

Experimentalphysik IV (PEP4)

Dozent. Prof. S. Jochim

Übung 7

Abgabe am Montag, den 02.06.2014 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Zeeman Effekt (5 P)

Ein Wasserstoff-Atom im 2p-Zustand befindet sich in einem schwachen äußeren Magnetfeld.

- Geben Sie alle Niveaus und deren Energien als Funktion von B an (Feinstruktur beachten).
- Bei welcher Feldstärke B_0 (in Tesla) kreuzen sich unter Annahme der linearen Aufspaltung erstmals zwei der Niveaus des energetisch tiefer liegenden $2p_{1/2}$ mit denen des $2p_{3/2}$ Zustands?
- Führen Sie die gleiche Rechnung für die Aufspaltung des $2s_{1/2}$ Zustands durch ($B \ll B_0$) und berechnen Sie die energetischen Abstände des $2s_{1/2}$ ($m=1/2$) Niveaus zu den höher liegenden $2p_{3/2}$ ($m = -1/2, 1/2, 3/2$) Zuständen. Skizzieren Sie die Übergangsenergien als Funktion von B (in Analogie zum Experiment von Lamb und Retherford, Phys. Rev. 72 (1947) 241, zu finden auf der „e-learning platform“).
- Was ändert sich anschaulich beim Übergang zum Paschen-Back Bereich, also für $B \gg B_0$?

Aufgabe 2: Bindungsenergie des Heliumatoms (4 P)

Schätzen Sie die totale Bindungsenergie des Heliumatoms ab. Der Hamilton-Operator sei gegeben durch (Spineffekte werden vernachlässigt):

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{ee}$$

$$\text{mit } \hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{|\vec{r}_i|} \quad \text{und} \quad \hat{H}_{ee} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

- Lassen Sie zunächst die Elektron-Elektron-Wechselwirkung \hat{H}_{ee} außer Acht und berechnen Sie die Grundzustandsenergie des Heliums mittels Lösung der Schrödinger-Gleichung (d.h. unter der Annahme von zwei unabhängigen Elektronen und $Z = 2$). Warum wird die Stärke der Bindung mit dieser Methode sehr wahrscheinlich überschätzt?
- Behandeln Sie das erste Elektron des Heliumatoms wie in a) und nehmen Sie für das zweite Elektron eine abgeschirmte, effektive Kernladung $Z^* = Z - 1$ an. Schätzen Sie so die Bindungsenergie für das zweite Elektron in den Zuständen $n = 1, 2, 3$ ab. Diskutieren Sie die Güte dieser Näherung anhand des tatsächlichen Termschemas.

c) Ermitteln Sie den Grundzustand, indem Sie mit einer von Z^* abhängigen Testwellenfunktion die Bindungsenergie berechnen und diese dann minimieren. Verwenden Sie als Testfunktion $\psi^* = \psi_{100}^*(r_1) \cdot \psi_{100}^*(r_2)$ mit $\psi_{100}^*(r) = 1/\sqrt{\pi} \cdot (Z^*/a_B)^{3/2} \exp(-Z^* r/a_B)$. Hierbei dient Z^* als freier Parameter, a_B ist der Bohr'sche Radius. Beachten Sie, dass der Hamiltonian abhängig von Z ist und nicht von Z^* . Werten Sie daher den Erwartungswert des Hamiltonians für jeden Term einzeln aus, z.B.

$$E_{kin} = \left\langle \psi^* \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 \right| \psi^* \right\rangle. \text{ Wenden Sie hierbei den Virialsatz an}$$

(<http://de.wikipedia.org/wiki/Virialsatz>)

Der Elektron-Elektron-Anteil ist gegeben durch $\langle \psi^* | H_{ee} | \psi^* \rangle = \frac{5}{4} Ryd Z^*$ (dieser Wert ergibt sich aus einer Störungsrechnung). Als Zwischenergebnis dieser Rechnung erhalten Sie:

$$E(Z^*) = -Ryd \left(-2Z^{*2} + 4Z^*Z - \frac{5}{4}Z^* \right)$$

Bestimmen Sie dann Z^* durch Minimieren der Energie (diese Methode nennt man Ritz'sches Variationsverfahren: siehe zum Beispiel <http://de.wikipedia.org/wiki/Rayleigh-Ritz-Prinzip>).

d) Bestimmen Sie mit dem Z^* aus c) die Grundzustandsenergie des Heliums und vergleichen Sie diese mit dem Literaturwert.

Aufgabe 3: Angeregte Zustände im Helium (3 P)

Ein He-Atom wird durch UV-Licht vom Grundzustand in den doppelt angeregten $2s4p$ -Zustand angeregt, der durch so genannte Autoionisation zerfällt. Dabei fällt ein Elektron zurück in einen tiefer gebundenen Zustand während das andere Elektron durch direkten Energieübertrag zwischen ihnen weiter angeregt wird. Nehmen Sie an, das $2s$ -Elektron bewege sich im reinen Coulomb-Feld des Kerns ($Z = 2$) und das $4p$ -Elektron in einem durch das innere Elektron vollständig abgeschirmten Coulomb-Potential (Kernladung $Z = 1$). (Alle Beiträge zur Bindungsenergie die auf relativistischen Effekten, den Spin, oder die Symmetrie der Wellenfunktion bzw. den Austausch von Elektronen beruhen sollen vernachlässigt werden).

a) Schätzen Sie die Bindungsenergie des angeregten Zustands ab und geben Sie die entsprechende Energie der absorbierten UV-Strahlung an.

b) Wie groß ist die Energie des emittierten Elektrons wenn der autoionisierende Zustand $2s4p$ in ein freies Elektron und ein He^+ -Ion im $1s$ -Grundzustand zerfällt?