Schnitt")

4. Konvergenzkriterien

Def.: Sei (a_n) eine Folge

Dann nennen wir (a_n) monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1} \ \forall n$

streng ——— " ——— $a_n < a_{n+1} \ \forall n$

——— " ——— (a_n) monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n$

streng ——— " ——— $a_n > a_{n+1} \ \forall n$

(1) Das Monotonieprinzip

Jede monotone, beschränkte Folge konvergiert

Genauer: Ist (a_n) mon. wachsend & beschr., dann $a_n \to \sup\{a_n | n\in\mathbb{N}\}$

——— " ——— fallend ——— " ——— $a_n \to \inf\{a_n | n\in\mathbb{N}\}$

Bew.: Es sei (a_n) mon. wachsend & beschränkt

(Der Fall einer mon. fallenden Folge ist dann analog)

$\exists S := \sup\{a_n | n\in\mathbb{N}\}$. Zu zeigen: $a_n \to S$ für $n\to\infty$

Geg.: $\varepsilon > 0$

$\exists N: \quad a_N > S - \varepsilon$

Für $n \geq N$: $S - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq S$

(2) Das Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

Bew.: Wir zeigen zunächst, dass jede Folge (a_n) eine monotone Teilfolge enthält.

Setze: $M := \{m \in \mathbb{N} \mid a_m > a_n, m < n\}$

<u>Fall 1</u>: M <u>unendlich</u>: $M = \{m_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $m_0 < m_1 < m_2 < \dots$

$$a_{m_0} > a_{m_1} > a_{m_2} > a_{m_3} > \dots$$

Dies ist eine mon. fallende Teilfolge.

<u>Fall 2</u>: M endlich: $\exists\, n_0 > m \ \forall m \in M$

$\Rightarrow n \notin M \Rightarrow \exists\, n_1 > n_0 : a_{n_0} \leq a_{n_1}$

$n_1 \notin M \Rightarrow \exists\, n_2 > n_1 : a_{n_1} \leq a_{n_2}$

Wir erhalten die mon. wachsende Teilfolge

$$a_{n_0} \leq a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq a_{n_3} \leq \dots$$

Sei jetzt (a_n) eine <u>beschränkte</u> Folge.

Dann hat (a_n) eine monotone Teilfolge.

Diese Teilfolge ist auch beschränkt.

Nach dem Monotonieprinzip ist die Teilfolge konvergent.

21.11.14 <u>11. Vorlesung</u>:

Konvergenzprinzipien für Folgen:

① **Monotonieprinzip**

② Bolzano Weierstraß

③ Prinzip der Intervallschachtelung

Seien $I_n = [a_n, b_n]$ abgeschlossene Intervalle ($a_n \leq b_n$) mit

$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ und $b_n - a_n \to 0$

Dann gilt

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{a\}$$

für $a \in \mathbb{R}$

<u>Bew.</u>: (a_n) ist mon. wachsend & beschränkt

Monotonieprinzip $\Rightarrow a_n \to a = \sup \{a_n\}$

(b_n) ist mon. fallend & beschränkt.

Anm.

Monotonieprinzip $\Rightarrow b_n \to b = \inf\{b_n\}$

$0 = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = b - a$

$\Rightarrow a = b$

$a_n \leq \sup\{a_n\} = a = b = \inf\{b_n\} \leq b_n$

$\Rightarrow a \in I_n \;\forall n$

Wenn $c \in I_n \;\forall n$:

$a_n \leq c \;\forall n \Rightarrow \sup\{a_n\} \leq c$

$c \leq b_n \;\forall n \overset{a \leq}{\Rightarrow} c \leq \inf\{b_n\} = b = a$

$\Rightarrow c = a$

Cauchyfolgen

Sei (a_n) eine konvergente Folge, $a_n \to a$

$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \;\forall n \geq N$

Für $m, n \geq N$:

$\underbrace{|a_m - a_n|} \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Hier taucht der Grenzwert nicht auf!

Def.: (a_n) ist eine Cauchyfolge, wenn $\forall \varepsilon > 0 \;\exists N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$

Wir haben also gezeigt:

Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

In $\mathbb{R}$ gilt auch die Umkehrung:

(4) Cauchysches Konvergenzprinzip:

Jede Cauchyfolge reeller Zahlen konvergiert

Bew.: Sei (a_n) eine Cauchyfolge. Wir zeigen zunächst: (a_n) ist beschränkt.

Für $\varepsilon := 1 \;\exists N: |a_n - a_m| < 1 \;\forall n, m \geq N$

$M := \max\{|a_0|, \ldots, |a_{N-1}|\}$

Dann ist $|a_n| \leq M + 1 + |a_N| \quad \forall n$

Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow (a_n)$ besitzt eine konv. Teilfolge $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, $a_{n_i} \to a$ für $i \to \infty$

Wir zeigen $a_n \to a$: Sei $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \exists N: |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n,m \geq N \\ \exists n_j: |a_{n_j} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \& \ n_j \geq N \end{cases}$$

$$|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_j}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_j} - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

<u>Anwendung des Monotonieprinzips</u>

rekursiv def. Folgen

$a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$

(a_n) ist mon. wachsend, Induktion

$a_0 = 1 < \sqrt{2} = a_1$ Wenn $a_{n-1} < a_n$,

dann $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 1} < \sqrt{a_n + 1} = a_{n+1}$

(a_n) <u>ist beschränkt</u>: $a_n \leq 2$

$a_0 = 1 \leq 2$ ✓ Wenn $a_n \leq 2$,

dann $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \leq \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$

1 $\Rightarrow (a_n)$ <u>konvergiert</u>

<u>Unendliche Reihen</u>

<u>Def.</u>: Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Die zugehörige <u>unendl. Reihe</u> ist die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ der sog. „<u>Partialsummen</u>“

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_m$$

Wir schreiben dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := (s_m)_{m\in\mathbb{N}}$

Die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert also genau dann, wenn die Folge (s_m) konvergiert.

Ana

In diesem Falle bezeichnen wir auch den Grenzwert mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := s$, wenn $s_n \to s$

Der Grenzwert s wird manchmal auch die „Summe" der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genannt.

Analog: $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konv. \& es gilt im konv. Fall: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \ldots + a_{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} a_n\right)$

Bsp (die unendliche geometrische Reihe) Sei $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$

Wir betrachten $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. $s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1 - \lim_{n\to\infty} x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

Wir schließen: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Bem.: Jede Folge (b_n) lässt sich als Reihe darstellen.

$$a_0 := b_0, \; a_n := b_n - b_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n = \cancel{b_0} + (\cancel{b_1} - \cancel{b_0}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_1}) + \ldots + (b_m - \cancel{b_{m-1}}) = b_m$$

„Teleskopreihen"

Bsp.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$s_m = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = 1 - \frac{1}{m+1}$$

$$\lim s_m = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Bsp.: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ divergiert, denn

$$(s_m) = (+1, 1-1, 1+1+1, 1-1+1-1, \ldots)$$
$$= \underbrace{(1, 0, 1, 0, \ldots)}_{\text{divergiert}}$$

Konvergenzkriterien für Reihen:

- Cauchysches Konvergenzkriterium

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv. $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}:$
$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$

Bew.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv. $\overset{\text{Def}}{\iff} (s_n)$ konv. $\iff (s_n)$ Cauchyfolge
$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: |s_n - s_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$
$|s_n - s_{m-1}| = \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$

- Monotoniekriterium: Sei $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv. $\iff (s_n)$ beschränkt ist.

Bew.: Folgt aus dem Monotonieprinzip für Folgen, denn
$s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots$ ist mon. wachsend
Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gegen s konvergiert, dann $s_0 \leq s_n \leq s$.

