Experimentalphysik IV (PEP4)

Dozent. Prof. S. Jochim

Übung 10

Abgabe am Montag, den 23.6.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Linienbreiten (4P)

a) Ein Ensemble von Wasserstoffatomen befinde sich zum Zeitpunkt 0 im angeregten H(2p)-Zustand. Durch spontane Emission gelangen die Atome wieder in den Grundzustand. Für das dabei emittierte elektrische Feld gilt:

$$E(t) = E_0 e^{-t/(2\tau)} \cos \omega_0 t \quad \text{für } t \geq 0 \quad \text{sonst } 0.$$

Dabei ist E_0 eine reelle Amplitude, ω_0 die atomare Übergangsfrequenz und τ die natürliche Lebensdauer. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t)\, e^{-i\omega t} dt$. (Gehen Sie dabei davon aus, dass die Frequenzen ω in der Umgebung von ω_0 liegen. Dann können Sie die Terme mit $(\omega + \omega_0)$ vernachlässigen).

b) Berechnen Sie nun das Linienspektrum $S(\omega) = const \cdot |E(\omega)|^2$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega = 1$. Wie groß ist die Halbwertsbreite (FWHM) $\Delta\nu$? Welche Linienform stellt das Spektrum dar? (memo: $\omega = 2\pi\, \nu$)

c) Die mittlere Lebensdauer des H(2p)-Zustands beträgt τ = 1.6 ns. Berechnen Sie die natürliche Breite für die Lyman-α-Linie (2p→1s). Berechnen Sie die Dopplerverbreiterung der Linie bei Zimmertemperatur (in der Einheit Hz).

Hinweis: Die Intensitätsverteilung um die Frequenz ν_0 aufgrund des Dopplereffektes ist gegeben durch

$$I(\nu) = I_0 e^{-\frac{mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2\nu_0^2 k_B T}}.$$

Aufgabe 2: Optisches Pumpen (4P)

In einer Glaszelle befindet sich ein Ensemble von ^{87}Rb Atomen. Sie interessieren sich für optische Übergänge vom Grundzustand 5 $^2S_{1/2}$ zum angeregten 5 $^2P_{3/2}$ Zustand, der D2-Linie (Wellenlänge 780.246 nm, natürliche Lebensdauer τ = 26.2 ns). Das Ensemble sei kalt genug, so dass die Dopplerverbreiterung vernachlässigt werden kann.

a) ^{87}Rb hat einen Kernspin von I = 3/2. Welche Hyperfeinzustände gibt es für die beiden Zustände?

b) Gehen Sie davon aus, dass zu Beginn alle Atome zufällig über alle Hyperfeinzustände des 5 $^2S_{1/2}$-Grundzustands verteilt sind. Ihnen stehen zwei Laserfrequenzen mit je σ^+ -Polarisation zur Verfügung. Die Frequenzen entsprechen den Übergängen $^2S_{1/2}\,|F=1\rangle \rightarrow {}^2P_{3/2}|F'=2\rangle$ und $^2S_{1/2}\,|F=2\rangle \rightarrow {}^2P_{3/2}|F'=2\rangle$.

Zeichnen Sie in einem Level-Diagramm die möglichen Übergänge ein.

c) Durch spontane Emission aus den angeregten Zuständen finden Übergänge mit der Auswahlregel $\Delta m = \pm 1{,}0$ statt.

In welchem Zustand befinden sich alle Atome nach einer gewissen Zeit (vielfaches der Lebensdauer)? Warum heißt dieses Schema ‚optisches Pumpen‘ ?

Aufgabe 3: Ramsey-Spektroskopie (4P)

Ziel der Ramsey-Spektroskopie ist es, präzise die Frequenz eines atomaren Übergangs zu bestimmen. Die beinhaltet sowohl kohärente Kopplung des atomaren Zweiniveausystems durch Mikrowellen- oder Laserstrahlung als auch die frei Propagation des atomaren Systems ohne Wechselwirkung mit dem Lichtfeld.

In der Rotating-Wave-Approximation (RWA) sind die Bewegungsgleichungen der Amplituden von Grundzustand $c_1(t)$ und angeregtem Zustand $c_2(t)$ gegeben durch:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \delta & \Omega \\ \Omega & -\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich ausgehend von $c_1(t=0)=1$ die Wahrscheinlichkeitsamplitude des angeregten Zustandes unter dem Einfluss der Rabi-Kopplung Ω mit der Verstimmung δ schreiben lässt als:

$$c_2(t) = -i\frac{\Omega}{\Omega_{eff}}\sin\left(\frac{\Omega_{eff}}{2}t\right)e^{-\frac{i\delta}{2}t} \qquad (2)$$

Die Zeitentwicklung des Grundzustandes lautet:

$$c_1(t) = (\cos\left(\frac{\Omega_{eff}}{2}t\right) + i\frac{\delta}{\Omega_{eff}}\sin\left(\frac{\Omega_{eff}}{2}t\right))e^{-\frac{i\delta}{2}t} \qquad (3)$$

Dabei ist $\Omega_{eff} = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$ die effektive Rabifrequenz. Die Zeitentwicklung der allgemeinen Superposition $c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$ lässt sich als Bewegung auf der Blochkugel beschreiben.

a) Zeigen Sie, dass Gl. (2) und (3) für $\delta = 0$ einer Drehung um die x-Achse entspricht. Drücken Sie $c_{1,2}(t)$ über die Polar- und Azimut-Winkel aus (s. Vorlesung). Zeichnen Sie die entsprechende Bahn auf der Blochkugel ein.
   Ein sogenannter $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$**-Puls** entspricht einer Kopplung, für die $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ gilt. An welchem Punkt der Kugel befindet man sich nach einem solchen Puls, wenn man bei $c_1(t = 0) = 1$ gestartet war?

b) Gegeben sei die Superposition $|\psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|2\rangle)$. Im Fall $\Omega = 0$, d.h. ohne Kopplung bzw. **freie Evolution**, und mit der Verstimmung δ gegenüber der Kopplungsfrequenz ist die Zeitentwicklung von Grund- und angeregtem Zustand gegeben durch:

$$c_1(t) = c_1(0)$$
$$c_2(t) = c_2(0)e^{-i\delta t}$$

   Um welche Achse wird jetzt rotiert? Nach welchen Zeiten *T* landet man wieder bei $|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle)$? Zeichnen Sie den Weg auf der Blochkugel.

c) Eine mögliche volle Ramsey Sequenz besteht aus einem $\frac{\pi}{2}$-Puls , einer Zeit *T* freier Evolution, gefolgt von einem weiteren $\frac{\pi}{2}$-Puls mit derselben Phase (Drehung um dieselbe Achse mit gleichem Drehsinn) wie der erste Puls. In einer modernen Atomuhr (atomic fountain clock) sei die Zeit *T* = 0.5 s.
   Wie groß muss δ während dieser Zeit sein, damit der zweite Puls zu $|c_2|^2 = 0$ führt? Zeichnen Sie den Weg auf der Blochkugel.

   Die Abweichung Δ der atomaren Frequenz vom Lokaloszillator (Frequenz des Koppelfeldes) kann damit sehr genau bestimmt werden. Welcher relativen Genauigkeit $\frac{\Delta f}{f}$ entspricht der Abstand eines Maximums zum nächsten Minimum der so entstehenden sog. Ramsey-Fringes auf der Frequenz des Zeitstandards (^{133}Cs – Hyperfein bei 9192631770 Hz).