Experimentalphysik IV (PEP4)

Dozent. Prof. S. Jochim

Übung 1

Abgabe am Dienstag, den 22.4.2014 , 11:00 Uhr

Aufgabe 1 (4P): Wiederholung des Kastenpotenzials

Betrachten Sie ein Teilchen in einem eindimensionalen Potenzialtopf mit unendlich hohen Wänden.

$$V(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } |x| < a \\ \infty \text{ für } |x| > a \end{cases}$$

a) Welche Randbedingungen müssen die Wellenfunktionen im Potenzialtopf erfüllen?
b) Nehmen Sie für das Teilchen de Broglie-Wellen an und leiten Sie daraus die möglichen Energiewerte ab, indem Sie die Randbedingungen berücksichtigen.
c) Berechnen Sie die Wellenfunktionen mit Hilfe der Schrödingergleichung.
d) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktionen orthogonal sind: $\int \psi_n \psi_m \, dx = \delta_{nm}$.

Aufgabe 2 (4P): Zustände im Ortsraum

Gegeben seien folgende Zustände im Ortsraum:

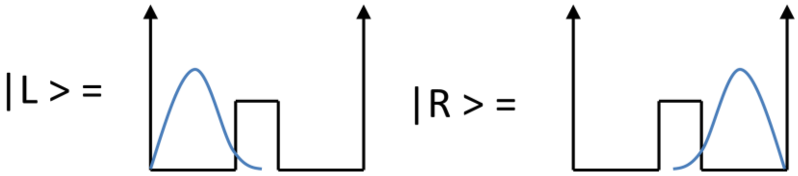
(i) $\psi(x,t) \propto e^{i(kx-\omega t)}$ (ebene Welle).

(ii) $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$ (Harmonischer Oszillator Grundzustand).

a) Die Ortsdarstellung des Impulsoperators lautet in einer Dimension $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$. Zeigen Sie, dass (i) eine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung für den Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m)$ (freies Teilchen) ist.
b) Welcher der beiden Zustände ist Eigenzustand des Impulsoperators? Was ist der Eigenwert?
c) Berechnen Sie jeweils Erwartungswert und Varianz des Impulses für (i), (ii) und der Wellenfunktion aus Aufgabe 1c). Benutzen Sie, dass $\int \psi(x)^* \, \psi(x) \, dx = 1$.

Aufgabe 3: Das Zwei-Niveau-System (4P)

Ein Teilchen in einem sogenannten Doppelmuldenpotenzial kann als Zwei-Niveau-System beschrieben werden, wenn in jeder einzelnen Mulde nur der energetisch niedrigste Zustand betrachtet wird. Dabei sind diese beiden möglichen orthonormierten Zustände:



In Vektorform sei $|L\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $|R\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Ein allgemeiner Zustand ist $|\psi\rangle = a|L\rangle + \mathrm{b}|R\rangle = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Die Hamiltonoperator in Matrixform ist $\hat{H} = E_0(|\mathrm{L}\rangle\langle\mathrm{L}| + |\mathrm{R}\rangle\langle\mathrm{R}|) + J(|\mathrm{R}\rangle\langle\mathrm{L}| + |\mathrm{L}\rangle\langle\mathrm{R}|)$, wobei E_0 die Grundzustandsenergie in einer Mulde ist und J die Tunnelrate in Einheiten von $\hbar$.

a) Zeigen Sie, dass $|L\rangle$ und $|R\rangle$ keine Eigenzustände des Systems sind.
b) Stellen Sie $\hat{H}$ in Matrixform dar.
c) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und die normierten Eigenzustände.

Fortsetzung folgt auf dem nächsten Übungsblatt.