Bsp.: (die harmonische Reihe)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{(\ldots)}_{\geq \frac{1}{2}}$$

$\Longrightarrow$ Die Folge (s_n) ist unbeschränkt.
$\underset{\text{M.K.}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, obwohl $\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergiert, $\to 0$

26.11.14 12. Vorlesung:

Notwendige Bedingung für die Konvergenz von Reihen:
Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, dann $a_n \to 0$

Bew.: Sei $\varepsilon > 0 \ \exists N: \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$ (Cauchy-Kriterium)
Für $n = m$ gilt also $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon \ \forall n \geq N$

Ana

Bsp.: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ist divergent, denn $a_n = (-1)^n$ ist keine Nullfolge

Bem.: Die Bedingung ist nicht hinreichend!

Gegenbsp.: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}$ (harmon. Reihe)

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$ ist divergent

• Kriterium von Leibniz für alternierende Reihen:

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \geq 0$, (a_n) monoton fallend und $a_n \to 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$

Bew.: $s_m := \sum_{n=0}^{m}(-1)^n a_n$ $\quad a_{n+1} \leq a_n$, $a_{n+1} - a_n \leq 0$,

$a_n - a_{n+1} \geq 0$

nur gerade Indizes $\to$ $s_{2m+2} - s_{2m} = a_{2m+2} - a_{2m+1} \leq 0$

$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq_6 \geq \ldots \geq s_1$ monoton & beschränkt

$\Longrightarrow \exists \lim_{m\to\infty} s_{2m} =: s$

$s_{2m+3} - s_{2m+1} = -a_{2m+3} + a_{2m+2}$

$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq s_7 \leq \ldots \leq a_0$ monoton & beschränkt

$\Longrightarrow \exists \lim_{m\to\infty} s_{2m+1} =: s'$

$|s - s'| = |\lim s_{2m} - \lim s_{2m+1}| = |\lim(s_{2m} - s_{2m+1})|$

$= \lim_{m\to\infty} |s_{2m} - s_{2m+1}| = \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$

$\Longrightarrow s = s'$

Es bleibt zu zeigen, dass $s_m \to s$

Sei $\varepsilon > 0$ $\exists N: |s_{2m} - s| < \varepsilon \;\forall m \geq N$

$\exists N': |s_{2m+1} - s| < \varepsilon \;\forall m \geq N'$

$\Longrightarrow$ Wenn $m \geq \max\{2N, 2N'+1\}$, dann $|s_m - s| < \varepsilon$

Bsp ① $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \ldots$

Leibniz $\Longrightarrow$ ist konvergent

(Grenzwert ist $\log(2)$) $\longrightarrow$ natürlicher Logarithmus

② $\underbrace{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\mp\ldots}_{\text{konv. nach Leibniz}} = \frac{\pi}{4}$

• <u>Rechenregel Linearkombinationen von konv. Reihen</u>

Seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ konvergente Reihen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Dann ist $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

<u>Bew.:</u> $s_m' := \sum_{n=0}^{m} a_n$, $s_m'' := \sum_{n=0}^{m} b_n$, $s_m := \sum_{n=0}^{m}(\alpha a_n + \beta b_n)$

$$s_m = \alpha \sum_{n=0}^{m} a_n + \beta \sum_{n=0}^{m} b_n = \alpha s_m' + \beta s_m''$$

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \lim(\alpha s_m' + \beta s_m'') \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rechenregeln für} \\ \text{konv. Folgen}}}{=} \alpha \lim s_m' + \beta \lim s_m''$$

• <u>Einfügen von Klammern</u>

Ist $\sum a_n$ konvergent, dann dürfen die Glieder dieser Reihe beliebig durch Klammern zusammengefasst werden. Genauer:

$A_0 := a_0 + a_1 + \ldots + a_{n_0}$, $A_1 := a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_1}$, $A_2 := \ldots$
$(n_1 > n_0)$

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

<u>Bew.:</u> Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge der Folge der Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

<u>Caveat:</u>

Man darf im Allg. Klammern <u>nicht</u> auflösen!

<u>Bsp.:</u> $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$
$= 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ist divergent

Ana

Absolute Konvergenz

Def.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut $:\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert

Bsp.: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{1}{n}}_{a_n}$ konvergiert, $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ ist divergent

$\Longrightarrow \sum (-1)^n \frac{1}{n}$ ist nicht absolut konvergent

Prop.: Absolute Konvergenz $\Longrightarrow$ Konvergenz

Dann gilt auch: $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ $\exists N: \sum |a_k| < \varepsilon \ \forall m \geq n \geq N$

$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq N$

(Cauchy-Kriterium)

Die Abschätzung $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ folgt aus dem Vergleichssatz für konvergente Folgen.

Der Umordnungssatz

Def.: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Eine Umordnung von $\sum a_n$ ist eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, wobei $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion ist.

Bsp.: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \mp \ldots$ konv.

$1 - \frac{1}{2} + \left(\boxed{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$

$+ \left(\boxed{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}}\right) - \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

$+ \left(\boxed{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}}\right) - \frac{1}{8} \qquad \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} > 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$+ \ldots$

Umordnung ist divergent! (Die Glieder bilden keine Nullfolge)

Umordnungssatz: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann ist auch jede Umordnung absolut konvergent gegen denselben Grenzwert.

Bew.: Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, sodass $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ eine Umordnung von $\sum a_n$ ist.

$s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n$, $s'_m := \sum_{n=0}^{m} a_{\sigma(n)}$.

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N$: $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

$M := \max\{\sigma^{-1}(0), \sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(N-1)\}$

$\Rightarrow \{0,1,2,\dots,N-1\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(M)\}$

$$|s'_m - s| \leq \underbrace{|s'_m - s_{N-1}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|s_{N-1} - s|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $m \geq M$

$\Rightarrow$ s'_m konvergiert gegen s. Um zu sehen, dass $\sum a_{\sigma(n)}$ absolut konvergiert, wende das eben gezeigte auf die Reihe $\sum |a_n|$ an.

28.11.14 13. Vorlesung:

Majorantenkriterium: Gegeben $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Wenn $|a_n| \leq c_n$ $\forall n \geq N$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum a_n$ absolut.

Bem.: Man nennt dann $\sum c_n$ eine Majorante für $\sum a_n$

Bew.: $\sum c_n$ konvergiert $\Rightarrow$ Die Folge der Partialsummen von $\sum |a_n|$ ist beschränkt $(\leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n)$

Monotoniekrit. $\Rightarrow$ Folge d. Partialsummen von $\sum |a_n|$ konv.

Analog folgt aus dem Monotoniekriterium:

Minorantenkriterium: Wenn $a_n \geq d_n$ und $\sum d_n$ divergiert, dann divergiert auch $\sum a_n$

Bsp.: $\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{1}{n^k}}^{=a_n}$, $k = 2, 3, 4, \dots$

$$\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2} \overset{!}{\leq} \frac{2}{n(n+1)} = c_n$$

Anw

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \Longrightarrow \sum \frac{2}{n(n+1)} = 2$

$\Longrightarrow \sum \frac{2}{n(n+1)}$ ist eine konv. Majorante für $\sum \frac{1}{n^2}$

Maj. krit. $\Longrightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ konv.

<u>Grenzwertkriterium</u>

$(a_n), (b_n)$, $a_n > 0$, $b_n > 0$ $\forall n$

$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow q > 0$. Dann gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv. $\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konv.

