Experimentalphysik IV (PEP4)

Dozent. Prof. S. Jochim

Übung 6

Abgabe am Montag, den 27.5.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Landéscher g-Faktor (4P)

Betrachten Sie die beiden Gleichungen für den Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ und das magnetische Moment $\vec{\mu_J} = \vec{\mu_l} + \vec{\mu_s}$. Die magnetischen Momente sind gegeben durch $\vec{\mu_l} = -\frac{g_l \mu_B}{\hbar}\vec{l}$ und $\vec{\mu_s} = -\frac{g_s \mu_B}{\hbar}\vec{s}$. Dabei sind $g_l = 1$ und $g_s = 2$. Da $g_l \neq g_s$, sind $\vec{\mu_J}$ und $\vec{j}$ nicht parallel und nur $\vec{\mu_J}_{eff}$ als Projektion von $\vec{\mu_J}$ auf $\vec{j}$ ist für das magnetische Moment relevant: $\vec{\mu_J}_{eff} = \frac{\vec{j}(\vec{\mu_J})\vec{j}}{\vec{j}^2} = -\frac{g(j,l,s)\mu_B}{\hbar}\vec{j}$. $g(j,l,s)$ ist der Landésche g-Faktor .

a) Zeigen Sie, dass gilt: $g(j,l,s)\vec{j}^2 = \frac{3}{2}\,\vec{j}^2 - \frac{1}{2}\,\vec{l}^2 + \frac{1}{2}\,\vec{s}^2$

b) Fassen Sie den Ausdruck aus a) nun als Ausdruck für quantenmechanische Operatoren auf. Zeigen Sie, dass auch gilt: $g(j,l,s) = 1 + \frac{j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)}{2j(j+1)}$

c) Berechnen Sie die Landéschen g-Faktoren für die Zustände $2p_{1/2}$ und $2p_{3/2}$

Kommentar: Für eine ausführlichere Erläuterung von $\vec{\mu_J}_{eff}$ wird auf die Wiki-Einträge de.wikipedia.org/wiki/Landé-Faktor und en.wikipedia.org/wiki/Landé_g-factor verwiesen.

Aufgabe 2: Die Lamb-Verschiebung – Aufhebung der j-Entartung (4P)

Die Lamb-Verschiebung des 1*s*-Grundzustands in Wasserstoff wurde mittels Laserspektroskopie bestimmt. In einem besonders eleganten Verfahren konnte die Differenz der 2*s*→4*s* und dem vierten Teil der 1*s*→2*s*-Übergangsenergie gemessen werden[1]:

$$\Delta\mathrm{E} = (\mathrm{E}_{4s} - \mathrm{E}_{2s}) - \frac{1}{4}(\mathrm{E}_{2s} - \mathrm{E}_{1s})$$

In dieser Summe fallen die größten Energiebeiträge weg, wie sie durch die Rydbergformel $\mathrm{E_n} = -\mathrm{E_{Ryd}}/\mathrm{n}^2$ gegeben sind. Übrig bleiben die relativistischen Beiträge sowie die Lamb-Verschiebung. Aus dem experimentellen Wert von $\Delta\mathrm{E} = 4797$ MHz lässt sich die 1*s*-Lamb-Verschiebung L_{1s} bestimmen. Verwenden Sie hierfür die aus dem Experiment von Lamb und Retherford bekannte 2*s*-Lamb-Verschiebung (L_{2s} = 1057 MHz), die sehr viel kleinere 4s-Lamb-Verschiebung (L_{4s} = 131 MHz), sowie den Ausdruck für die Dirac-Energien (siehe Vorlesung):

$$E_{n,j} = E_n\left[1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{n}\left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{j+1/2}\right)\right]$$

Welcher Anteil von ΔE beruht auf den relativistischen (Dirac-)Beiträgen?

[1]Die Beiträge der Hyperfeinstruktur in den experimentellen Werten sind hier der Einfachheit halber weggelassen. Originalliteratur zu diesem Experiment finden Sie auf der e-learning Plattform Moodle.

Aufgabe 3: Hyperfeinstruktur und Dopplereffekt (4P)

Neben den relativistischen Korrekturen gibt es noch weitere Korrekturen zu den Energiezuständen des Wasserstoffatoms. Eine davon ist die Hyperfeinstruktur, die durch den Spin I des Protons (Kernspin) verursacht wird. Für 1*s*-Zustände lässt sich diese Korrektur schreiben als

$$\Delta E_{I,j} = \frac{2}{3} g_j g_I \frac{\mu^3 \alpha^4 c^2}{2 m_e m_K}\left(F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)\right) \tag{1}$$

Wobei, g_j wie aus Aufgabe 1 b), $g_I = 5.585$ der *g*-Faktor des Kerns und μ die reduzierte Masse des Systems ist. $\vec{F}$ bezeichnet den Gesamtspin $(\vec{F} = \vec{j} + \vec{I})$ und j den Gesamtdrehimpuls des Elektrons.

a) Bestimmen Sie die Hyperfeinaufspaltung $\Delta E_{I,j}$ zwischen den beiden Zuständen $1s_{1/2}\ (F = 1)$ und $1s_{1/2}\ (F = 0)$ des Grundzustands des Wasserstoffatoms. Drücken Sie das Ergebnis in Einheiten von [cm^{-1}], [Hz] und [eV] aus.
b) Mit welcher relativen Genauigkeit muss der 1s→2p Übergang im Wasserstoffatom spektroskopiert werden, damit die 1*s*-Hyperfeinaufspaltung aufgelöst werden kann?
c) Auch das Antiteilchen des Elektrons (Positron) kann mit einem Elektron für kurze Zeit einen gebundenen Zustand eingehen, der Positronium genannt wird. Welche Größen ändern sich für das Positronium in Gleichung (1) und welche neuen Werte besitzen sie? Bestimmen Sie analog zu Aufgabe (a) mit diesen neuen Werten die Hyperfeinaufspaltung des 1s-Zustands im Positronium.
d) Die 21cm-Linie von Wasserstoff wurde mit sehr hoher Präzision vermessen. Sie lässt sich auch in den Spektren von Galaxien nachweisen, doch ist sie hier normalerweise leicht gegenüber dem Messwert verschoben, der sich bei Labormessungen auf der Erde ergibt. Für die Galaxien N959 und O255-36 erscheint die Linie z.B. bei um 0,042cm bzw. 0,437cm größeren Wellenlängen. Wie interpretieren Sie dieses Ergebnis?