Theoretische Physik 4 (Quantentheorie)

Sommersemester 2014

Lösung der Präsenzübung 7

Lösung P7.1: Impulsdarstellung der Schrödingergleichung

Wir definieren

$$\hat{\psi}(t,\mathbf{k}) \overset{\text{def}}{=} \langle \mathbf{k} \,|\, \psi(t) \rangle = \int \mathrm{d}^d\mathbf{x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, \psi(t,\mathbf{x})\,. \tag{1}$$

Dann ergeben sich

$$\mathrm{i}\hbar \langle \mathbf{k} |\, \frac{\mathrm{d}|\psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(t,\mathbf{k})\,, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2m} \langle \mathbf{k} \,|\, \mathbf{P}^2 \,|\, \psi(t) \rangle = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m}\, \hat{\psi}(t,k)\,, \tag{3}$$

wobei wir die Hermitezität des Impulsoperators verwendet haben. Für den Potentialterm erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{k} \,|\, V(\mathbf{X}) \,|\, \psi(t) \rangle &= \int \mathrm{d}^d\mathbf{x}\, \langle \mathbf{k} \,|\, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | V(\mathbf{X}) | \psi(t) \rangle & (4)\\
&= \int \mathrm{d}^d\mathbf{x}\, \langle \mathbf{k} \,|\, \mathbf{x} \rangle\, V(\mathbf{x})\, \langle \mathbf{x} \,|\, \psi(t) \rangle & (5)\\
&= \int \mathrm{d}^d\mathbf{x}\, \text{đ}^d\mathbf{k}'\, \langle \mathbf{k} \,|\, \mathbf{x} \rangle\, V(\mathbf{x})\, \langle \mathbf{x} | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' \,|\, \psi(t) \rangle & (6)\\
&= \int \text{đ}^d\mathbf{k}' \left(\int \mathrm{d}^d\mathbf{x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, V(\mathbf{x})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \right) \hat{\psi}(t,\mathbf{k}') & (7)\\
&= \int \text{đ}^d\mathbf{k}'\, \hat{V}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\, \hat{\psi}(t,\mathbf{k}') & (8)
\end{aligned}$$

(d.h. der Multiplikationsoperator in der Orstdarstellung geht in einen Faltungsoperator in der Impulsdarstellung über). Wir erhalten somit

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(t,\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m}\, \hat{\psi}(t,\mathbf{k}) + \int \text{đ}^d\mathbf{k}'\, \hat{V}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\, \hat{\psi}(t,\mathbf{k}')\,. \tag{9}$$