<u>Bew.:</u> $\varepsilon := \frac{q}{2} > 0$

$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow q \Longrightarrow \exists N : \left|\frac{a_n}{b_n} - q\right| < \varepsilon \ \forall n \geq N.$

$\frac{1}{2} q = q - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < q + \varepsilon = \frac{3}{2} q$

Ang.: $\sum b_n$ konv. $a_n < \frac{3}{2} q b_n$ $\forall n \geq N$

$\Longrightarrow \sum \frac{3}{2} q b_n$ ist eine konvergente Majorante

für $\sum a_n$.

Maj. krit. $\Longrightarrow \sum a_n$ konv.

Ang. $\sum a_n$ konv.

$\frac{1}{2} q b_n < a_n \Longrightarrow \sum a_n$ konv.

Majorante für $\sum \frac{1}{2} q b_n$

Maj. krit. $\Longrightarrow \sum \frac{1}{2} q b_n$

konv. $\Longrightarrow \sum b_n$ konv.

<u>Bsp.:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2+7n+3} - a_n$

$b_n = \frac{1}{n}$ $\frac{a_n}{b_n} = \frac{4n^2+n}{n^2+7n+3} \longrightarrow \underset{>0}{4} = q$ für $n \longrightarrow \infty$

$\sum \frac{1}{n}$ div $\underset{\text{Grenzwertkrit.}}{\Longrightarrow} \sum \frac{4n+1}{n^2+7n+3}$ div.

Quotientenkriterium: Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0$ $\forall n \geq N$, sodass $\exists\, 0 < q < 1$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \;\forall n \geq N$. Dann konvergiert $\sum a_n$ absolut.

Bew.: $\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| \leq q$, $|a_{N+1}| \leq |a_N| \cdot q$

$$\left|\frac{a_{N+2}}{a_N}\right| = \underbrace{\left|\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\right|}_{\leq q}\underbrace{\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right|}_{\leq q} \leq q^2 \implies |a_{N+2}| \leq |a_N| \cdot q^2$$

$$\implies \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |a_N| q^n}_{=|a_N| \sum q^n \text{ geometrische Reihe}} \text{ ist eine } \underline{\text{konvergente}} \text{ Majorante für } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Warnung: Es genügt nicht zu zeigen, dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ $\forall n$, um das Quotientenkriterium anwenden zu können.

Wurzelkriterium: Existiert $0 < q < 1$, sodass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ $\forall n \geq N$, dann konvergiert $\sum a_n$ absolut.

Bew.: $|a_n| \leq q^n \implies$ Die geom. Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist eine konv. Majorante für $\sum |a_n|$

Bsp.: $\sum \frac{n^2}{5^n}$ $\quad \sqrt[n]{\frac{n^2}{5^n}} = \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}}{5} \leq \frac{(1+1)\cdot(1+1)}{5} = \frac{4}{5} = q < 1$ für $n \geq N$

Wurzelkrit $\implies \sum \frac{n^2}{5^n}$ konv.

Alternativ mit dem Quot. krit.:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n^2} = \frac{1}{5}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}_{\to 1} \leq \frac{1}{5}(1+1)^2 = \frac{4}{5} = q < 1$$

für $n \geq N$

Das Cauchy-Produkt

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen

Ana

Def.: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, wobei $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ nennt man das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum a_n, \sum b_n$.

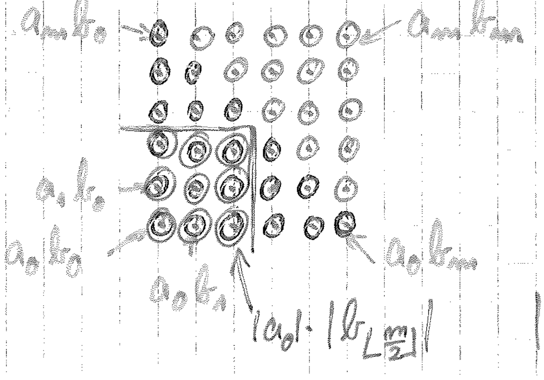
Satz.: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert absolut und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Bew.: Partialsummen:

$A_m := \sum_{n=0}^{m} a_n$, $B_m := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $C_m := \sum_{n=0}^{m} c_n$

$\overline{A}_m := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, $\overline{B}_m := \sum_{n=0}^{m} |b_n|$



$x \in \mathbb{R}$

$\lfloor x \rfloor := \mathrm{floor}(x)$

$:= n$, wo $n \in \mathbb{Z}: n \le x < n+1$

weiße Punkte $= A_m B_m$

C_m

$|A_m B_m - C_m| \le \overline{A}_m \cdot \overline{B}_m - \overline{A}_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \cdot \overline{B}_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$

$\underbrace{\left(\overline{A}_m \cdot \overline{B}_m - \overline{A}_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \cdot \overline{B}_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}\right)_m}_{\to 0, \text{ wenn } m \to \infty}$ ist eine Cauchyfolge, da $(\overline{A}_m \cdot \overline{B}_m)$ konvergiert

$\Longrightarrow A_m B_m - C_m \longrightarrow 0$

Potenzreihen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $x \in \mathbb{R}$

Dann nennt man $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe

$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

Bsp.: geometr. Reihe $\sum x^n$, $a_n = 1$

Wenn $(\forall x)$ $\sum a_n x^n$ konvergiert, dann ist $(a_n x^n)$ eine Nullfolge. Für Potenzreihen gilt auch die Umkehrung:

Satz: Ist $(a_n x^n)_n$ eine Nullfolge $\forall x \in \mathbb{R}$, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut

Bew.: Fixiere $x \in \mathbb{R}$

$a_n (2x)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow (a_n (2x)^n)$ beschränkt

$\Rightarrow \exists C : |a_n (2x)^n| \leq C \ \forall n$

$|a_n x^n| \leq \frac{C}{2^n}$ Also ist $\sum \frac{C}{2^n}$ eine konv. Majorante für $\sum |a_n x^n|$

03.12.14 **14. Vorlesung**:

Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge.

Eine Funktion (einer reellen Veränderlichen) ist eine Abb. $f: D \to \mathbb{R}$. Wir wollen eine Funktion $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstruieren, sodass gilt

„$\exp(x) = e^x$" $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

Heuristik: Wir machen den Ansatz $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+y)^n = \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_n y^n)\right)$$

$$\overset{\text{Cauchy produkt}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \text{ wobei } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot a_{n-k} y^{n-k}$$

Diese Gleichung ist also erfüllt, wenn $a_n (x+y)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot a_{n-k} y^{n-k}$$

Binom Lehrsatz $\Rightarrow a_n (x+y)^n = a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

$a_n \frac{n!}{k!(n-k)!} = a_k a_{n-k}$ Diese Gleichung ist erfüllt durch $a_n = \frac{1}{n!}$

Wir definieren also:

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Ana) Mit Hilfe z.B. des Quotientenkriteriums stellen wir fest, dass diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert:

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \underset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{2} = q < 1$$

für $n > 2|x|$

Alternativ kann man auch zeigen, dass $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ eine Nullfolge ist $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ Wir erhalten eine wohldefinierte Funktion mit $\exp(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Obige Heuristik wird nun zu einem <u>Beweis</u> der Funktionalgleichung $\Longrightarrow$

Satz: (Additionstheorem) $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)\ \forall x,y \in \mathbb{R}$

$\exp(0) = 1 \qquad 1 = \exp(x-x) = \exp(x)\cdot\exp(-x)$

$$\Longrightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$x \geq 0: \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \geq 1 > 0$

$x < 0: -x > 0 \Longrightarrow \exp(-x) > 0$

$$\Longrightarrow \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$$

$$\Longrightarrow \exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$e := \exp(1)$ („Eulersche Zahl") $\approx 2{,}71828$

$n \in \mathbb{N}$: $e^n = \exp(n)$ ($\Leftarrow$ Induktion + Additionstheorem)

$$e^n = \underbrace{e\cdot e\cdot e\cdot e\cdots e}_{n}$$

$$e^{-n} = \frac{1}{e^n} = \frac{1}{\exp(n)} = \exp(-n)$$

$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}$ gilt $e^n = \exp(n)$

Somit setzt exp die Funktion $n \mapsto e^n$ auf nicht-ganze n fort.

