Theoretische Physik 4 (Quantentheorie)

Sommersemester 2014

Lösung der Präsenzübungen 5

Lösung P5.1: Potentialstufe und Potentialbarriere

(a) Die Wellenzahlen k und q sind gegeben durch

$$k = \sqrt{2mE}/\hbar\,, \qquad q = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar\,. \tag{1}$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen für ψ und ψ' bei $x = 0$ ergeben sich

$$1 + R = T, \qquad \mathrm{i}k(1 - R) = \mathrm{i}qT, \tag{2}$$

und somit

$$R = \frac{k - q}{k + q}\,, \qquad T = \frac{2k}{k + q}\,. \tag{3}$$

Um die physikalische Bedeutung von R und T zu verstehen, berechnen wir die Wahrscheinlichkeits-Stromdichten: Für $x < 0$

$$j(x) = \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}} \Big[\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + R^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\big)(\mathrm{i}k)\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\big) - \text{c.c.} \Big] \tag{4}$$

$$= \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}} \Big[\mathrm{i}k\big(1 - |R|^2 - R\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kx} + R^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}\big) - \text{c.c.} \Big] \tag{5}$$

$$= \frac{\hbar k}{m} \left(1 - |R|^2\right) \tag{6}$$

$$= j_{\text{ein}} + j_{\text{refl}} \tag{7}$$

und für $x > 0$

$$j(x) = \frac{\hbar q}{m} |T|^2 = j_{\text{trans}}\,. \tag{8}$$

Hierbei haben wir die Stromdichten für $x < 0$ und $x > 0$ in einfallende, reflektierte und transmittierte Stromdichten zerlegt. Damit erhält man als Reflexions- und Transmissionskoeffizienten r und t:

$$r = \frac{j_{\text{refl}}}{j_{\text{ein}}} \equiv |R|^2\,; \qquad t = \frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{ein}}} \equiv \frac{q}{k} |T|^2\,. \tag{9}$$

(b) Die Anschlussbedingungen bei $x = -a$ lauten

$$A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka} + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka} = C\mathrm{e}^{\kappa a} + D\mathrm{e}^{-\kappa a}\,, \tag{10}$$

$$\mathrm{i}k\big(A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka} - B\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka}\big) = -\kappa\big(C\mathrm{e}^{\kappa a} - D\mathrm{e}^{-\kappa a}\big). \tag{11}$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}ka} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka} & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\kappa a} & \mathrm{e}^{-\kappa a} \\ \frac{\mathrm{i}\kappa}{k}\,\mathrm{e}^{\kappa a} & \frac{-\mathrm{i}\kappa}{k}\,\mathrm{e}^{-\kappa a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ka} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}ka} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka} & -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\kappa a} & \mathrm{e}^{-\kappa a} \\ \frac{\mathrm{i}\kappa}{k}\,\mathrm{e}^{\kappa a} & \frac{-\mathrm{i}\kappa}{k}\,\mathrm{e}^{-\kappa a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M(a) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \tag{14}$$

$$M(a) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\mathrm{i}\kappa}{k}\right) \mathrm{e}^{\kappa a + \mathrm{i}ka} & \left(1 - \frac{\mathrm{i}\kappa}{k}\right) \mathrm{e}^{-\kappa a + \mathrm{i}ka} \\ \left(1 - \frac{\mathrm{i}\kappa}{k}\right) \mathrm{e}^{\kappa a - \mathrm{i}ka} & \left(1 + \frac{\mathrm{i}\kappa}{k}\right) \mathrm{e}^{-\kappa a - \mathrm{i}ka} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Die Anschlussbedingung bei $x = a$ lautet analog

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = M(-a) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Für den Zusammenhang zwischen (A, B) und (F, G) ergibt sich somit

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M(a) M(-a)^{-1} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}. \tag{17}$$