Theoretische Physik 4 (Quantentheorie)

Sommersemester 2014

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1: Vertauschungsrelationen für Vektoroperatoren

Sei $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ ein Operator, dessen Komponenten sich bei räumlichen Drehungen wie die eines Vektors transformieren. Dann gilt

$$[L_i, A_j] = \mathrm{i}\hbar\, \epsilon_{ijk} A_k \,.$$

Beweisen Sie die folgenden Vertauschungsrelationen für $A_\pm = A_1 \pm \mathrm{i}A_2$ und A_3:

(a) $[L_3, A_\pm] = \pm\hbar A_\pm$ und $[L_3, A_3] = 0\,,$

(b) $[L^2, A_\pm] = 2\hbar^2 A_\pm \pm 2\hbar(A_\pm L_3 - A_3 L_\pm)\,,$

(c) $[L^2, A_3] = 2\hbar^2 A_3 + \hbar(A_- L_+ - A_+ L_-)\,.$

+6 Punkte.

Aufgabe 12.2: Tensorprodukt

Seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

Dann lässt sich das Tensorprodukt $a \otimes b \in \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ als Spaltenvektor darstellen:

$$a \otimes b \;=\; \begin{pmatrix} a_1 b \\ a_2 b \\ \vdots \\ a_m b \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ \vdots \\ a_1 b_n \\ a_2 b_1 \\ \vdots \\ a_2 b_n \\ \vdots \\ a_m b_1 \\ \vdots \\ a_m b_n \end{pmatrix} \,.$$

(a) Berechnen Sie $a \otimes b$ und $b \otimes a$ für $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(b) Seien $a, c \in \mathbb{C}^m$ und $b, d \in \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie: $\langle a \otimes b \mid c \otimes d \rangle = \langle a \mid c \rangle \langle b \mid d \rangle$.

(c) Berechnen Sie $A \otimes \sigma_2$ und $\sigma_2 \otimes A$ als 4×4–Matrix für $A = \begin{pmatrix} 9 & 2-\mathrm{i} \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(d) Berechnen Sie XY und $X - Y$ als 4×4–Matrizen, wobei

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

+4 Punkte.

Aufgabe 12.3: Addition von zwei Spin-1/2-Operatoren

Die Drehimpuls-Operatoren für ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen sind gegeben durch $\frac{\hbar}{2}\sigma_k$ mit

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die Operatoren $J_k = \frac{\hbar}{2}(\sigma_k \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sigma_k)$.

(a) Berechnen Sie J_3 und $\boldsymbol{J}^2$ als 4×4-Matrizen.

(b) Geben Sie die gemeinsamen Eigenvektoren und zugehörigen Eigenwerte von J_3 und $\boldsymbol{J}^2$ an. Verwenden Sie dabei die folgende Notation:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|\downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

+5 Punkte.

Aufgabe 12.4: Wahrscheinlichkeitsstromdichte für Teilchen im e.-m. Feld

Der Hamiltonoperator für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld lautet

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{X})\right)^2 + e\phi(t, \boldsymbol{X}).$$

Bestimmen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsstromdichte für das Teilchen im elektromagnetischen Feld.

+5 Punkte.

Abgabe am 15.07.2014. Viel Erfolg!