Wir schreiben auch $e^x := \exp(x)$

Ähnlich zeigt man, dass die Reihen

$$c(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$s(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

absolut konvergieren für $\forall x \in \mathbb{R}$

Wir erhalten so wohldefinierte Funktionen $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ähnlich wie für exp erhält man mit Hilfe des Cauchy-produktes folgende Additionstheoreme:

$$c(x+y) = c(x) \cdot c(y) - s(x) \cdot s(y)$$

$$s(x+y) = s(x) \cdot c(y) - c(x) \cdot s(y)$$

Dies sind aber die bekannten Additionstheoreme für Cosinus und Sinus

Wir def.: $\cos(x) := c(x)$, $\sin(x) := s(x)$

$\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$

$\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$

$$1 = \cos(x-x) = c(x) \cdot c(-x) - s(x) \cdot s(-x)$$

$$1 = \cos^2(x) + \sin^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Funktionen und Stetigkeit

Intuition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$

f ist „stetig" auf (zusammenhängendem) D, wenn sich der Graph von f, d.h. also $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D\}$, ohne absetzen des Stiftes zeichnen lässt.

Def.: $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ bel., ist stetig im Punkt $a \in D$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, a) > 0$, sodass $\forall x \in D$:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Ana

Bsp.: ① $f(x) = b$ konstant ist stetig $\forall a \in \mathbb{R}$

$|f(x)-f(a)| = |b-b| = 0 < \varepsilon$

② $f(x) = x$ ist stetig, wähle $\delta = \varepsilon$

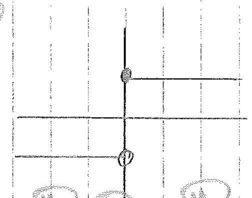
③ Sei $(a_x)_{x\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $f: \mathbb{N} = D \to \mathbb{R}$, $f(x) := a_x$

f ist stetig in jedem $a \in \mathbb{N}$

$\delta := \frac{1}{2}$ $\quad x, a \in D = \mathbb{N}$ $\quad |x-a| < \delta \Rightarrow x = a$

④ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

f ist stetig im Punkt $a = 0$



Alternative Charakterisierung $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ bel.

Satz.: f stetig in $a \in D$ $\Longleftrightarrow$ $\forall$ Folgen (x_n), $x_n \in D$, $x_n \to a$ für $n \to \infty$ $\Longrightarrow f(x_n) \to f(a)$ für $n \to \infty$

Bew.: „$\Longrightarrow$": Sei f stetig in a. Sei (x_n), $x_n \in D$, $x_n \to a$

Sei $\varepsilon > 0$

$\Longrightarrow \exists \delta > 0: |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$\exists N: |x_n - a| < \delta \ \forall n \geq N \Longrightarrow |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon \ \forall n \geq N$

„$\Longleftarrow$": Widerspruchsbeweis. Angenommen f ist unstetig in a

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}: \exists x_n \in D$ mit

$|x_n - a| < \frac{1}{n} = \delta$, mit $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon > 0$

$\Longrightarrow x_n \to a$, aber $f(x_n) \not\to f(a)$

Widerspruch

Über Grenzwerte von Funktionen $D \subset \mathbb{R}$ bel.

Def.: Sei $\xi \in \mathbb{R}$. Eine ε-Umgebung von ξ (in $\mathbb{R}$) ist ein offenes Intervall der Form $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$

$a \in D$ ist ein isolierter Punkt von D, wenn es eine ε-Umgebung U von ξ gibt mit $U \cap D = \{a\}$.

Sei $\xi \in \mathbb{R}$. ξ ist ein Häufungspunkt von D, wenn für jede ε-Umgebung U von ξ gilt:

$$(U \cap D) - \{\xi\} \neq \emptyset$$

Bem.: ξ ist ein Häufungspunkt von D

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ Folge (x_n), $x_n \in D$, $x_n \to \xi$, und $x_n \neq \xi$

Ana   15. Vorlesung: 05.12.14

Grenzwerte von Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}$, ξ ein Häufungspunkt von D und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

Def.: $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \eta :\iff \forall$ Folge $(x_n) \subset D$, $x_n \to \xi$ (für $n \to \infty$) $x_n \neq \xi$ gilt: $f(x_n) \to \eta$ für $n \to \infty$

Aus den Ergebnissen der letzten VO folgt unmittelbar:

Prop.: $f: D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D$

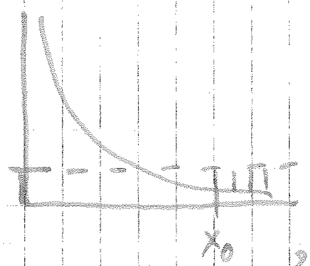
$\iff$ a ist isolierter Punkt von D

oder

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert und $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Grenzwerte $x \to \infty$: $\eta \in \mathbb{R}$

Def.: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \eta :\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 : x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - \eta| < \varepsilon$



Ähnlich $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Bsp.: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+3x+8}{5x^2+4} = \lim \frac{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2})}{x^2(5+\frac{4}{x^2})} = \frac{1}{5}$

Die Algebra der Funktionen $f, g: D \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in D$

Def.: $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$

$\frac{f}{g}: D - \{x \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$

Satz: Ist f und g stetig, dann auch $f+g$, αf, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ auf $D - \{x \mid g(x) = 0\}$

Bew.: Sei $(x_n) \subset D$, $x_n \to a \in D$

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$, da f stetig

$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$, da g stetig

$$\lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \lim (f(x_n) + g(x_n)) = \lim f(x_n) + \lim g(x_n)$$
$$= f(a) + g(a) = (f+g)(a)$$

Ähnlich für αf, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ mit Hilfe der Rechenregeln für konvergente Folgen.

Bsp. $f(x) = x$ stetig, $f(x) = a$ stetig

Satz $\Longrightarrow$ $f(x) = x^2$ stetig (auf ganz $\mathbb{R}$)

Induktion $\Longrightarrow$ $f(x) = x^n$ stetig $\Longrightarrow$ $f(x) = ax^n$ stetig $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$\Longrightarrow$ Polynomfunktionen sind stetig

$\Longrightarrow$ Rationale Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich

Hintereinanderausführung

Satz: Seien $f: D \to \mathbb{R}$ und $g: E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Ist f stetig in $a \in D$ und g stetig in $f(a) \in E$, dann ist $g \circ f$ stetig in a

Bew.: Sei $(x_n) \subset D$, $x_n \to a \in D$

$$f \text{ stetig} \Longrightarrow \underbrace{f(x_n)}_{=\, y_n} \longrightarrow \underbrace{f(a)}_{=\, b}$$

$$y_n \to b \in E \Longrightarrow g(y_n) \to g(b)$$

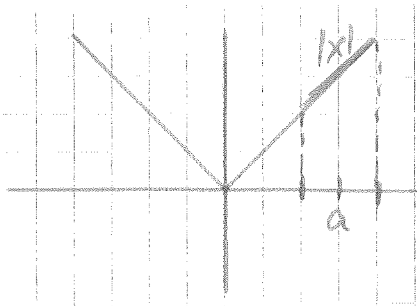
d.h. $g(f(x_n)) \longrightarrow g(f(a))$

Bsp.: $f(x) = |x|$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig

$a = 0$: $x_n \to 0 \Longrightarrow |x_n| \to 0 = |0| \Longrightarrow f$ stetig in 0

$a > 0$: In einer ε-Umgebung U von a ist $f(x) = x$ und daher stetig in a

Anal

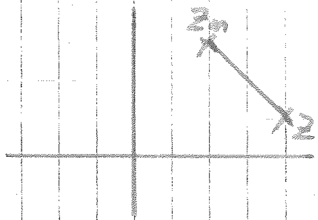


$a < 0$: —— " —— $f(x) = -x$ —— " ——

Um die Stetigkeit von exp, sin, cos zu zeigen, empfiehlt es sich, ins Komplexe überzugehen.

