Theoretische Physik 4 (Quantentheorie)

Sommersemester 2014

Lösung der Präsenzübungen 6

Lösung P6.1: Anfangswertproblem

$$U(t) = U_0 \, \mathrm{e}^{tB} \, .$$

Lösung P6.2: Potentialtopf in endlicher Kugel

Da wir nur die $\ell = 0$–Lösungen betrachten, reduziert sich das Problem auf die Untersuchung der radialen Schrödingergleichung. Aufgrund der Randbedingung $\psi(\mathbf{x}) = 0$ für $|\mathbf{x}| = R$ wird das ganze Spektrum diskret, d.h. es gibt keine Streulösungen der Schrödingergleichung mehr, sondern nur noch gebundene Zustände mit definierten Energien.

Sei V_0 die Tiefe des Potentialtopfs. Die Lösungen mit $0 < E < V_0$ ergeben sich aus dem Ansatz

$$\psi(r) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}, & 0 < r < a, \\ C\mathrm{e}^{\kappa r} + D\mathrm{e}^{-\kappa r}, & a < r < R, \end{cases}$$

wobei $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ und $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. Im Gegensatz zum einfachen Potentialtopf ist die exponentiell anwachsende Lösung $C\mathrm{e}^{\kappa r}$ für $r > R$ auch erlaubt, sofern

$$C\mathrm{e}^{\kappa R} + D\mathrm{e}^{-\kappa R} = 0$$

erfüllt ist. Es ändern sich daher die Anschlussbedingungen der Wellenfunktion bei $r = a$ und somit auch die Energieeigenwerte.