

Theoretische Physik 4 (Quantentheorie)

Sommersemester 2014

Lösung der Präsenzübungen 2

Lösung P2.1: Projektionsoperator

Wir zeigen zunächst, dass $(P_N)^\dagger = P_N$ gilt:

$$\langle \phi | P_N \psi \rangle = \left\langle \phi \left| \sum_n \langle \phi_n | \psi \rangle \phi_n \right. \right\rangle \quad (1)$$

$$= \sum_n \langle \phi | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \psi \rangle \quad (2)$$

$$= \left\langle \sum_n \langle \phi_n | \phi \rangle \phi_n \left| \psi \right. \right\rangle \quad (3)$$

$$= \langle P_N \phi | \psi \rangle. \quad (4)$$

Hierbei haben wir die Linearität des Skalarprodukts ausgenutzt sowie die Antisymmetrie unter komplexer Konjugation, $\langle \phi | \phi_n \rangle = \langle \phi_n | \phi \rangle^*$. Weiterhin gilt

$$(P_N)^2 \psi = P_N \left(\sum_n \langle \phi_n | \psi \rangle \phi_n \right) \quad (5)$$

$$= \sum_m \left\langle \phi_m \left| \sum_n \langle \phi_n | \psi \rangle \phi_n \right. \right\rangle \phi_m \quad (6)$$

$$= \sum_{m,n} \langle \phi_m | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \psi \rangle \phi_m \quad (7)$$

Unter Verwendung von $\langle \phi_m | \phi_n \rangle = \delta_{n,m}$ ergibt sich

$$(P_N)^2 \psi = \sum_n \langle \phi_n | \psi \rangle \phi_n = P_N \psi \quad (8)$$

für beliebige Vektoren ψ , somit $(P_N)^2 = P_N$.

Lösung P2.2: Potenzreihenansatz beim harmonischen Oszillator

Zur Lösung der (reskalierten) Schrödingergleichung

$$-\phi''(\xi) + \frac{\xi^2}{4} \phi(\xi) = \varepsilon \phi(\xi) \quad (9)$$

machen wir den Ansatz

$$\phi(\xi) = f(\xi) e^{-\xi^2/4}. \quad (10)$$

Für die zweite Ableitung ergibt sich

$$\phi'' = (f e^{-\xi^2/4})'' \quad (11)$$

$$= f'' e^{-\xi^2/4} + 2f' (e^{-\xi^2/4})' + f(e^{-\xi^2/4})'' \quad (12)$$

$$= \left[f'' - \xi f' + \left(\frac{\xi^2}{4} - \frac{1}{2} \right) \right] e^{-\xi^2/4}. \quad (13)$$

Einsetzen in (9) führt zu der Differentialgleichung

$$f''(\xi) - \xi f'(\xi) + \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \right) f(\xi) = 0. \quad (14)$$

Machen wir hierfür den Potenzreihenansatz

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n, \quad (15)$$

so ergibt sich durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich die Bedingung für $n \geq 0$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n + \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \right) a_n = 0, \quad (16)$$

oder äquivalent dazu

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{n + \frac{1}{2} - \varepsilon}{(n+1)(n+2)}. \quad (17)$$

Für große n bedeutet dies

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{n} \quad (\text{für } n \rightarrow \infty). \quad (18)$$

Zum Vergleich betrachten wir die Reihe

$$e^{\xi^2/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m m!} \xi^{2m} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2} (n/2)!} \xi^n = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} b_n \xi^n \quad (19)$$

Für diese gilt ebenfalls

$$\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{2^{n/2} (n/2)!}{2^{n/2+1} (n/2+1)!} = \frac{1}{n+2} \rightarrow \frac{1}{n} \quad (\text{für } n \rightarrow \infty). \quad (20)$$

Man kann zeigen, dass die Reihe (15) für $\xi \rightarrow \infty$ wie $e^{\xi^2/2}$ divergiert, somit

$$\phi(\xi) = e^{\xi^2/2} e^{-\xi^2/4} = e^{\xi^2/4} \quad (21)$$

ebenfalls divergiert und keine normierbare Lösung der Schrödingergleichung liefert, *sofern nicht*

$$\varepsilon = n + \frac{1}{2} \quad (22)$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. In diesem Fall folgt aus Gleichung (17) $a_{n+2} = 0$, d.h. die Potenzreihe bricht bei einem endlichen Wert von n ab. Die Bedingung (22) liefert gerade die

Eigenwerte des harmonischen Oszillators, und nur für diese Werte von ε ergibt der Potenzreihenansatz eine normierbare Lösung der Schrödingergleichung. Die entsprechenden endlichen Reihen stimmen gerade mit den Hermite-Polynomen überein, $f(\xi) = H_n(\xi)$, d.h. auf diese Weise lassen sich auch die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators $\phi_n(\xi) = H_n(\xi) e^{-\xi^2/4}$ konstruieren.