Die Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$

Def.: Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen $z_n \in \mathbb{C}$.
z_n konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$ $:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$:
$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$



Die Rechenregeln für konvergente Folgen gelten auch in $\mathbb{C}$

Prop.: $(z_n) \subset \mathbb{C}$
(z_n) konv. $\Longleftrightarrow$ $(\mathrm{Re}\, z_n)$ und $(\mathrm{Im}\, z_n)$ konvergieren
Wenn $z_n \longrightarrow z_n$, dann $z = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, z_n + i \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, z_n$

Bew.:

"$\Longrightarrow$" Ang. $z_n \longrightarrow z$ Sei $\varepsilon > 0$
$\exists N$: $|z - z_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$
$z_n = x_n + i y_n,\ x_n, y_n \in \mathbb{R}$
$z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$

$|x_n - x| = |\mathrm{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$
$|y_n - y| = |\mathrm{Im}(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

"$\Longleftarrow$" $\underset{\mathrm{Re}\, z_n}{\overset{\shortparallel}{x_n}} \longrightarrow x,\ \underset{\mathrm{Im}\, z_n}{\overset{\shortparallel}{y_n}} \longrightarrow y \Longrightarrow \exists N : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N$
$\exists N' : |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N'$
$z = x + iy$

$\Longrightarrow \forall n \geq \max\{N, N'\}: |z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)|$
$\leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Sei $(z_n) \subset \mathbb{C}$

Die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert
$\Longleftrightarrow$ Die Folge der Partialsummen (s_m) konv.

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} z_n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ <u>absolut</u> konv. $\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konv.

Das Majorantenkriterium & das Quotientenkriterium gelten auch im Komplexen (gleicher Beweis)

$$\Longrightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n}_{\text{konv. abs. } (\Leftarrow \text{ Quot.krit.})} \quad (z \in \mathbb{C})$$

Wir erhalten so $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

Der Satz über Cauchy-Produkte gilt auch in $\mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ Das Additionstheorem für exp gilt auch in $\mathbb{C}$:

$$\boxed{\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

<u>Def.</u>: Sei $D \subset \mathbb{C}$ $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ ist <u>stetig</u> in $a \in D$,
wenn $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: |z - a| < \delta$
$\Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall z \in D$

Die alternative Char. von Stetigkeit ($x_n \overset{\in D}{\longrightarrow} a \Longrightarrow f(x_n) \longrightarrow f(a)$) gilt auch für komplexe Funktionen.

<u>Satz</u>: $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist überall stetig.

<u>Bew.</u>: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (x \in \mathbb{R})}} \frac{x}{1-x} = 0 \Longrightarrow \exists\, 0 < \delta < 1: \frac{\delta}{1-\delta} |\exp(z_0)| < \varepsilon$

Ana

$$|\exp(z)-\exp(z_0)| = |\exp(z_0)\exp(z-z_0)-\exp(z_0)|$$
für $|z-z_0|<\delta$
$$= |\exp(z_0)|\cdot|\exp(z-z_0)-1|$$
$$= |\exp(z_0)|\cdot\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-z_0)^n\right|$$
$$\le |\exp(z_0)|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\delta^n \le |\exp(z_0)|\sum_{n=1}^{\infty}\delta^n$$
$$= |\exp(z_0)|\cdot\frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$$

$e^z := \exp(z)$

$y\in\mathbb{R}$ $\quad e^{iy} = 1+iy+\frac{1}{2!}i^2y^2+\frac{1}{3!}i^3y^3+\frac{1}{4!}i^4y^4+\frac{1}{5!}i^5y^5+\dots$
$$=\left(1-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{4!}y^4\mp\dots\right)+i\left(y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5\mp\dots\right)$$
$$=\cos y \quad + i\sin y$$

$\Longrightarrow y\in\mathbb{R}$ $\quad \boxed{e^{iy} = \cos y + i\sin y}$

$x,y\in\mathbb{R}$

$e^{i(x+y)} = \cos(x+y)+i\sin(x+y)$

$\overset{\shortparallel}{e^{ix}\cdot e^{iy}} = (\cos x+i\sin x)\cdot(\cos y+i\sin y)$
$$= (\cos x\cos y-\sin x\sin y)+i(\sin x\cos y+\cos x\sin y)$$

Prop. $\cos,\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sind überall stetig.

Bew. $(x_n)\subset\mathbb{R}$, $x_n\to a\in\mathbb{R}$.

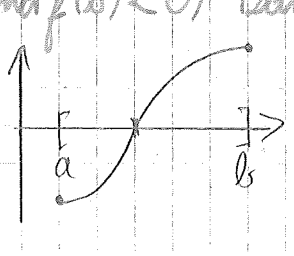
$\Longrightarrow ix_n\to i\cdot a \quad (n\to\infty)$

$\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ist stetig $\Longrightarrow \underbrace{\exp(ix_n)}_{\cos x_n+i\sin x_n}\to\underbrace{\exp(ia)}_{\cos a+i\sin a}$, $n\to\infty$

Prop 1 $\Longrightarrow \cos x_n\to\cos a$ und $\sin x_n\to\sin a$

16. Vorlesung $\qquad$ 10.12.14

Nullstellensatz: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $f(a)<0$ und $f(b)>0$ (oder $f(a)>0$ und $f(b)<0$) Dann besitzt f eine Nullstelle in (a,b)



<u>Bew.</u>: Sei $f(a) < 0$ u. $f(b) > 0$

$A := \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq 0\}$

$a \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$ & beschränkt

$\Rightarrow \exists\, s := \sup A$

$\exists\, (x_n) \subset A,\ x_n \to s$. f stetig $\Rightarrow$

$\underbrace{f(x_n)}_{\leq 0} \to f(s) \Rightarrow f(s) \leq 0$

$(\to s \in A,\ s < b)$

Ang. $f(s) < 0 \Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{2}|f(s)| > 0$

f stetig $\Rightarrow \exists\, 0 < \delta < b - s$:

$|x - s| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(s)| < \varepsilon$

$x_0 := s + \frac{\delta}{2} \Rightarrow |f(x_0) - f(s)| < \varepsilon$

$\Rightarrow f(x_0) < f(s) + \varepsilon = f(s) - \frac{1}{2} f(s) = \frac{1}{2} f(s) < 0$

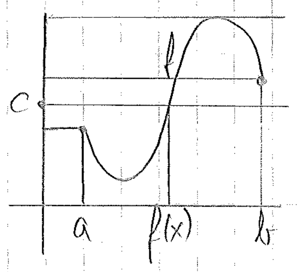
$\Rightarrow x_0 \in A,\ x_0 > s$ Widerspr.

$\Rightarrow f(s) = 0$

Korollar (<u>Zwischenwertsatz</u>)   muss nicht abgeschlossen sein!

