Experimentalphysik IV (PEP4)

Dozent. Prof. S. Jochim

Übung 4

Abgabe am Montag, den 12.5.2014 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Oszillation des elektrischen Dipols (6P)

Aus der klassischen Elektrodynamik wissen wir, dass ein schwingender elektrischer Dipol elektromagnetische Strahlung emittiert. In der Quantenmechanik muss der Erwartungswert des Dipoloperators ($\hat{\vec{D}} = -e\vec{R}$) bestimmt werden. Wir betrachten H(1s) und H(2p) Zustände ($\psi_{1,0,0}$ und. $\psi_{2,1,m}$).

a) Zeigen Sie (ohne explizite Rechnung), dass der Erwartungswert des Operators $\hat{\vec{D}}$ gleich Null ist, wenn das System in einem stationären Zustand ist. Z.B:

$$\langle\psi_{1,0,0}|\hat{\vec{D}}|\psi_{1,0,0}\rangle = 0$$
$$\langle\psi_{2,1,m}|\hat{\vec{D}}|\psi_{2,1,m}\rangle = 0$$

Bemerkung: Nutzen Sie, dass die Kugelwellenfunktionen Y_{lm} unter Spiegelung am Ursprung ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$) entweder gerade oder ungerade Funktionen sind. Also $Y_{lm}(\vec{r}) = (-1)^l\, Y_{lm}(-\vec{r})$. Damit sind die Zustände $|\psi_{n,l,m}\rangle$ durch ihre Winkelabhängigkeit entweder gerade oder ungerade.

Bei Spiegelung am Ursprung wechselt auch $\hat{\vec{D}}$ nach $-\hat{\vec{D}}$: Der elektrische Dipol ist also ein ungerader Operator.

b) Wir nehmen nun an, dass der Zustandsvektor des Systems am Anfang eine lineare Überlagerung des Grundzustands 1s mit einem der 2p-Zustände ist $|\Psi_m(t=0)\rangle = \cos\alpha\,|\psi_{1,0,0}\rangle + \sin\alpha\,|\psi_{2,1,m}\rangle$ mit m = +1, 0 oder -1 (α ist ein reeller Parameter). Daraus erhalten wir den Zustandsvektor $|\Psi_m(t)\rangle = \cos\alpha\,|\psi_{1,0,0}\rangle + \sin\alpha\cdot e^{-i\omega t}|\psi_{2,1,m}\rangle$ zur Zeit t. Dabei haben wir den gemeinsamen Phasenfaktor $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ weggelassen, da er keine physikalische Bedeutung hat.

Welche Bedeutung hat ω? Berechnen Sie für den Zustandsvektor $|\Psi_m(t)\rangle$ für die verschiedenen Möglichkeiten für m den Erwartungswert der x-, y- und z-Komponenten des Dipolmomentes:

$$\langle\hat{D}\rangle_m(t) = \langle\Psi_m(t)|\hat{\vec{D}}|\Psi_m(t)\rangle$$

Beschreiben Sie das zeitliche Verhalten des Dipolmoments, d.h. seiner Amplitude und Ausrichtung im Raum.

(Bitte wenden)

c) Analogie zum Teilchen im Kastenpotential:
Betrachten Sie dafür die Überlagerung der zwei niedrigsten Eigenzustände $|\psi(t = 0)\rangle = 1/\sqrt{2}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)$ und berechnen Sie den Erwartungswert von Ortes $\langle\psi|\vec{x}|\psi\rangle$ als Funktion der Zeit.

Hinweise: In den Ausdrücken der Erwartungswerte gibt es ein Radialintegral, das wir gleich χ setzen $\chi = \int_0^\infty R_{2,1}(r)R_{1,0}(r)\, r^3 dr$ und ein Winkelintegral. Sie können folgende Ergebnisse verwenden:

$$\langle \psi_{2,1,1}|D_x|\psi_{1,0,0}\rangle = -\langle \psi_{2,1,-1}|D_x|\psi_{1,0,0}\rangle = \frac{e\chi}{\sqrt{6}}$$
$$\langle \psi_{2,1,0}|D_x|\psi_{1,0,0}\rangle = 0$$
$$\langle \psi_{2,1,1}|D_y|\psi_{1,0,0}\rangle = \langle \psi_{2,1,-1}|D_y|\psi_{1,0,0}\rangle = -\frac{ie\chi}{\sqrt{6}}$$
$$\langle \psi_{2,1,0}|D_y|\psi_{1,0,0}\rangle = 0$$
$$\langle \psi_{2,1,1}|D_z|\psi_{1,0,0}\rangle = \langle \psi_{2,1,-1}|D_z|\psi_{1,0,0}\rangle = 0$$
$$\langle \psi_{2,1,0}|D_z|\psi_{1,0,0}\rangle = -\frac{e\chi}{\sqrt{3}}$$

Aufgabe 2: Spin (6P)

Der halbzahlige Spin des Elektrons kann durch ein Zweizustandssystem beschrieben werden. Der „Spin up"-Zustand $|\uparrow\rangle$ sei durch den zweikomponentigen Spinor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ charakterisiert, der „Spin down"-Zustand $|\downarrow\rangle$ durch $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Hier sei die z-Achse die Quantisierungsrichtung auf die wir die Orientierung des Spins beziehen[1*]. Den Vektorkomponenten des Spins werden die Matrixoperatoren $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ zugeordnet, dem Betragsquadrat des Spinvektors der Operator $\hat{S}^2$.

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\ \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix},\ \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\quad \hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\hat{S}_z$ und $\hat{S}^2$ für den Zustand $|\uparrow\rangle$.

b) Nur die z-Komponente und der Betrag des Spins sind scharf messbar. Zeigen Sie dies durch Berechnung der Varianzen für die x-, y-, und z-Komponenten des Spins [z.B. $\mathrm{Var}(S_x) = \langle\hat{S}_x^2\rangle - \langle\hat{S}_x\rangle^2$].

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände von $\hat{S}_y$. Welche Überlagerung aus den Zuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ ergibt einen Spin in y-Richtung?
Sie messen für einen Eigenzustand von $\hat{S}_y$ die z-Komponente des Spins. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten „Spin up", bzw. „Spin down" auf?

d) Es gibt sog. Leiteroperatoren $\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y$ und $\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y$. Welche Zustände erhalten Sie, wenn Sie diese auf $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ anwenden?

[1*]Mathematisch bedeutet das, dass wir unsere Spinfunktionen in der Eigendarstellung der Matrix $\hat{S}_z$ angeben