Eine stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

$\hat{f}(x) := f(x) - c$



Korollar: Sei I ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ wieder ein Intervall

<u>Def.</u>: $A \subset \mathbb{R}$ ist <u>abgeschlossen</u>, wenn

$\forall (x_n) \subset A$ mit $x_n \to x \in \mathbb{R}$ gilt: $x \in A$

<u>Bsp.</u>: $[a,b]$, $[a,\infty)$ sind abgeschlossen

$(a,b]$ ist nicht abgeschlossen

Ana

Bem.: $M \subset \mathbb{R}$ ist offen, wenn $\mathbb{R} - M$ abgeschl. ist

Def.: $K \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, wenn jede Folge $(x_n) \subset K$ eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in K liegt.

Satz.: K kompakt $\Leftrightarrow$ K abgeschlossen und beschränkt

Bew.: „$\Leftarrow$": Sei K abg. & beschr. Sei $(x_n) \subset K$

Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow$ $\exists$ konv. Teilfolge $x_{n_k} \to x$, $k \to \infty$

K abgeschlossen $\Rightarrow x \in K$

„$\Rightarrow$": Sei nun K kompakt.

Wäre K unbeschränkt, dann $\forall n: \exists x_n \in K: |x_n| > n$

(x_n) unbeschr. Jede Teilfolge von (x_n) ist auch unbeschränkt, insbesondere divergent.

$\Rightarrow$ K beschränkt.

K abgeschl.: $(x_n) \subset K$, $x_n \to x \in \mathbb{R}$

K kompakt $\Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to x' \in K$, $x = x' \in K$

Bsp.: $[a,b]$ ist kompakt. $(a < b,\ a, b \in \mathbb{R})$

$\left.\begin{array}{l}[a,\infty)\\ (a,b]\end{array}\right\}$ nicht kompakt

Satz.: Sei K kompakt & $f: K \to \mathbb{R}$ stetig

Dann ist $f(K)$ kompakt.

Bew.: Sei $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in K$, eine bel. Folge in $f(K)$.

K komp. $\Rightarrow x_{n_k} \to x \in K \quad (k \to \infty)$

f stetig $\Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(K)$

Extremalsatz: Sei K kompakt und $f: K \to \mathbb{R}$ stetig

Dann nimmt die Funkt. f auf K ihr Maximum und ihr Minimum an.

Bew.: K ist abgeschl. & beschr.

$f(K)$ beschr. & $f(K) \neq \emptyset \Longrightarrow \exists M := \sup f(K)$

$m := \inf f(K)$

$f(K)$ abgeschl. $\Longrightarrow m, M \in f(K)$

$\exists\, x_{min}, x_{max} \in K$ mit $M = f(x_{max})$

$m = f(x_{min})$

Monotonie & Umkehrfunktion

Def.: Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

$$f \text{ ist } \begin{cases} \text{monoton wachsend} \\ \text{streng mon. wachsend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng mon. fallend} \end{cases}, \text{ wenn } \begin{cases} f(x) \leq f(x') \\ f(x) < f(x') \\ f(x) \geq f(x') \\ f(x) > f(x') \end{cases}, \forall x < x',\ x, x' \in D$$

Bsp.: ① $k = 1, 2, 3, \ldots$ $f: [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^k$ ist streng mon. wachsend

② $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng mon. wachsend:

$$x < x',\ \exp\underbrace{(x'-x)}_{>0} = 1 + \underbrace{(x'-x)}_{>0} + \frac{1}{2!}\underbrace{(x'-x)^2}_{>0} + \ldots > 1$$

$$\exp(x') = \exp(x'-x+x) = \underbrace{\exp(x'-x)}_{>1} \cdot \exp(x) > \exp(x)$$

Satz: Sei I ein Intervall, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige streng monotone Funktion. Dann ist $f: I \longrightarrow f(I)$ eine Bijektion und die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist wieder stetig u. streng mon.

Bew.: f str. mon. $\Longrightarrow f$ injektiv $\Longrightarrow f: I \xrightarrow[\text{bij.}]{} f(I)$

$f(I)$ ist ein Intervall

$$\underset{f^{-1}(f(x))}{\overset{\shortparallel}{x}} < \underset{f^{-1}(f(x'))}{\overset{\shortparallel}{x'}} \Longleftrightarrow f(x) < f(x') \Longrightarrow f^{-1} \text{ ist str. mon.}$$

Ana

Ist I ein Punkt, dann ist f^{-1} stetig

Wir nehmen an: I kein Punkt

Sei $b \in f(I)$, $b = f(a)$, $a \in I$

Fall 1: a ist kein Randpunkt von I

$\exists r > 0: [a-r, a+r] \subset I$

Sei $0 < \varepsilon \leq r$ $\quad a-\varepsilon, a+\varepsilon \in I$

$$f(a-\varepsilon) < b < f(a+\varepsilon)$$

$\Rightarrow \exists \delta > 0: y \in (b-\delta, b+\delta) \subset (f(a-\varepsilon), f(a+\varepsilon))$

$f(a-\varepsilon) < y < f(a+\varepsilon) \Rightarrow f^{-1}(f(a-\varepsilon)) < f^{-1}(y) < \underbrace{f^{-1}(f(a+\varepsilon))}_{a+\varepsilon}$

$\Rightarrow |f^{-1}(y) - \underbrace{a}_{f^{-1}(b)}| < \varepsilon \Rightarrow f^{-1}$ ist stetig an der Stelle b

Fall 2: Sagen wir a ist linker Randpunkt von I

$[a, a+r] \subset I$

$f(a) \leq b \leq f(a+\varepsilon)$

17. Vorlesung: 12.12.14

Uneigentliche Grenzwerte

$f: D \to \mathbb{R}$, sei ξ ein Häufungspunkt von D.

$\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = +\infty \;:\Leftrightarrow\; \forall M > 0 \; \exists \delta > 0:$

$$|x-\xi| < \delta \Rightarrow f(x) \geq M \quad \forall x \in D, x \neq \xi$$

$= -\infty \;:\Leftrightarrow\; \forall M > 0 \; \exists \delta > 0:$

$$|x-\xi| < \delta \Rightarrow f(x) < -M \quad \forall x \in D, x \neq \xi$$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty \;:\Leftrightarrow\; \forall M > 0 \quad \exists x_0: f(x) \geq M \quad \forall x \geq x_0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \;:\Leftrightarrow\; \forall M > 0 \quad \exists x_0: f(x) \leq -M \quad \forall x \leq x_0$

Bsp.: $\lim\limits_{x \to \infty} x = \infty \qquad \lim\limits_{x \to \infty} x^k = \infty, \; k = 2, 3$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \neq +\infty$

$$f(x) = \exp(x) = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{\geq 0} + \underbrace{\ldots}_{\geq 0} \geq 1 + x$$

Für $x \geq 0$:

$$\lim_{x \to \infty} (1+x) = +\infty \implies \lim_{x \to \infty} e^x = +\infty$$

$$0 < \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \leq \frac{1}{1+x} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

<u>Anwendungen des Zwischenwertsatzes u. des Umkehrsatzes:</u>

① <u>Der natürliche Logarithmus</u>

$f(x) = \exp(x)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f ist stetig, streng monoton wachsend

$$\lim_{x \to \infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Zwischenwertsatz $\Longrightarrow (0, \infty) \subset \exp(\mathbb{R})$

$\exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \implies (0, \infty) = \exp(\mathbb{R})$

Umkehrsatz $\implies \exists$ Umkehrfunktion $\exp^{-1}: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, ist stetig

<u>Def.</u>: $\log(x) := \exp^{-1}(x)$,

$\log: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig.

$\log(1) = 0$, $\log(e) = 1$

$\log(y_1 \cdot y_2) = \log(e^{x_1} \cdot e^{x_2}) = \log(e^{x_1 + x_2})$

$(y_1, y_2 > 0) \qquad = x_1 + x_2 = \log(y_1) + \log(y_2)$

Sei $a > 0$. Heuristik: $a = e^{\log a}$

$\implies a^x = (e^{\log(a)})^x = e^{x \log(a)}$

suggeriert:

<u>Def.</u>: $\boxed{a^x := \exp(x \log(a))}$ $\quad a > 0$

62 $\quad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \ (a^x)^y = a^{xy}, \ a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

Ana I

② Stetigkeit von Wurzelfunktionen

$f(x) = x^k$, $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig & streng monoton wachsend
$(k = 2,3,\dots)$

$f[0,\infty) = [0,\infty)$ (Zwischenwertsatz)

$(f(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty)$

Umkehrsatz $\Rightarrow$ $\exists$ Umkehrfunkt. $f^{-1}: [0,\infty) \xrightarrow{\text{stetig}} [0,\infty)$

$x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x} := f^{-1}(x) \Rightarrow \sqrt[k]{x}$ stetig

③ Pi π: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + R(x)$

$R(x) = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \mp \dots$

$= \frac{x^4}{4!}\left(1 - \underbrace{\frac{x^2}{5\cdot 6}}_{=a_1} + \underbrace{\frac{x^4}{5\cdot6\cdot7\cdot8}}_{=a_2} \mp \dots\right)$

$|x| \leq 5$: $|x|^2 < 56 \Rightarrow a_1 < 1$

$1 > a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

$\underbrace{(1-a_1)}_{>0} + \underbrace{(a_2-a_3)}_{>0} + \dots \geq 0$

$\underbrace{(a_1-a_2)}_{>0} + \underbrace{(a_2-a_3)}_{>0} + \dots \geq 0$

$1 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \dots \leq 1$

$\Rightarrow |R(x)| \leq \frac{x^4}{4!}$ für $|x| \leq 5$

$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2} + R(2) = -1 + R(2)$

$|\cos(2) + 1| \leq |R(2)| \leq \frac{2}{3}$

$\cos(2) \leq -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0$

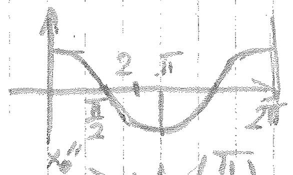
Andererseits ist $\cos(0) = 1 > 0$

Nullstellensatz $\Rightarrow N := \{x \in (0,2) \mid \cos x = 0\} \neq \emptyset$

N nichtleer & beschränkt $\Rightarrow \exists x_0 := \inf N$

$\Rightarrow \forall\, 0 \le x < x_0 : \cos(x) \neq 0 \quad \cos(x_0) = 0$ ($\Leftarrow$ Stetigkeit von cos)

Def.: $\boxed{\pi := 2x_0}$



$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ Additionstheoreme $\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

Differenzierbarkeit von Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, ξ ein Häufungspunkt von D, $\xi \in D$. Wir sagen f ist <u>differenzierbar an der Stelle ξ</u>, wenn

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \in \mathbb{R} \qquad h = x - \xi$$

existiert. (Im Grenzwert ist $x \neq \xi$, $h \neq 0$)

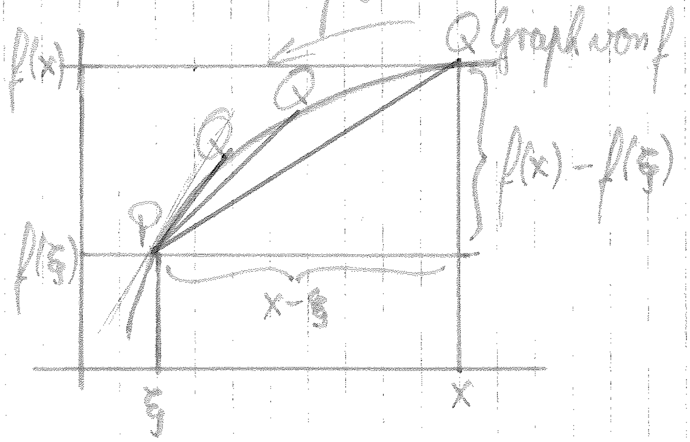
$f'(\xi)$ heißt dann <u>Ableitung</u> von f an der Stelle ξ.

f ist <u>differenzierbar auf D</u>, wenn f an jeder Stelle $\xi \in D$ differenzierbar ist.

(<u>Bem.</u>: In diesem Fall kann D keine isolierten Punkte besitzen)

Man erhält dann eine neue Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$.

<u>Geometrische Interpretation</u>:



$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \text{\underline{Steigung} der Sekante } \overline{PQ}$$

Für $Q \to P$ ist die Grenzgerade der Sekanten $\overline{PQ}$ die Tangente an den Graphen von f an der Stelle P

Ana

$\Longrightarrow f'(\xi) = \lim_{Q \to P} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ = Steigung der Tangente in P

Schreibweisen: $\frac{df}{dx}(\xi) := f'(\xi)$ $\quad \Delta f = f(x) - f(\xi)$

$(Df)(\xi) \quad (D_x f)(\xi)$ $\quad \Delta x = x - \xi$

(„Operator" $D = \frac{d}{dx}$) $\quad \lim \frac{\Delta f}{\Delta x}$

Prop. Ist f diff'bar in ξ, dann ist f stetig in ξ

Bew.: $\lim_{x \to \xi} (f(x) - f(\xi))$

$= \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \cdot (x-\xi)$

$= \underbrace{\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{= f'(\xi)} \cdot \underbrace{\lim (x-\xi)}_{=0}$

$= f'(\xi) \cdot 0 = 0$

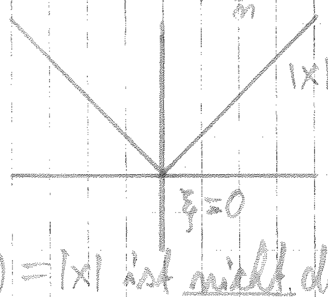
Bsp.: Die Umkehrung gilt nicht.

$f(x) = |x|$, ist stetig.

Für $\xi = 0$: $\frac{|x|-|\xi|}{x-\xi}$

- $x_n = \frac{1}{n}$: $\frac{|\frac{1}{n}|}{\frac{1}{n}} = +1$
- $x_n = -\frac{1}{n}$: $\frac{|-\frac{1}{n}|}{-\frac{1}{n}} = -1$

$\Bigg\} \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \nexists$



$f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar an der Stelle $\xi = 0$

Bsp.: ① $f(x) = c$ konst.

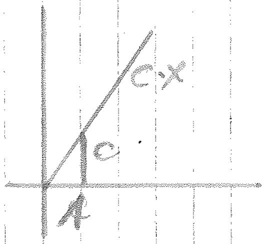
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim \frac{c-c}{h} = 0$

$\frac{d}{dx}(c) = 0$

② $f(x) = c \cdot x$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(c(x+h) - cx) = \lim \frac{ch}{h} = c$

$\frac{d}{dx}(c \cdot x) = c$



③ $f(x) = x^k,\ k = 2, 3, \ldots$

$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{x^k - \xi^k}{x - \xi} = k \cdot \xi^{k-1}$

Übungen

$\Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}}$

④ $f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \lim \frac{1}{h} \frac{x-(x+h)}{(x+h)x} = \lim_{h \to \infty} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$

$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}}$

18. Vorlesung: 17.12.1

Defn: $D \subset \mathbb{R}$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$

Dann heißt f diff.bar in $a \in D$, falls der Grenzwert

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(a)}{h}$

Im Falle der Existenz des Grenzwertes heißt

$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ die Ableitung von f an der Stelle a.

Abkürzung: f diffbar in $a \in D \Longleftrightarrow$: f diff.bar in $a \in D$?

Bsp.: (Ableitung d. Exp.fkt)

Die Fkt $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ diff.bar und $\exp'(x) = e^x$

Bew.: Sei $a \in \mathbb{R}$ bel.

Betrachte $\frac{e^x - e^a}{x - a} = \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \frac{e^a \cdot e^h - e^a}{h}$

Ana

$= e^{a} \cdot \frac{e^{h}-1}{h} \xrightarrow[\text{GWS}]{h \to 0} e^{a} \cdot 1 = e^{a}$

nach Aufg. 8.1 (b)

Bsp.: (Die Abl. des Sinus)

Die Fkt $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ ist diff.bar auf ganz $\mathbb{R}$ und $\sin'(x) = \cos(x)$

Bew.: Zunächst: $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Wir setzen $u := \frac{x+y}{2}$, $v := \frac{x-y}{2}$. Dann gilt:

$u + v = x$, $u - v = y$

$\sin(x) - \sin(y) = \sin(u+v) - \sin(u-v)$

Additionstheorem für Sinus

$$\sin(u \pm v) = \sin(u)\cos(v) \pm \cos(u)\sin(v)$$

$\Rightarrow \sin(u+v) - \sin(u-v)$

$= \underbrace{\sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)}_{} - \underbrace{(\sin(u)\cos(v) - \cos(u)\sin(v))}_{}$

$= 2\cos(u)\sin(v) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Betrachte nun den Differenzenquotienten des Sinus:

$$\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \frac{2}{h} \cdot \cos\left(\frac{a+h+a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a+h-a}{2}\right)$$

$$= \cos\left(a + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}$$

8.1 (c): $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} = 1$

$\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} \xrightarrow[\uparrow]{h \to 0} \cos(a) \cdot 1 = \cos(a)$ $\square$

cos stetig

Satz 1 (Äquivalente Charakterisierung der Abl.)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist diff.bar in $a \in D$

(ii) $\exists m_a \in \mathbb{R} : \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - m_a(x-a)}{x-a} = 0$

(iii) $\exists m_1 \in \mathbb{R}$ und es gibt eine Abb. $r : D \to \mathbb{R}$, die in $a \in D$ stetig ist mit $r(a) = 0$, s.d.
$f(x) = f(a) + m_a(x-a) + r(x) \cdot (x-a) \quad \forall x \in D$

In (ii) und (iii) ist $m_a = f'(a)$

Bew.: $\underline{(i) \to (ii)}$: Setze $m_a = f'(a)$ und wende GWS an.

$\underline{(ii) \to (iii)}$: Setze $r : D \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)-m_a(x-a)}{x-a} & \text{für } x \neq a \\ 0 & \text{für } x = a \end{cases}$

Nach Vor. in (ii) gilt:

$r(x) \overset{x \neq a}{=} \frac{f(x)-f(a)-m_a(x-a)}{x-a} \xrightarrow{x=0} 0 = r(a)$

$\Rightarrow r$ stetig in a und $r(a) = 0$

und $f(x) = f(a) + m_a(x-a) + r(x)(x-a)$

$\underline{(iii) \to (i)}$: Nach Vor. gilt:

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m_a + r(x) \xrightarrow{x \to a} m_a + r(a) = m_a$ $\square$

Kor.: $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

f diffbar in $a \in D \Rightarrow f$ stetig in $a \in D$

Bew.: $f(x)$ ist nach (i) $\Leftrightarrow$ (iii)

$f(x) = f(a) + m_a \underbrace{(x-a)}_{\to 0} + \underbrace{r(x)}_{\to 0} \underbrace{(x-a)}_{\to 0} \xrightarrow{x \to a} f(a)$ $\square$

Satz 2 (Rechenregeln für Ableitungen)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, beide diffbar in $a \in D$. Dann

(i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist die Fkt $\alpha f + \beta g : D \to \mathbb{R}$ diffbar in $a \in D$ und $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$

<u>Linearität</u>

(ii) <u>Produktregel</u>

Die Abb. $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ $(x \mapsto f(x) g(x))$ ist diffbar in

(Ana)

$a \in D$ und es gilt:

$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

(iii) <u>Quotientenregel</u>

Falls $g(a) \neq 0$, ist die Abb. $\frac{f}{g} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$,

$\tilde{D} := D \cap \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ diffbar in $a \in D$ und es gilt: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) g(a) - f(a) g'(a)}{(g(a))^2}$

Bew.: (i) Folgt direkt aus den GWS:

$$\frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(a)}{x - a} = \alpha \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \beta \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

(ii) Der Differenzenquotient von $f \cdot g$ ist

$$\frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x)}{x - a} + \frac{f(a) g(x) - f(a) g(a)}{x - a}$$

$$= g(x) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$\xrightarrow{x \to a}$ $g(a)$ (nach Vor.: g ist stetig in a)

$\xrightarrow[\text{GWS}]{x \to a} g(a) f'(a) + f(a) g'(a)$

(iii) $g(a) \neq 0$ und g stetig in $a \Rightarrow \exists \delta > 0$:

$\forall x \in (a - \delta, a + \delta): g(x) \neq 0$

[$g(a) \neq 0 \Rightarrow |g(a)| > 0 \Rightarrow \left|\frac{g(a)}{2}\right| =: \varepsilon > 0$

g stetig $\Rightarrow \exists \delta > 0: \forall x \in D: |x - a| < \delta$

dann ist $|-g(x) + g(a)| < \varepsilon = \frac{|g(a)|}{2}$

$\Rightarrow |g(x)| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} |g(x)|$

$\Rightarrow g(x) > |g(a)| - \varepsilon = \frac{|g(a)|}{2} > 0$

(dies gilt $\forall x \in (a - \delta, a + \delta)$)]

Dann gilt $\forall x \in (a - \delta, a + \delta), x \neq a$:

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{x - a} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a}$$

$$= \frac{1}{g(x) \cdot g(a)} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right]$$

$$\xrightarrow[\text{GWS}]{x\to a} \frac{1}{(g(a))^2}\left[f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\right] \qquad \square$$

Satz 3 (Kettenregel)

Seien $D, B \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar in $a \in D$ und $f(D) \subseteq B$, sowie $g: B \to \mathbb{R}$ diffbar in $b \in f(a)$. Dann ist die Abb. $g\circ f: D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(f(x))$ diffbar in $a \in D$ und es gilt:

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a)$$

Bew.: Nach Satz 1 gibt es Abb $r: D \to \mathbb{R}$, $s: B \to \mathbb{R}$ s.d. r in $a \in D$ stetig mit $r(a) = 0$ und s in $b := f(a)$ stetig mit $s(b) = 0$ und

(I) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)(x-a) \quad \forall x \in D$, sowie

(II) $g(y) = g(b) + g'(b)(y-b) + s(y)(y-b) \quad \forall y \in B$

Wenn wir eine Abb. $t: D \to \mathbb{R}$ finden, die stetig in $a \in D$ ist mit $t(a) = 0$, s.d.

$(g\circ f)(x) = g\cdot f(a) + [g'(f(a))\cdot f'(a)](x-a) + t(x)(x-a)$

ist der Satz bewiesen (folgt aus Satz 1)

(I) + (II) $(g\circ f)(x)$

$= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))\,(f(x) - f(a))$

$= (g\circ f)(a) + g'(f(a))\,f'(a)(x-a) + t(x)(x-a)$

mit $t(x) = s(f(x)) + f(x) - f(a) + r(x)\,g'(f(a))$

Da $f, g\circ f, r$ stetig in a, ist t stetig in a und es gilt: $t(x) \xrightarrow{x\to a} s(f(a))\cdot(f(a) - f(a)) + r(a)\,g'(f(a)) = 0$

$\square$

Um die Abl des log zu Best. verwenden wir folgenden Satz: