

Klassische Elektrodynamik

Vorlesung an der Universität Heidelberg

Carlo Ewerz

Institut für Theoretische Physik

Universität Heidelberg

Letzte Änderung: 15. Januar 2014



Inhaltsverzeichnis

Prolog	1
Vorbemerkungen	3
Inhalt	3
Aufbau der Vorlesung, Maßsystem	3
Literatur	3
Zu diesen Notizen	4
I Physikalische und mathematische Grundlagen, Maxwell-Gleichungen	5
I.1 Elektrodynamik als fundamentale Theorie	5
I.2 Kräfte zwischen geladenen Teilchen	5
I.3 Feldbegriff und Lorentzkraft	6
I.4 Feld ruhender Ladungen	8
I.5 Fundamentalsatz der Vektoranalysis	11
I.6 Maxwellsche Gleichungen	15
I.6.a Grundgesetze für das elektrische Feld	15
I.6.b Grundgesetze für das magnetische Feld	18
I.6.c Maxwell-Gleichungen	21
I.6.d Signifikanz des Maxwellschen Verschiebungsstroms	22
I.7 Kontinuitätsgleichung	22
I.8 Gleichungen der klassischen Elektrodynamik, Widerspruchsfreiheit der Maxwell-Gleichungen	23
I.9 Elektrostatische Feldenergie, Grenzen der Gültigkeit der klassischen Elektrodynamik	23
II Elektrostatisches und magnetostatisches Grundproblem, Randwertprobleme	26
II.1 Die Greenschen Formeln und der Fundamentalsatz der Vektoranalysis	26
II.2 Konstruktion der Felder aus vorgegebenen Quellen und Wirbeln	28
II.2.a Elektrostatische Grundaufgabe	29
II.2.b Magnetostatische Grundaufgabe	30
II.2.c Allgemeiner Fall vorgegebener Quellen und Wirbel	32
II.3 Randwertaufgaben der makroskopischen Elektrostatik	34
II.3.a Elektrische Leiter	34
II.3.b Randbedingungen für die Poisson-Gleichung	35
II.3.c Lösung des Dirichlet- und Neumann-Problems mit Greenschen Funktionen	36

II.3.d	Methode der Spiegelladungen	37
III	Multipolentwicklung für elektrostatische Felder	41
III.1	Transformationseigenschaften von Feldern, Tensoren	41
III.2	Multipolmomente einer statischen Ladungsverteilung	44
III.3	Vollständige, orthogonale Funktionensysteme	51
III.4	Fourier-Entwicklung, Fourier-Transformation	52
III.5	Legendre-Polynome	55
III.6	Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten, Kugelflächenfunktionen	56
III.7	Elektrische Multipole beliebiger Ordnung	59
IV	Magnetostatik	63
IV.1	Magnetfeld eines geradlinigen Leiters	64
IV.2	Kraft auf einen Strom im Magnetfeld	65
IV.3	Lokalisierte Stromverteilung und magnetischer Dipol	66
IV.4	Magnetisches Dipolmoment eines Ringstroms	68
IV.5	Kraft und Drehmoment auf einen magnetischen Dipol	68
V	Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen, elektromagnetische Wellen	69
V.1	Lösung der homogenen Gleichungen, allgemeine elektromagnetische Potentiale, Eichtransformationen	69
V.2	Die inhomogenen Gleichungen, Coulomb- und Lorenz-Eichung	71
V.2.a	Coulomb-Eichung	71
V.2.b	Lorenz-Eichung	73
V.2.c	Andere Eichungen	74
V.3	Lösung der freien Wellengleichung	75
V.3.a	Lösung durch ebene Wellen	75
V.3.b	Monochromatische ebene elektromagnetische Wellen, Polarisation ebener Wellen	76
V.3.c	Allgemeine Lösung der freien Wellengleichung	79
V.3.d	Kugelwellen	82
V.4	Lösung der inhomogenen Wellengleichung	84
V.5	Die retardierten Potentiale	87
VI	Spezielle Relativitätstheorie	90
VI.1	Klassische Vorstellung von Raum und Zeit, Galilei-Transformationen	90
VI.2	Relativität und Elektrodynamik, Einsteins Postulate	92
VI.3	Spezielle Lorentz-Transformationen	94
VI.4	Relativistische Notation, der Minkowski-Raum	96
VI.5	Geometrie des Minkowski-Raums	98
VI.5.a	Kausalität und Minkowski-Diagramme	98
VI.5.b	Zeitdilatation	100
VI.5.c	Längenkontraktion	101
VI.5.d	Addition von Geschwindigkeiten	103
VI.5.e	Horizonte	103
VI.6	Lorentz- und Poincaré-Transformationen	104

VII Kovariante Formulierung der Elektrodynamik	110
VII.1 Viererpotential und Feldstärketensor	110
VII.2 Transformation der elektromagnetischen Felder	111
VII.3 Viererstromdichte und Maxwell-Gleichungen	113
VII.4 Invarianten des elektromagnetischen Feldes	116
VII.5 Transformation ebener elektromagnetischer Wellen und Doppler-Effekt	116
VIII Relativistische Mechanik	120
VIII.1 Eigenzeit und Vierergeschwindigkeit	120
VIII.2 Energie-Impuls-Beziehung, Bewegungsgleichung	121
VIII.3 Lagrange- und Hamiltonfunktion	126
VIII.3.a Freies Teilchen	126
VIII.3.b Teilchen im elektromagnetischen Feld	129
IX Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik	131
IX.1 Lagrange-Formalismus für Felder	131
X Elektrodynamik in Materie	132
X.1 Materie im statischen elektrischen Feld	132
X.1.a Polarisation und dielektrische Verschiebung	132
X.1.b Ladung im Dielektrikum	135
X.1.c Kraft auf dielektrischen Körper im elektrischen Feld	135
X.1.d Grenzflächen von Dielektrika	136
X.2 Materie im statischen magnetischen Feld	138
X.2.a Magnetisierung und magnetische Feldstärke	138
X.2.b Magnetische Felder an Grenzflächen	140
X.2.c Ferromagnetismus	141
X.3 Elektrische Leiter	141
X.4 Maxwell-Gleichungen in Materie	143
X.5 Elektromagnetische Wellen in Materie	144
X.5.a Telegraphengleichung	144
X.5.b Elektromagnetische Wellen in Isolatoren	145
X.5.c Dispersion	146
X.5.d Elektromagnetische Wellen in Leitern	148
X.5.e Kramers-Kronig-Relationen	150
XI Energie- und Impulssatz für das elektromagnetische Feld	151

Prolog

... Weil wir aber schon einmal von dem Großen und Kleinen reden, so will ich meine Ansichten darlegen, die wahrscheinlich von denen vieler anderer Menschen abweichen. Das Wehen der Luft, das Rieseln des Wassers, das Wachsen der Getreide, das Wogen des Meeres, das Grünen der Erde, das Glänzen des Himmels, das Schimmern der Gestirne halte ich für groß: das prächtig einherziehende Gewitter, den Blitz, welcher Häuser spaltet, den Sturm, der die Brandung treibt, den feuerspeienden Berg, das Erdbeben, welches Länder verschüttet, halte ich nicht für größer als obige Erscheinungen, ja ich halte sie für kleiner, weil sie nur Wirkungen viel höherer Gesetze sind. Sie kommen auf einzelnen Stellen vor und sind die Ergebnisse einseitiger Ursachen. Die Kraft, welche die Milch im Töpfchen der armen Frau emporschwellen und übergehen macht, ist es auch, die die Lava in dem feuerspeienden Berge emportreibt und auf den Flächen der Berge hinabgleiten läßt. Nur augenfälliger sind diese Erscheinungen und reißen den Blick des Unkundigen und Unaufmerksamen mehr an sich, während der Geisteszug des Forschers vorzüglich auf das Ganze und Allgemeine geht und nur in ihm allein Großartigkeit zu erkennen vermag, weil es allein das Welterhaltende ist. Die Einzelheiten gehen vorüber, und ihre Wirkungen sind nach kurzem kaum noch erkennbar. Wir wollen das Gesagte durch ein Beispiel erläutern. Wenn ein Mann durch Jahre hindurch die Magnetnadel, deren eine Spitze immer nach Norden weist, tagtäglich zu festgesetzten Stunden beobachtete und sich die Veränderungen, wie die Nadel bald mehr bald weniger klar nach Norden zeigt, in einem Buche aufschrieb, so würde gewiß ein Unkundiger dieses Beginnen für ein kleines und für Spielerei ansehen: aber wie ehrfurchterregend wird dieses Kleine und wie begeisterungserweckend diese Spielerei, wenn wir nun erfahren, daß diese Beobachtungen wirklich auf dem ganzen Erdboden angestellt werden, und daß aus den daraus zusammengestellten Tafeln ersichtlich wird, daß manche kleine Veränderungen an der Magnetnadel oft auf allen Punkten der Erde gleichzeitig und in gleichem Maße vor sich gehen, daß also ein magnetisches Gewitter über die ganze Erde geht, daß die ganze Erdoberfläche gleichzeitig gleichsam ein magnetisches Schauern empfindet. Wenn wir, so wie wir für das Licht die Augen haben, auch für die Elektrizität und den aus ihr kommenden Magnetismus ein Sinneswerkzeug hätten, welche große Welt, welche Fülle von unermesslichen Erscheinungen würde uns da aufgetan sein. Wenn wir aber auch dieses leibliche Auge nicht haben, so haben wir dafür das geistige der Wissenschaft, und diese lehrt uns, daß die elektrische und magnetische Kraft auf einem ungeheuren Schauplatze wirke, daß sie auf der ganzen Erde und durch den ganzen Himmel verbreitet sei, daß sie alles umfließe und sanft und unablässig verändernd, bildend und lebenerzeugend sich darstelle. Der Blitz ist nur ein ganz kleines Merkmal dieser Kraft, sie selber aber ist ein Großes in der Natur. Weil aber die Wissenschaft nur Körnchen erringt, nur Beobachtung nach Beobachtung macht, nur aus Einzelfnem das Allgemeine zusammenträgt, und weil endlich die Menge der Erscheinungen und das Feld des Gegebenen unendlich groß ist, Gott also die Freude und die Glückseligkeit des Forschens unversieglich gemacht hat, wir auch in unseren Werkstätten im-

mer nur das Einzelne darstellen können, nie das Allgemeine, denn dies wäre die Schöpfung: so ist auch die Geschichte des in der Natur Großen in einer immerwährenden Umwandlung der Ansichten über dieses Große bestanden. Da die Menschen in der Kindheit waren, ihr geistiges Auge von der Wissenschaft noch nicht berührt war, wurden sie von dem Nahestehenden und Auffälligen ergriffen und zu Furcht und Bewunderung hingerissen: aber als ihr Sinn geöffnet wurde, da der Blick sich auf den Zusammenhang zu richten begann, so sanken die einzelnen Erscheinungen immer tiefer, und es erhob sich das Gesetz immer höher, die Wunderbarkeiten hörten auf, das Wunder nahm zu.

Adalbert Stifter
Aus der Vorrede zu *Bunte Steine*
1852

Vorbemerkungen

Ziel und Inhalt

Ziel der Vorlesung ist, die theoretische Beschreibung der Elektrodynamik und der speziellen Relativitätstheorie zu verstehen. Besonderes Gewicht liegt dabei auf dem Verständnis der Elektrodynamik als fundamentaler Eichtheorie der Natur. Ein weiterer wesentlicher Aspekt ist das Erlernen wichtiger mathematischer Methoden, die in vielen Bereichen der theoretischen Physik von Bedeutung sind. Die Vorlesung umfaßt insbesondere

- Elektro- und Magnetostatik
- Elektrodynamik
- spezielle Relativitätstheorie.

Aufbau der Vorlesung, Maßsystem

Es wird angenommen, daß die Hörer bereits mit den grundlegenden Phänomenen der Elektrodynamik vertraut sind.

Wir werden deduktiv vorgehen, d. h. die Maxwell-Gleichungen nach kurzer Motivation postulieren und dann deren Konsequenzen ableiten. Motivation dafür ist, daß die Elektrodynamik eine fundamentale Theorie basierend auf dem **Eichprinzip** ist, das dem gesamten Standardmodell der Elementarteilchenphysik zugrunde liegt. In der modernen Sicht ist das Eichprinzip die Grundlage, und damit die daraus resultierenden Maxwell-Gleichungen. Die historische Entwicklung ist zwar interessant, aber nicht alle historischen Zufälle und Irrwege sind dem Verständnis zuträglich.

Wir verwenden das **Gaußsche Maßsystem**, *nicht* das SI-System. In der Vorlesung stehen theoretische Aspekte im Vordergrund. Für diese ist das Gaußsche System (neben dem Heaviside-Lorentz-System) am besten geeignet.

Literatur

Es gibt eine ganze Reihe von Lehrbüchern zur Elektrodynamik. Besonders zu empfehlen sind u. a.

- J. D. Jackson
Classical Electrodynamics (2nd ed.)
Wiley & Sons

- L. D. Landau, E. M. Lifshitz
Lehrbuch der Theoretischen Physik, II. Klassische Feldtheorie
Verlag Harri Deutsch
- R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands
The Feynman Lectures on Physics, vol. II
Addison-Wesley.

Zu diesen Notizen

Diese Vorlesungsnotizen können und sollen die Vorlesung nicht ersetzen. Sie sollen vielmehr das Nacharbeiten der Vorlesung erleichtern.

Die hier behandelten Themen wurden zum großen Teil vor mehr als 100 Jahren erforscht. Kaum eine Gleichung in diesen Notizen findet sich nicht bereits in Publikationen, Lehrbüchern oder Vorlesungsskripten anderer Autoren. In den vorliegenden Notizen wird lediglich der Versuch einer nützlichen und hoffentlich kohärenten Darstellung der Elektrodynamik unternommen, die sich an Studenten des Bachelorstudiengangs Physik richtet. Es wird keinerlei Anspruch auf Originalität erhoben. Teile dieser Darstellung orientieren sich an Vorlesungen, in denen der Autor selber wichtige Aspekte der Elektrodynamik gelernt hat, darunter insbesondere Vorlesungen von Dieter Schütte und Horst Rollnik an der Universität Bonn.

Kapitel I

Physikalische und mathematische Grundlagen, Maxwell-Gleichungen

I.1 Elektrodynamik als fundamentale Theorie

In der Natur sind uns vier fundamentale Wechselwirkungen bekannt:

- Gravitation
- schwache Wechselwirkung
- elektromagnetische Wechselwirkung
- starke Wechselwirkung,

wobei schwache und elektromagnetische Wechselwirkung in der elektroschwachen Wechselwirkung 'vereinheitlicht' sind.

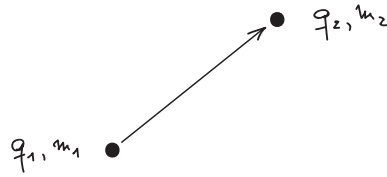
Die besondere Stellung der elektromagnetischen Wechselwirkung besteht darin, daß sie für die meisten Eigenschaften der Materie (z. B. chemisches, optisches Verhalten) und die meisten Phänomene des täglichen Lebens verantwortlich ist. Nur bei astronomischen und subatomaren Längenskalen werden die anderen Wechselwirkungen wichtiger.

Von den vier Grundkräften haben nur die Gravitation und die elektromagnetische Wechselwirkung unendliche Reichweite. Die elektromagnetische Wechselwirkung ist aber etwa 10^{40} mal stärker als die Gravitation.

Wechselwirkung	rel. Stärke	Reichweite
starke WW	~ 1	$\sim 10^{-15}$ m
e. m. WW	$\sim 1/137$	∞
schwache WW	$\sim 10^{-6}$	$\sim 10^{-13}$ m
Gravitation	$\sim 10^{-39}$	∞

I.2 Kräfte zwischen geladenen Teilchen

Zwischen zwei ruhenden Teilchen der Massen m_1 bzw. m_2 und der Ladungen q_1 bzw. q_2 bestehen **zwei** Kräfte:



Gravitationsgesetz:

$$\mathbf{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{I.1})$$

Coulombgesetz:

$$\mathbf{F}_C = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{I.2})$$

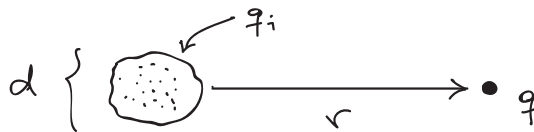
Beachte: kein Faktor 4π im Coulombgesetz im Gauß-System.

Es gibt (im Gegensatz zur Gravitation) positive und negative Ladungen. Aus dem Coulombgesetz folgt:

- Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich ab,
- Ladungen ungleichen Vorzeichens ziehen sich an.

Elektrische Wirkungen können sich daher kompensieren (nicht so bei der Gravitation).

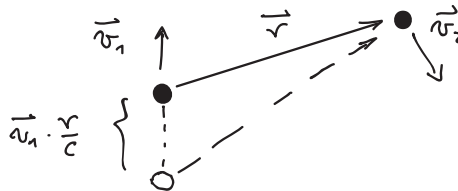
Die von einer lokalisierten Ladungsverteilung q_1, \dots, q_n auf eine weit entfernte Punktladung q ausgeübte Kraft ist



$$\mathbf{F}_C = \frac{q \sum_{i=1}^n q_i}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (\text{I.3})$$

Dabei kann $\sum_i q_i$ verschwinden.

Das Coulombgesetz gilt nur für **ruhende** Ladungen. Für zwei bewegte Ladungen gilt das **Gesetz von Liénard-Wiechert**, bei dem die Kraft auf Teilchen 1 unter anderem von der Position des zweiten Teilchens zu einem um $\frac{r}{c}$ früheren (retardierten) Zeitpunkt abhängt, wie wir später sehen werden. c ist hierbei die Lichtgeschwindigkeit.



I.3 Feldbegriff und Lorentzkraft

Gemäß dem Coulombgesetz versteht man die elektrische Kraft als **Fernwirkungskraft** bzw. **nichtlokale Wechselwirkung**. Demzufolge

- tritt Kraftwirkung **instantan** über beliebige Entfernung ein;

b) wird Kraft nicht durch übertragendes Medium vermittelt.

Das Gesetz von Liénard-Wiechert für die Kraft zwischen bewegten Ladungen widerspricht aber a). Retardierung kennt man üblicherweise von Wirkungen, die ein Medium erfordern (z. B. Knall, ...). Auch sonst ist die Erfahrung, daß Kräfte zur Übertragung ‘Zwischenglieder’ erfordern.

Faraday schlug ~1830 eine **Nahwirkungstheorie** vor: Demzufolge versetzt elektrische Ladung den Raum in einen ‘Erregungszustand’, der sich durch Kraftwirkung bemerkbar macht. Konsequenzen (bzw. scheinbare Konsequenzen) dieser Auffassung sind:

1. Man erwartet Zeitdifferenz zwischen Ursache und Wirkung, was gemäß dem Liénard-Wiechert-Gesetz experimentell bestätigt wird.
2. Man benötigt ein ‘Medium’, das den elektrischen Zustand trägt. Dies führt zur Vorstellung des **Äthers**.

Bei genauerer Betrachtung findet man:

zu 1. Man kann aus der experimentellen Bestätigung der Retardierung *nicht* die Richtigkeit der Nahwirkungstheorie beweisen (Wheeler, Feynman).

zu 2. Der Äther läßt sich experimentell nicht finden!

→ Man ersetzt den ‘anschaulichen’ Äther durch eine abstraktere Begriffsbildung.

Der ‘Erregungszustand des Raumes’ hervorgerufen durch (ruhende oder bewegte) Ladung ist das **elektromagnetische Feld**. **Feld** bedeutet: Jedem Punkt im Raum wird eine Größe zugeordnet (Skalar, Vektor, allgemein: Tensor n -ter Stufe).

Elektromagnetisches Feld:

Zu jeder Zeit t sind jedem Punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ des Raumes zwei Vektoren zugeordnet:

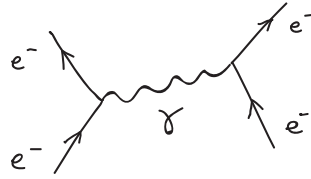
- für das **elektrische** Feld:
 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \equiv$ **elektrische Feldstärke** (ein polarer Vektor)
- für das **magnetische** Feld:
 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \equiv$ **magnetische Induktion** oder **magnetische Kraftflußdichte** (ein axialer Vektor)

\mathbf{E} und \mathbf{B} werden oft vereinfachend (und inkorrekt) als ‘elektrisches und magnetisches Feld’ bezeichnet.

Die Kraftwirkung der Felder auf ein Teilchen der Ladung q , das sich zur Zeit t am Ort \mathbf{x} mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt, ist gegeben durch die **Lorentzkraft**

$$\mathbf{F} = q \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right] \quad (\text{I.4})$$

Das heutige Verständnis des klassischen Feldes in der Quantenmechanik (QM) bzw. Quantenfeldtheorie (QFT) ist folgendes: Alle Kräfte werden mikroskopisch durch den Austausch von **Bosonen** beschrieben, z. B. Photonen für die elektromagnetische Kraft. Symbolisch (genauer: als Feynman-Diagramm) dargestellt etwa für den Austausch eines Photons (γ) zwischen zwei Elektronen:



Klassische Felder erhält man im Falle großer Photonanzahlen. Bei vielen mikroskopischen Phänomenen ist dagegen eine klassische Beschreibung *nicht* möglich, z. B. bei Emission einzelner Photonen von einem Atom, beim Photoeffekt etc.

Bemerkungen zur Lorentzkraft

- Wir werden die Lorentzkraft als *Erfahrungstatsache* betrachten und nicht aus anderen Voraussetzungen herleiten.
- Die Lorentzkraft ist experimentell überprüfbar.
- Die Einheiten von \mathbf{E} und \mathbf{B} sind im Gaußschen Maßsystem gleich,

$$[E] = [B].$$

- Es besteht ein innerer Zusammenhang zwischen $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ als Folge der Galilei-Invarianz (bzw. genauer: der Lorentz-Invarianz). Betrachten wir hierzu Systeme, die mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v} gegeneinander bewegt sind. Im mit dem Teilchen bewegten System ist die Kraft

$$\mathbf{K}' = q\mathbf{E}',$$

denn $\mathbf{v}' = 0$. Wegen der Galilei-Invarianz gilt $\mathbf{K} = \mathbf{K}'$. Also

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (\text{I.5})$$

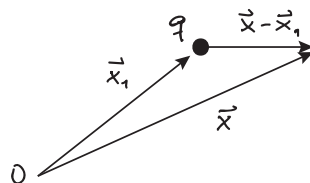
bzw. bei (korrekter) Lorentz-Invarianz

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right]. \quad (\text{I.6})$$

Besonders deutlich wird der Zusammenhang für den Fall $\mathbf{E} = 0$: dann 'sieht' ein im Magnetfeld bewegter Beobachter ein elektrisches Feld $\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

I.4 Feld ruhender Ladungen

Für eine ruhende Punktladung q bei \mathbf{x}_1 gilt



$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = q \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \quad (\text{I.7})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{I.8})$$

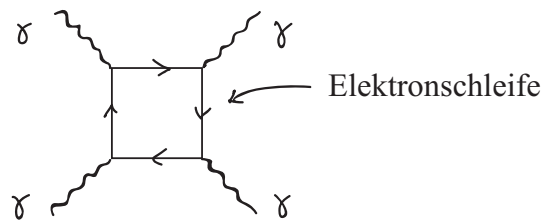
Es gilt das **Superpositionsprinzip**: Das Feld mehrerer Ladungen ist gleich der *Vektorsumme* der Felder der einzelnen Ladungen,

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i. \quad (\text{I.9})$$

Für Ladungen q_i an den Orten \mathbf{x}_i also

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_i q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}. \quad (\text{I.10})$$

Beachte: Das Superpositionsprinzip folgt *nicht* aus dem Vektorcharakter von \mathbf{E} ! Der mathematische Begriff 'Vektor' besagt nur, daß man Vektoren addieren kann. Ob die Wirkung mehrerer Ladungen durch die Vektorsumme gegeben ist, kann man aus der Mathematik nicht folgern. Dies ist vielmehr eine experimentelle (physikalische) Beobachtung. **Nichtlinearitäten** können durch quantenmechanische bzw. quantenfeldtheoretische Effekte auftreten und sind im allgemeinen sehr klein. Beispiel ist die sog. Licht-an-Licht Streuung (Delbrück-Streuung):



Für sehr viele Teilchen ist es bequemer in (I.10) ein Integral statt einer Summe zu benutzen. Technisch verwendet man dazu die **Diracsche δ -Funktion** (bzw. genauer: **δ -Distribution**).

Einschub über die δ -Funktion

In 1D ist die δ -Funktion definiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f(x') dx' = f(x) \quad (\text{I.11})$$

$$\text{und } \delta(x - x') = 0 \text{ für } x \neq x'.$$

Analog für ein allgemeines Integrationsgebiet G

$$\int_G f(x') \delta(x - x') dx' = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Dabei soll f integrierbar sein und insbesondere für $|x| \rightarrow \infty$ stärker als $1/|x|$ abfallen. Für die folgenden Eigenschaften sind i. a. weitere Annahmen erforderlich (Differenzierbarkeit etc.).

Die δ -Funktion kann aufgefaßt werden als Ableitung der **θ -Funktion** (auch **Heaviside-Funktion**)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

Ableitungen der δ -Funktion sind mittels partieller Integration definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \delta(t-x) dt = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x). \quad (\text{I.14})$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

- Für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ mit endlich vielen *einfachen* Nullstellen x_1, \dots, x_n

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad (\text{I.15})$$

- Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (\text{I.16})$$

$$\delta(a^2 - x^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad (\text{I.17})$$

-

$$x\delta(x) = 0. \quad (\text{I.18})$$

Es gibt verschiedene Darstellungen der δ -Funktion, darunter besonders wichtig

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)} dk. \quad (\text{I.19})$$

Man definiert die δ -Funktion in 3D als

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z'), \quad (\text{I.20})$$

so daß

$$\int d^3x' \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) \quad (\text{I.21})$$

und

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}. \quad (\text{I.22})$$

Wir können dann eine Menge von Punktladungen beschreiben durch die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_i q_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (\text{I.23})$$

so daß

$$\int \rho(\mathbf{x}) d^3x = \sum_i q_i = Q, \quad (\text{I.24})$$

wobei Q die Gesamtladung ist. Man verifiziert leicht, daß

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (\text{I.25})$$

dann mit (I.10) identisch ist. Beachte: die Formel (I.25) gilt *nur* für ruhende Ladungen. Sie enthält nur das Superpositionsgesetz und das Coulombgesetz – damit aber fast die gesamte Elektrostatik. In makroskopischen Anwendungen benutzt man oft glatte (stetige) Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x})$.

In ähnlicher Weise das Feld bewegter Ladungen zu berechnen, ist mathematisch i. a. sehr schwierig. Stattdessen werden wir (I.25) in eine differentielle Form bringen, die für die Verallgemeinerung auf bewegte Ladungen besser geeignet ist. Dazu benötigen wir einen wichtigen Satz aus der Vektoranalysis.

I.5 Fundamentalsatz der Vektoranalysis

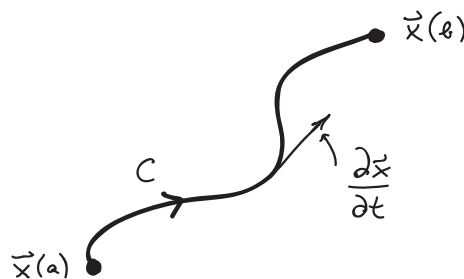
Wir teilen hier einige wichtige Ergebnisse der Vektoranalysis mit (ohne Herleitung). Wir wollen hier das qualitative Bild genauer fassen, das aus der Hydrodynamik anschaulich ist: ein Vektorfeld ist durch seine **Wirbel** und **Quellen** bestimmt.

Einschub über Linien- und Flächenintegrale

Wir betrachten zunächst *Linienintegrale* (*Kurvenintegrale*):

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}$$

entlang einer Kurve \mathcal{C} für ein Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{x})$. Solche Integrale berechnet man durch Parametrisierung der Kurve \mathcal{C} :



$$\begin{aligned}\mathcal{C} &: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(a) &= \text{Anfangspunkt von } \mathcal{C} \\ \mathbf{x}(b) &= \text{Endpunkt von } \mathcal{C}\end{aligned}$$

Dann ist

$$ds = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} dt \quad (\text{I.26})$$

und $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t)$ ist der momentane Geschwindigkeitsvektor beim Durchlaufen der Kurve, d. h. $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t)$ ist Tangentialvektor an \mathcal{C} am Ort $\mathbf{x}(t)$. Also ist $\mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t)$ die Projektion des Vektors $\mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$ (das ist der Wert des Vektorfelds \mathbf{a} am Punkt $\mathbf{x}(t)$) auf den Geschwindigkeitsvektor. Dann ist

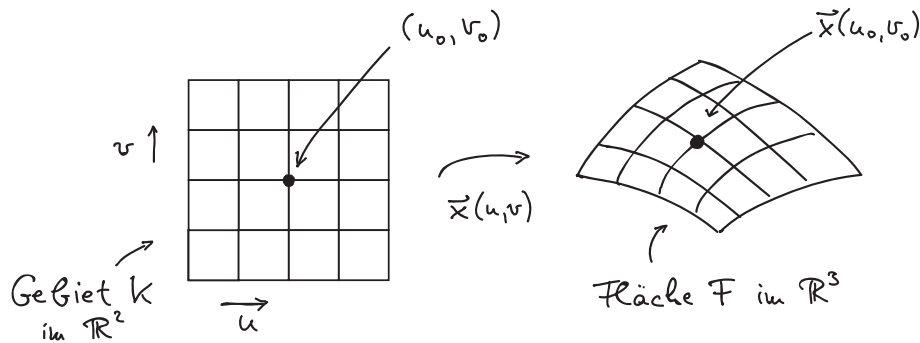
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{a} \cdot ds = \int_a^b \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t) dt, \quad (\text{I.27})$$

und der Wert des Integrals ist unabhängig von der Parametrisierung des Weges \mathcal{C} .

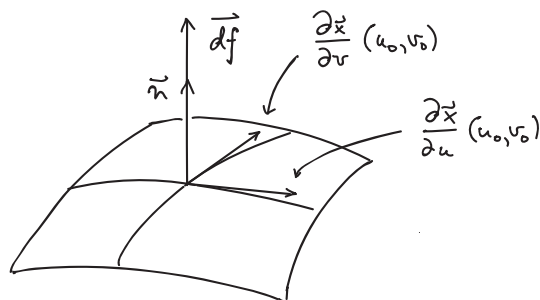
Weiter betrachten wir *Flächenintegrale*

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f}$$

über eine Fläche \mathcal{F} im \mathbb{R}^3 für ein Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{x})$. Dazu parametrisiert man die Fläche \mathcal{F} :



An der Stelle $\mathbf{x}(u_0, v_0)$:



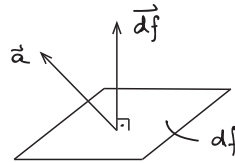
Der Einheitsnormalenvektor \mathbf{n} ist

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right|} \quad (\text{I.28})$$

und es ist

$$d\mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot df = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv \quad (\text{I.29})$$

Die Projektion des Vektors $\mathbf{a}(\mathbf{x}(u_0, v_0))$ auf $d\mathbf{f}$ an dieser Stelle ist



$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{f} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} df =: a_n df \quad (\text{I.30})$$

und das Flächenintegral wird

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f} = \int_K \mathbf{a}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv. \quad (\text{I.31})$$

Analog kann man

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \times d\mathbf{f}$$

erhalten.

Wir definieren den **Fluß des Vektorfelds** \mathbf{a} durch die *geschlossene* Oberfläche \mathcal{O} , die ein Volumen V umschließt:

$$\phi := \int_{\mathcal{O}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f}, \quad (\text{I.32})$$

wobei in $d\mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot df$ der Vektor \mathbf{n} der *äußere* Normalenvektor ist und df das Flächenelement. Für die Oberfläche \mathcal{O} des Volumens V schreiben wir $\mathcal{O} = \mathcal{O}(V) = \partial V$.

Läßt man V klein werden, $V \rightarrow \delta V$, so erhält man im Grenzwert $\delta V \rightarrow 0$ die Definition der **Divergenz** (früher: 'Ergiebigkeit'):

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \int_{\mathcal{O}(\delta V)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f}. \quad (\text{I.33})$$

Der Grenzwert existiert, falls $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ stetig differenzierbar ist. Für kartesische Koordinaten $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ kann man zeigen:

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} a_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} a_3 \quad (\text{I.34})$$

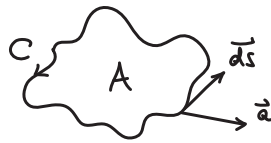
wenn $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Es gilt der (mathematische) **Gaußsche Satz**:

Sei V (reguläres) Volumen und $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ stetiges Vektorfeld (mit stückweise stetigen Ableitungen). Dann

$$\int_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f} = \int_V (\operatorname{div} \mathbf{a}) d^3x. \quad (\text{I.35})$$

Die **Zirkulation** eines Vektorfeldes ist für eine geschlossene Raumkurve \mathcal{C} definiert als



$$\Gamma := \int_{\mathcal{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}. \quad (\text{I.36})$$

In der Hydrodynamik ist z.B. $\Gamma \neq 0$ für wirbelnde Strömungen, und $\Gamma = 0$ für homogene Strömungen ($\mathbf{a} = \text{const.}$).

Läßt man die umschlossene Fläche A klein werden, $A \rightarrow \delta A$, so erhält man im Grenzwert $\delta A \rightarrow 0$ die Definition der **Rotation**. Wir definieren dazu $\gamma(\delta A)$ so daß

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}(\delta A)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \gamma(\delta A) \cdot d\mathbf{f}. \quad (\text{I.37})$$

Ist $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ein differenzierbares Vektorfeld, so existiert der Grenzwert

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} := \lim_{\delta A \rightarrow 0} \gamma(\delta A), \quad (\text{I.38})$$

die *Rotation* von \mathbf{a} . In kartesischen Koordinaten gilt

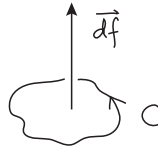
$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{a})_1 &= \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ (\operatorname{rot} \mathbf{a})_2 &= \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ (\operatorname{rot} \mathbf{a})_3 &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (\text{I.39})$$

In der Vektoranalysis beweist man den **Satz von Stokes**:

Ist A eine (reguläre) Fläche, $\mathcal{C} = \partial A$ die sie umschließende Kurve, und \mathbf{a} ein differenzierbares Vektorfeld, so

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int_A (\operatorname{rot} \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{f}. \quad (\text{I.40})$$

Dabei ist die Richtung von $d\mathbf{f}$ nach der Rechte-Hand-Regel bestimmt:



In kartesischen Koordinaten zeigt man leicht

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0. \quad (\text{I.41})$$

Es gilt folgender **Fundamentalsatz**:

Ein Vektorfeld \mathbf{a} ist eindeutig bestimmt, wenn

- a) seine Quellen, d. h. $\operatorname{div} \mathbf{a}$, und seine Wirbel, d. h. $\operatorname{rot} \mathbf{a}$, im gesamten Raum bekannt sind

und

- b) $\operatorname{div} \mathbf{a}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ im Unendlichen genügend stark abfallen (z. B. beide gleich Null außerhalb einer Kugel mit endlichem Radius)

und

- c) wenn \mathbf{a} mindestens wie $\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ abfällt.

Zu Beweis und Diskussion: siehe später.

I.6 Maxwellsche Gleichungen

Gemäß dem obigen Fundamentalsatz benötigen wir zur vollständigen Festlegung des elektromagnetischen Feldes folgende vier Funktionen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}, & \quad \operatorname{div} \mathbf{B}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}, & \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Dazu sind mindestens vier unabhängige experimentelle Tatsachen erforderlich. Bisher haben wir nur eine gesehen: die Grundgleichung der Elektrostatik.

I.6.a Grundgesetze für das elektrische Feld

Wir berechnen aus

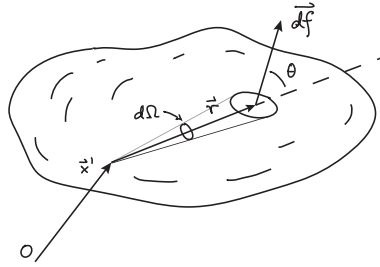
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (\text{I.42})$$

den Fluß

$$\phi_E = \int_{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{I.43})$$

durch die geschlossene Fläche \mathcal{O} . Betrachte dazu zunächst eine einzelne Ladung bei \mathbf{x}' . Mit $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ist also zu berechnen

$$\int_{\mathcal{O}} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot d\mathbf{f}. \quad (\text{I.44})$$



Es ist $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f} = r df \cos \theta = r df_r$, worin df_r die Projektion von $d\mathbf{f}$ auf \mathbf{r} ist. Nach Definition des Raumwinkels ist $df_r = r^2 d\Omega$, so daß $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f} = r^3 d\Omega$. Also

$$\int_{\mathcal{O}} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot d\mathbf{f} = \int_{\mathcal{O}} d\Omega = 4\pi. \quad (\text{I.45})$$

Dies ist unabhängig von der Form von \mathcal{O} . Durch Superposition erhält man den **physikalischen Gaußschen Satz**

$$\boxed{\int_{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int_V \rho(\mathbf{x}') d^3x' = 4\pi Q} \quad (\text{I.46})$$

wobei Q die Gesamtladung innerhalb von \mathcal{O} ist. Mit dem mathematischen Gaußschen Satz folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi \rho(\mathbf{x}). \quad (\text{I.47})$$

Die kann man auch gewinnen, indem man die Divergenz von (I.42) nimmt und

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = 4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{I.48})$$

benutzt.

Wir haben (I.47) für ruhende Ladungen hergeleitet. Die Gleichung gilt aber auch für bewegte Ladungen, d. h. für *zeitabhängiges* \mathbf{E} und ρ :

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{x}, t)} \quad (\text{I.49})$$

Aus (I.49) kann man aber *nicht* auf (I.42) für zeitabhängiges ρ und \mathbf{E} schließen. In (I.42) ist nämlich noch enthalten, daß die Coulombkraft eine konservative Kraft ist, d. h.¹

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}_C = 0. \quad (\text{I.50})$$

Für konservative Kräfte verschwindet das Integral über einen geschlossenen Weg, also für \mathbf{F}_C :



¹Diese Gleichung gilt allgemein für Zentralkräfte $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(r)\mathbf{x}$, wobei $r = |\mathbf{x}|$, denn mit

$$\frac{\partial}{\partial x_k} F_i = f(r) \delta_{ik} + \frac{x_i x_k}{r} \frac{df}{dr} = \frac{\partial}{\partial x_i} F_k$$

folgt $\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$.

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{I.51})$$

oder wegen $\mathbf{F}_C = q\mathbf{E}$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{I.52})$$

und damit

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (\text{I.53})$$

Falls das betrachtete Gebiet im \mathbb{R}^3 *sternförmig* ist, existiert dann eine Funktion $\varphi(\mathbf{x})$ so daß²

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{x}). \quad (\text{I.54})$$

Da

$$-\text{grad}_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (\text{I.55})$$

sieht man

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (\text{I.56})$$

φ heißt **elektrostatisches Potential**. Als **elektrische Spannung** zwischen zwei Punkten 1, 2 definiert man

$$U_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = \varphi(\mathbf{x}_1) - \varphi(\mathbf{x}_2). \quad (\text{I.57})$$

Für *zeitabhängige* Felder sind (I.51) und (I.52) aber i. a. *nicht* richtig! Im zeitabhängigen Fall kann ein geladenes Teilchen, das einen geschlossenen Weg umläuft, Energie gewinnen.

Experimentell findet man: durch zeitliche Änderung des Magnetfeldes können Ladungen beschleunigt werden. Wir betrachten dazu die **elektromotorische Kraft (EMK)** $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$. Es gilt das **Faradaysche Induktionsgesetz**

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{I.58})$$

worin \mathcal{F} irgendeine von \mathcal{C} berandete Fläche ist, $\mathcal{C} = \partial\mathcal{F}$. In Worten: Die elektrische Randspannung (bzw. EMK) ist gleich $1/c$ mal der Abnahme des magnetischen Flusses durch \mathcal{F} .

Das Minuszeichen im Induktionsgesetz impliziert die **Lenzsche Regel**. Der durch die induzierte Spannung hervorgerufene Strom in einem Leiter entlang \mathcal{C} erzeugt ein Magnetfeld, das der Änderung von \mathbf{B} entgegenwirkt.

Bei festgehaltener Fläche \mathcal{F} ist

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \int_{\mathcal{F}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{f}. \quad (\text{I.59})$$

²Auf sternförmigen Gebieten kann man ein solches φ z. B. durch

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{a}(t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} dt$$

für ein konservatives \mathbf{a} konstruieren.

Aus dem Induktionsgesetz wird dann mit dem Satz von Stokes

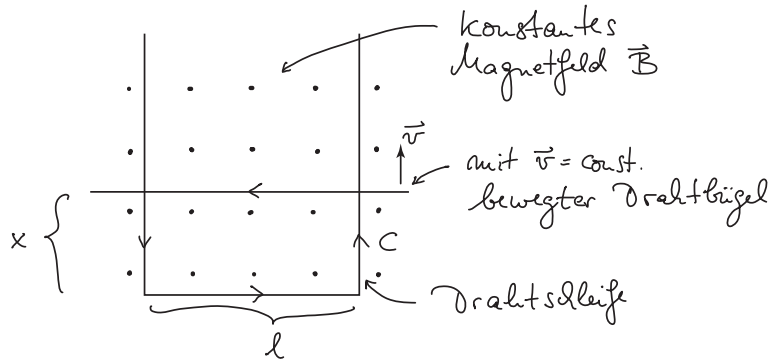
$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.60})$$

Wir können also die Divergenz (d. h. die Quellen) und die Rotation (d. h. die Wirbel) des elektrischen Feldes aus dem experimentell gefundenen Coulombgesetz und Induktionsgesetz ableiten.

Die Konstante $-\frac{1}{c}$ im Induktionsgesetz folgt aus der Lorentzkraft und der Galilei-Invarianz! Um das zu zeigen, betrachten wir einen speziellen Fall (in dem wir sogar das Induktionsgesetz aus der Lorentzkraft erhalten – was allgemein nicht so ist). Wir vergleichen

$$\int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}$$

für folgende Anordnung:



Im Ruhesystem des Drahtbügels sieht ein Beobachter das elektrische Feld

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (\text{I.61})$$

was aus der Galilei-Invarianz folgt, siehe (I.5). Damit wird das Linienintegral (da \mathbf{E}' und $d\mathbf{x}'$ antiparallel)

$$\int_c \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{x}' = -|\mathbf{E}'|l = -\frac{1}{c} vBl, \quad (\text{I.62})$$

wobei nur auf dem Bügel $\mathbf{E}' \neq 0$, während die anderen drei Teilstrecken von \mathcal{C} nicht zum Integral beitragen. Andererseits ist

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = Blx, \quad (\text{I.63})$$

weshalb

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv. \quad (\text{I.64})$$

Der Vergleich von (I.62) und (I.64) ergibt gerade das Induktionsgesetz. Beachte aber: dies ist *keine* allgemeine Herleitung des Induktionsgesetzes, nur eine Überprüfung in einem einfachen Fall. Obige Rechnung reicht aber aus, um die Konstante im Induktionsgesetz als $-\frac{1}{c}$ zu identifizieren.

Wichtig: das Induktionsgesetz gilt auch relativistisch! (Dann gelten natürlich andere Transformationen, es ist $\mathbf{E}' \neq \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.) Mit den richtigen Lorentztransformationen gilt dann weiterhin das Induktionsgesetz. Die Galilei-Invarianz war dennoch hinreichend, um die Konstante $-\frac{1}{c}$ zu bestimmen.

I.6.b Grundgesetze für das magnetische Feld

Entscheidender experimenteller Erfahrungssatz ist:

■ Es gibt keine magnetischen Ladungen oder magnetischen Monopole!

Nebenbemerkung: Man kann zeigen, daß die Existenz von magnetischen Monopolen notwendig die Quantisierung der *elektrischen* Ladung bedingen würde, für die es bisher keine zufriedenstellende Erklärung gibt. Man erwartet aus verschiedenen Gründen (→ Elementarteilchenphysik, Kosmologie), daß magnetische Monopole – falls sie existieren – im Universum nur sehr dünn verteilt und außerdem sehr schwer sein müssen: mindestens 10^3 Protonmassen.

Die Nichtexistenz von magnetischen Monopolen impliziert

$$\boxed{\int_{\mathcal{O}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0} \tag{I.65}$$

für jede beliebige Oberfläche \mathcal{O} , oder anders ausgedrückt:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0} \tag{I.66}$$

also die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes.

Uns fehlt damit nur noch die Bestimmung von $\operatorname{rot} \mathbf{B}$. Die Erfahrung sagt, daß es zwei mögliche Ursachen für magnetische Felder gibt: 1) permanente Magnete, 2) bewegte Ladungen bzw. Ströme (Ørsted, 1819). Nach der *Ampèreschen Hypothese* läßt sich dabei 1) auf 2) zurückführen: permanente Magnete entstehen durch atomare Kreisströme. Das ist aber *nur bedingt* richtig. Z.B. erfordert die Erklärung des Paramagnetismus (und allgemein die vollständige Erklärung von Dia-, Para- und Ferromagnetismus) einen intrinsisch quantenmechanischen Effekt: den **Spin** des Elektrons, der ein magnetisches Moment verursacht. Richtig ist aber:

■ Alle magnetischen Felder können auf bewegte Ladungen und quantenmechanische Spins zurückgeführt werden.

Wir definieren die **Stromstärke**

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{I.67}$$

= pro Zeiteinheit durch festen Querschnitt fließende Ladung.

Für das Magnetfeld *konstanter* Ströme gilt das **Ørstedsche Gesetz**

$$\int_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} I. \tag{I.68}$$



Wir definieren weiter die **Stromdichte \mathbf{j}** durch

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} \tag{I.69}$$

bzw.

$$|\mathbf{j}| = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit} \times \text{Fläche} \perp \text{zur Stromrichtung}}. \tag{I.70}$$

Dann ist

$$I = \int_{\mathcal{O}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}. \quad (\text{I.71})$$

In einem Leiter mit n geladene Teilchen pro Volumen mit den Ladungen q , die sich mit Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegen, gilt z. B.

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v}, \quad (\text{I.72})$$

und mit der Ladungsdichte $\rho = nq$

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}, \quad (\text{I.73})$$

Mit (I.71) erhalten wir aus (I.68) das **Ampèresche Gesetz**

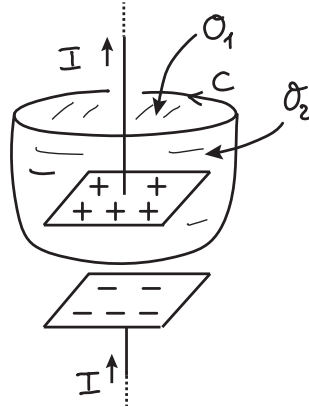
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{O}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{I.74})$$

und daraus nach Stokes

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (\text{I.75})$$

Beides gilt *nur* für *konstante Ströme* \mathbf{j} . Maxwells Entdeckung (1865) war: für *zeitabhängige Ströme* gilt dieses Gesetz nicht!

Als typisches Beispiel betrachten wir die Entladung eines Kondensators:



Die Fläche \mathcal{O}_1 wird vom Strom $I(t)$ durchstoßen. Fläche \mathcal{O}_2 verläuft zwischen den Kondensatorplatten und wird *nicht* von Strom durchflossen. Beide Flächen werden aber von *derselben* Kurve \mathcal{C} begrenzt. Daher gilt einerseits

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{O}_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \frac{4\pi}{c} I(t), \quad (\text{I.76})$$

andererseits aber im *Widerspruch* dazu

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{O}_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = 0. \quad (\text{I.77})$$

Zur Behebung dieses Widerspruchs muß man die Änderung des elektrischen Feldes zwischen den Platten berücksichtigen. Richtig ist:

$$\int_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{O}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}, \quad (\text{I.78})$$

bzw. in differentieller Form:

$$\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.79})$$

Man bezeichnet $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ als (Maxwellsche) **Verschiebungsstromdichte**.³

I.6.c Maxwell-Gleichungen

Damit haben wir die **Maxwell-Gleichungen in integraler Form**:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho d^3x = 4\pi Q \quad (\text{I.80})$$

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{I.81})$$

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{I.82})$$

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0 \quad (\text{I.83})$$

Dabei sind die Integrale auf der linken Seite jeweils über Flächen bzw. Kurven zu nehmen, die die Volumina bzw. Flächen beranden, über die die Integrale der rechten Seite zu nehmen sind.

In **differentieller Form** lauten die Maxwell-Gleichungen (Maxwell, 1865)

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (\text{I.84})$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{I.85})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{I.86})$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.87})$$

- Die Gleichungen der differentiellen Form sind partielle Differentialgleichungen *erster Ordnung* in den Koordinaten und der Zeit.
- Die Gleichungen sind *linear* in den Feldern, was das Superpositionsgesetz für die elektrischen und magnetischen Felder reflektiert.
- Die Gleichungen sind *gekoppelt*.
- Die integrale Form und die differentielle Form sind äquivalent.

³Dieser Name ist nur wenig sinnvoll aber üblich.

- Obige Gleichungen werden oft auch als 'Maxwell-Gleichungen in Vakuum' bezeichnet. Das ist zwar richtig, sie gelten aber auch in Materie. Sie gelten sogar immer! Zur Beschreibung von Materie muß man dann jedoch in der Ladungsdichte und der Stromdichte alle Beiträge berücksichtigen, also frei bewegliche Ladungsdichte und Polarisationsladungsdichte sowie frei bewegliche Stromdichte, Polarisations- und Magnetisierungsstromdichte.
- Die beiden Gleichungen, die ρ und \mathbf{j} enthalten, werden als **inhomogene Maxwell-Gleichungen** bezeichnet. Die beiden Gleichungen, die ρ und \mathbf{j} nicht enthalten, werden als **homogene Maxwell-Gleichungen** bezeichnet.

I.6.d Signifikanz des Maxwellschen Verschiebungsstroms

Aufgrund des Maxwellschen Verschiebungsstromes gibt es auch im Vakuum, d. h. für $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$, *nicht-verschwindende* Lösungen der Maxwell-Gleichungen, nämlich die elektromagnetischen Wellen. Dies wäre ohne den Verschiebungsstrom nicht der Fall. Denn dann folgt aus

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

nach dem Fundamentalsatz, daß $\mathbf{B} = 0$. Dann wäre aber

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

und demzufolge auch $\mathbf{E} = 0$.

Die Existenz des Maxwellschen Verschiebungsstroms erlaubt dagegen, daß sich elektrische und magnetische Felder gegenseitig erzeugen und aufrechterhalten.

I.7 Kontinuitätsgleichung

Es gilt die **Erhaltung der Ladung**:

■ Ladung kann nicht erzeugt oder vernichtet werden.

In einem Volumen V ist die Gesamtladung

$$Q = \int_V \rho d^3x. \quad (\text{I.88})$$

Sie kann sich nur durch das Aus- oder Einströmen von Ladung ändern, so daß

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3x = \frac{d}{dt} Q = - \int_{\partial(V)} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{I.89})$$

Das Vorzeichen stammt daher, daß $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} > 0$, falls \mathbf{j} nach außen gerichtet ist. Mit dem Gaußschen Satz erhalten wir die **Kontinuitätsgleichung**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0} \quad (\text{I.90})$$

Wichtig ist, daß die Kontinuitätsgleichung die *lokale* Erhaltung der Ladung beschreibt. Wäre Ladung nur *global* erhalten, könnte eine Ladung z. B. hier verschwinden und gleichzeitig irgendwo anders auftauchen. Dies entspricht nicht der experimentellen Beobachtung und ist gemäß der Kontinuitätsgleichung ausgeschlossen.

I.8 Gleichungen der klassischen Elektrodynamik, Widerspruchsfreiheit der Maxwell-Gleichungen

... wird noch ergänzt.

I.9 Elektrostatische Feldenergie, Grenzen der Gültigkeit der klassischen Elektrodynamik

Die klassische Elektrodynamik enthält innere Widersprüche und führt zu Inkonsistenzen, wenn man sie auf mikroskopische Skalen extrapoliert. Dies können wir zum Beispiel erkennen, wenn wir die elektrostatische Energie einer Ladung betrachten.

In der klassischen Mechanik betrachtet man nur Beiträge zur potentiellen Energie, die durch die Wechselwirkung (d. h. durch die Kräfte) zwischen *verschiedenen* Teilchen oder Körpern entstehen. Gemäß diesem Bild ist die potentielle Energie einer Anzahl N von Ladungen q_i an Orten \mathbf{x}_i

$$U = \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_{(\text{ohne } i)}(\mathbf{x}_i). \quad (\text{I.91})$$

Die Bedingung $i \neq j$ in der zweiten Summe besagt, daß wir die Selbstenergie weglassen, der Faktor $1/2$ gleicht aus, daß wir in der Summe jedes Paar von Ladungen zweifach zählen. Das Subscript 'ohne i ' soll anzeigen, daß das von der Ladung i selbst erzeugte Feld nicht berücksichtigt werden soll. Die auf die Ladung i wirkende Kraft ist dann

$$\mathbf{K}_i = -\text{grad}_{\mathbf{x}_i} U = q_i \mathbf{E}_{(\text{ohne } i)}(\mathbf{x}_i) \quad (\text{I.92})$$

Offenbar ist U für den Fall zweier Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens negativ und für den Fall zweier Ladungen gleichen Vorzeichens positiv.

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen finden wir

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x' \\ &= \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \int (\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}))\varphi(\mathbf{x}) d^3x, \end{aligned} \quad (\text{I.93})$$

wobei wir im letzten Schritt die Maxwellgleichung $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$ benutzt haben. Im Kontinuum erscheint es nicht notwendig, die Wirkung der Ladung auf sich selber auszunehmen, da sie jeweils nur einem Punkt entspricht – also einer Nullmenge, die für das Integral nicht relevant sein sollte. (Abgesehen davon würde es die Formulierung des Integrals sehr kompliziert machen.) Mit $\text{div}(\phi\mathbf{a}) = \phi \text{div } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \text{grad } \phi$ (siehe Übungen) und dem Gaußschen Satz für einen der damit erhaltenen Terme finden wir weiter

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{F}} \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f} - \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \text{grad } \varphi(\mathbf{x}) d^3x \quad (\text{I.94})$$

Betrachten wir hier eine Fläche \mathcal{F} , die alle Ladungen einschließt, etwa eine Kugel vom Radius R , so finden wir für $R \rightarrow \infty$

$$\varphi \sim \frac{1}{R}, \quad E \sim \frac{1}{R^2}, \quad df \sim R^2, \quad (\text{I.95})$$

so daß das Integral über \mathcal{F} für $R \rightarrow \infty$ verschwindet, da der Integrand überall gegen Null geht. Damit erhalten wir aus (I.94) mit $\text{grad } \varphi = -\mathbf{E}$ die **elektrostatische Energie** einer Ladungsverteilung ρ :

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) d^3x = \int u(\mathbf{x}) d^3x, \quad (\text{I.96})$$

mit der **Energiedichte**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2. \quad (\text{I.97})$$

Hier ist aber $u(\mathbf{x}) \geq 0$ und damit $U \geq 0$ auch für Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens! Dies widerspricht unserer obigen Überlegung für endlich viele Einzelladungen. Der Beitrag, der hier die Positivität von U bewirkt, kommt offenbar aus dem Selbstenergiebeitrag, der im Integral zunächst nicht erheblich erschien.

Das Problem der klassischen Elektrodynamik liegt tatsächlich darin, daß jede Ladung ein **Feld** erzeugt, das dann (tatsächlich!) auf die Ladung selber wirkt. Den entsprechenden Beitrag zur Energie nennt man die **Selbstenergie** der Ladung.

Die Selbstenergie ist schon für eine einzelne punktförmige Ladung unendlich. Betrachten wir zum Beispiel ein Elektron, das bei $\mathbf{x} = 0$ ruht. Dann ist

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = q \left. \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right|_{\mathbf{x}=0} = \infty \quad (\text{I.98})$$

und die Selbstenergie des Elektrons

$$U_1 = \frac{e^2}{2} \int \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x' = \frac{e^2}{2} \int \frac{1}{|\mathbf{x}|} \delta^{(3)}(\mathbf{x}) d^3x = \infty. \quad (\text{I.99})$$

Es hat (zwecklose) Versuche gegeben, dieses Problem zu umgehen, indem man das Elektron als ausgedehntes Teilchen annimmt, z. B. als Kugel vom Radius R_0 mit einer homogener Ladungsdichte. Zum einen wäre eine solche Ladungsverteilung im Rahmen der Elektrodynamik instabil, da zusätzliche (nicht elektrodynamische) Kräfte erforderlich wären, um sie zusammenzuhalten. Das Modell führt zu einer Selbstenergie von (s. Übungen)

$$\frac{3}{5} \frac{e^2}{R_0}. \quad (\text{I.100})$$

(Eine auf einer Kugeloberfläche vom Radius R_0 homogen angenommene Ladungsverteilung ergäbe $\frac{1}{2} \frac{e^2}{R_0}$.)

Die Überlegung, daß die Ruhemasse m_e des Elektrons vollständig durch die Selbstenergie generiert wird,

$$m_e c^2 = U_1 \quad (\text{I.101})$$

führt dann zur Abschätzung für einen **klassischen Elektronradius** von

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \simeq 2,28 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (\text{I.102})$$

Experimentell weiß man aber, daß das Elektron mindestens um einen Faktor 100 kleiner ist. (Soweit man weiß, ist es sogar punktförmig.) Daher ist ein solches Modell zum anderen auch experimentell widerlegt.

Die wirkliche Lösung des Problems liegt in der Quantenmechanik bzw. Quantenfeldtheorie, wo diese Unendlichkeiten in der Theorie der **Renormierung** (entwickelt von Feynman, Schwinger und Tomonaga) behandelt werden können.⁴ Die klassische Elektrodynamik muß bei Abständen unterhalb der Größenordnung r_0 durch die Quantenmechanik ergänzt bzw. durch die Quantenelektrodynamik ersetzt werden.

⁴Die Summe der (formal unendlichen) *nackten Masse* des Elektrons und ihrer (ebenfalls formal unendlichen) *Quantenkorrektur* ergibt dabei die endliche und experimentell gemessene Masse m_e . Nur diese ist eine meßbare Größe. Die einfachste Quantenkorrektur zur Masse des Elektrons ist gegeben durch das Feynman-Diagramm



Kapitel II

Elektrostatisches und magnetostatisches Grundproblem, Randwertprobleme

Als **stationäre** Probleme bezeichnet man solche, bei denen die Zeitableitungen der physikalischen Größen verschwinden, in unserem Fall also die Zeitableitungen der Ladungsdichte ρ , der Stromdichte \mathbf{j} , sowie der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} ,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = 0. \quad (\text{II.1})$$

Man sieht leicht, daß sich in dieser Situation die Maxwell-Gleichungen (I.84)-(I.87) stark vereinfachen: Die Gleichungen für \mathbf{E} und \mathbf{B} entkoppeln und können getrennt behandelt werden. Dies führt zur **Elektrostatik** und **Magnetostatik**.

II.1 Die Greenschen Formeln und der Fundamentalsatz der Vektoranalysis

Es gilt der Gaußsche Satz

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d^3x = \int_O \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f}. \quad (\text{II.2})$$

Seien nun $\phi(\mathbf{x})$ und $\psi(\mathbf{x})$ zweimal stetig differenzierbare skalare Funktionen. Wir setzen

$$\mathbf{v} = \phi \operatorname{grad} \psi, \quad (\text{II.3})$$

so daß wegen $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi + \phi \Delta \psi, \quad (\text{II.4})$$

worin wir den Laplace-Operator Δ verwendet haben, der durch $\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$ definiert ist. Einsetzen in den Gaußschen Satz (II.2) ergibt die **1. Greensche Formel**

$$\boxed{\int_V (\operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi + \phi \Delta \psi) d^3x = \int_O \phi \operatorname{grad} \psi \cdot d\mathbf{f}} \quad (\text{II.5})$$

Vertauschen wir hierin ϕ und ψ und subtrahieren die erhaltene Formel von der vorherigen, ergibt sich die **2. Greensche Formel** oder das **Greensche Theorem**

$$\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^3x = \int_{\mathcal{O}} (\phi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \phi) \cdot d\mathbf{f} \quad (\text{II.6})$$

Es ist $d\mathbf{f} = \mathbf{n}df$ und

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \psi = (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad})\psi =: \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}. \quad (\text{II.7})$$

Die so definierte Notation $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}$ bezeichnet also die Ableitung von ψ in Richtung der (äußeren) Flächennormalen. Damit wird die zweite Greensche Formel zu

$$\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^3x = \int_{\mathcal{O}} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) df \quad (\text{II.8})$$

Falls ϕ, ψ für $r \rightarrow \infty$ mit $1/r$ verschwinden, so¹

$$\phi \operatorname{grad} \psi = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad \text{bzw.} \quad \phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (\text{II.11})$$

Da weiter $df \sim r^2$ für $r \rightarrow \infty$, verschwindet der Integrand in den Oberflächenintegralen in beiden Greenschen Formeln, wenn das Volumen groß gemacht wird. Daher werden die Greenschen Formeln für den Spezialfall $V = \mathbb{R}^3$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi d^3x = - \int_{\mathbb{R}^3} \phi \Delta \psi d^3x \quad (\text{II.12})$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi \Delta \phi d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} \phi \Delta \psi d^3x \quad (\text{II.13})$$

Wir wollen nun den folgenden **Fundamentalsatz** beweisen:

A) Zu vorgegebenen Quellen

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 4\pi\rho \quad (\text{II.14})$$

und Wirbeln

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (\text{II.15})$$

gibt es genau ein Vektorfeld \mathbf{v} , wenn

- a) ρ und \mathbf{j} außerhalb einer endlichen Kugel verschwinden und
- b) \mathbf{v} wie $\frac{1}{r^2}$ für $r \rightarrow \infty$ abfällt (*Regularität*).

B) Ein Vektorfeld mit $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ und $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, das a) und b) erfüllt, verschwindet überall, $\mathbf{v} = 0$.

¹Die hier verwendete Notation

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \text{für} \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{II.9})$$

ist definiert als die Bedingung

$$\exists_{C,a>0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C \quad \text{für} \quad x > a. \quad (\text{II.10})$$

Zum Beweis wollen wir zunächst die Eindeutigkeit der Lösung betrachten, die Existenz zeigen wir durch Konstruktion, s. u.

Angenommen, es gibt zwei verschiedene Vektorfelder $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ mit obigen Eigenschaften, d. h. $\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 4\pi\rho$ und $\operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$. Dann ist $\mathbf{u} := \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \neq 0$ und es gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{v}_1 - \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0, \quad (\text{II.16})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 - \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = 0. \quad (\text{II.17})$$

Weiter gilt $\mathbf{u} = \mathcal{O}(1/r^2)$ für $r \rightarrow \infty$. Wegen $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ existiert ein ϕ mit $\mathbf{u} = \operatorname{grad} \phi$. Wegen $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ gilt dann $\Delta\phi = 0$. Weiter ist $\phi = \mathcal{O}(1/r)$ für $r \rightarrow \infty$. Mit der Wahl $\psi = \phi$ sagt uns die 1. Greensche Formel in der Version (II.12), daß

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\operatorname{grad} \phi)^2 d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}^2 d^3x = 0, \quad (\text{II.18})$$

und damit $\mathbf{u} = 0$ entgegen der Annahme, daß $\mathbf{u} \neq 0$. Daraus folgern wir, daß \mathbf{v} eindeutig ist. Da das gerade diskutierte \mathbf{u} gerade die in B) genannten Voraussetzungen erfüllt, folgt auch diese Aussage aus obiger Argumentation. \square

In diesem Beweis sind wir der **Laplace-Gleichung** begegnet.

$$\boxed{\Delta\phi = 0} \quad (\text{II.19})$$

Die Lösungen der Laplace-Gleichung heißen **harmonische Funktionen**.

Wir finden aufgrund obiger Argumentation: Jede Lösung ϕ der Laplace-Gleichung (d. h. jede harmonische Funktion), die wie $1/r$ für $r \rightarrow \infty$ abfällt, ist identisch Null. Denn wegen der 1. Greenschen Formel ist dann $\operatorname{grad} \phi = 0$, und damit $\phi = \text{const.}$ Diese Konstante muß aber Null sein, da sonst ϕ nicht wie $1/r$ für $r \rightarrow \infty$ abfallen würde. Also $\phi = 0$.

Beachte: Der Eindeutigkeitsbeweis war nur möglich mit der Voraussetzung, daß $\phi = \mathcal{O}(1/r)$ und $\mathbf{v} = \mathcal{O}(1/r^2)$ für $r \rightarrow \infty$, denn alle Funktionen der Form (in sphärischen Polarkoordinaten)

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (\text{II.20})$$

mit reellen Koeffizienten a_{lm} und den **Kugelflächenfunktionen** Y_{lm} , die wir später kennenlernen, erfüllen $\Delta\phi = 0$, aber *nicht* $\phi = \mathcal{O}(1/r)$ für $r \rightarrow \infty$.

II.2 Konstruktion der Felder aus vorgegebenen Quellen und Wirbeln

Allgemein möchten wir aus den (als bekannt angenommenen) Quellen und Wirbeln eines Vektorfeldes dieses Feld konstruieren. Wir gehen dabei der Reihe nach vor:

- Konstruktion von \mathbf{E} aus vorgegebenen Quellen, falls \mathbf{E} wirbelfrei ist,
- Konstruktion von \mathbf{B} aus vorgegebenen Wirbeln, falls \mathbf{B} quellenfrei ist,
- Konstruktion für allgemeine Quellen und Wirbel.

Dabei wollen wir immer annehmen, daß Wirbel und Quellen außerhalb einer Kugel von endlichem Radius verschwinden.

Die beiden Probleme a) und b) resultieren gerade aus den Maxwell-Gleichungen für zeitunabhängige (stationäre) Situationen.

II.2.a Elektrostatistische Grundaufgabe

Es sei

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (\text{II.21})$$

Aus der Wirbelfreiheit ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$) folgt, daß ein φ existiert mit²

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla\varphi. \quad (\text{II.22})$$

Daher gilt die **Poisson-Gleichung**

$$\boxed{\Delta\phi = 4\pi\rho} \quad (\text{II.23})$$

Wir betrachten zunächst den Fall einer Punktladung³

$$\rho(\mathbf{x}) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \quad (\text{II.24})$$

und erhalten dann eine Poisson-Gleichung der Form

$$\Delta G(\mathbf{x}) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (\text{II.25})$$

Man nennt $G(\mathbf{x})$ die **Greensche Funktion der Poisson-Gleichung**. (Beachte, daß die Greensche Funktion im allgemeinen nicht eindeutig ist, denn auch $G + F$ mit jedem F , das $\Delta F = 0$ erfüllt, ist eine Greensche Funktion. Für die Eindeutigkeit sind die Randbedingungen an die Greensche Funktion entscheidend.) Aufgrund der Rotationssymmetrie einer Punktladung ist

$$G(\mathbf{x}) = G(r) \quad \text{mit} \quad r = |\mathbf{x}|. \quad (\text{II.26})$$

Mit dem Laplace-Operator in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) (siehe Übungen)

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

mit

$$\Delta_{\Omega} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \quad (\text{II.28})$$

findet man (siehe Übungen), daß

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \quad (\text{II.29})$$

die eindeutige Lösung ist, die für $r \rightarrow \infty$ wie $1/r$ verschwindet. Daher löst

$$\boxed{G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}} \quad (\text{II.30})$$

²Wir verwenden auch gelegentlich die Nabla-Schreibweise für die Differentialoperatoren grad, div und rot: $\operatorname{grad} \phi = \nabla\phi$, $\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a}$, $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}$, $\Delta = \nabla^2$.

³Die folgende Wahl von ρ ohne eine Ladungseinheit entspricht nicht der physikalischen Situation einer Punktladung, so daß \mathbf{E} auch kein elektrisches Feld darstellt. Sobald wir zu Ladungsdichten übergehen (ab Gl. (II.32)), haben wir es wieder mit echten Ladungen und Feldern zu tun.

die Gleichung

$$\Delta_x G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{II.31})$$

mit der Randbedingung des Abfalls wie $1/r$ für $r \rightarrow \infty$.

Damit erhalten wir eine Lösung der Poisson-Gleichung, denn

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(\mathbf{x}) &= -4\pi\rho(\mathbf{x}) \\ &= -4\pi \int \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= \int \Delta_x G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= \Delta_x G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') d^3x' \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

worin $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ durch (II.30) gegeben ist. Also löst

$$\boxed{\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'} \quad (\text{II.33})$$

die Poisson-Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ mit $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$. Daher

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad}_x \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (\text{II.34})$$

so daß wir das Coulomb-Gesetz

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'} \quad (\text{II.35})$$

erhalten. Dies ist die eindeutige Lösung.

II.2.b Magnetostatische Grundaufgabe

In der magnetostatischen Grundaufgabe sind die Wirbel von \mathbf{B} gegeben, und die Quellen verschwinden:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad \text{und} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (\text{II.36})$$

Es ist $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$ für jedes beliebige Vektorfeld \mathbf{A} . Man kann daher versuchen, ein quellenfreies \mathbf{B} als Rotation darzustellen:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (\text{II.37})$$

\mathbf{A} heißt **Vektorpotential** (in Analogie zum skalaren Potential φ in der elektrostatischen Grundaufgabe). Man kann zeigen: jedes divergenz-freie Vektorfeld läßt sich so darstellen. (Bei uns wird im folgenden die Existenz durch Konstruktion gezeigt.)

Man sieht, daß das Vektorpotential \mathbf{A} *nicht* eindeutig bestimmt ist! Mit \mathbf{A} ergibt nämlich auch

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi(\mathbf{x}) \quad (\text{II.38})$$

dasselbe $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}'$, da $\text{rot grad } \chi = 0$ wenn χ eine differenzierbare *skalare* Funktion ist.

Wir nennen die Transformation

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi(\mathbf{x}) \quad (\text{II.39})$$

eine **Eichtransformation**. Alle Eichtransformationen bilden eine Gruppe, die **Eichgruppe**. Die Feldstärke \mathbf{B} ist *invariant* unter den Eichtransformationen: \mathbf{B} ist **eichinvariant**. Man kann $\chi(\mathbf{x})$ so wählen, daß die zu lösenden Gleichungen möglichst einfach werden.

Ähnliches gilt für das elektrische Potential φ . Auch φ kann durch

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi + c \quad (c \in \mathbb{R}) \quad (\text{II.40})$$

umgekehrt werden, ohne daß sich $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ ändert.

Wir werden sehen: die Lagrange- und Hamiltonfunktion involvieren die Potentiale \mathbf{A} und φ , z. B.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\varphi. \quad (\text{II.41})$$

Sie sind daher auch in der Quantenmechanik und in der Quantenelektrodynamik sehr wichtig.

Zur Berechnung von \mathbf{A} beobachten wir, daß aus $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ folgt

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (\text{II.42})$$

Zur Vereinfachung führen wir eine Eichtransformation durch, so daß $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Dies ist immer möglich: Nehmen wir

$$\text{div } \mathbf{A} = \eta \neq 0 \quad (\text{II.43})$$

an, dann suchen wir ein $\chi(\mathbf{x})$ so daß

$$\text{div}(\mathbf{A} + \text{grad } \chi) = \eta + \Delta \chi = 0. \quad (\text{II.44})$$

Dies ist aber gerade die Poisson-Gleichung mit der Lösung (s. o.)

$$\chi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\eta(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (\text{II.45})$$

(Beachte, daß auch χ nicht eindeutig bestimmt ist, denn $\chi + \tilde{\chi}$ mit $\Delta \tilde{\chi} = 0$ ergibt dasselbe \mathbf{A}' .) Wählen wir also $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi$, so ist

$$\text{div } \mathbf{A}' = 0. \quad (\text{II.46})$$

Die Eichung $\text{div } \mathbf{A} = 0$ heißt **Coulomb-Eichung** oder **transversale Eichung** oder **Strahlungseichung**.

Damit vereinfacht sich (II.42) zu

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (\text{II.47})$$

d. h. jede Komponente von \mathbf{A} erfüllt die Poisson-Gleichung. Daher ist die eindeutige Lösung

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (\text{II.48})$$

Für das Magnetfeld $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ also

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \text{rot}_x \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \\ &= \frac{1}{c} \int \left(\text{grad}_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x', \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

worin $\text{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \text{grad } \varphi$ benutzt wurde. Wir erhalten damit das **Gesetz von Biot und Savart**

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \quad (\text{II.50})$$

Wir sollten uns nachträglich noch einmal überzeugen, daß der Ansatz $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ allgemein möglich war, indem wir explizit die Rotation von (II.48) ausrechnen und daraus \mathbf{B} erhalten. Dies ist (natürlich ohne Verwendung des aus (II.48) erhaltenen (II.50)!) durch Anwendung der (stationären) Maxwell-Gleichungen und partieller Integration tatsächlich möglich (siehe auch Übungen):

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \nabla_x \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \\ &= \frac{1}{c} \int \left(\nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= -\frac{1}{c} \int \left(\nabla_{x'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla_{x'} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' && \text{(part. Int.)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \text{rot rot } \mathbf{B}(\mathbf{x}') d^3x' && \text{(Maxwell-Gl.)} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Delta_{x'} \mathbf{B}(\mathbf{x}') d^3x' && \text{(div } \mathbf{B} = 0) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{B}(\mathbf{x}') \Delta_{x'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' && \text{(zweimalige part. Int.)} \\ &= \int \mathbf{B}(\mathbf{x}') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3x' \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

II.2.c Allgemeiner Fall vorgegebener Quellen und Wirbel

Betrachten wir zuletzt den allgemeinen Fall, daß für ein Vektorfeld \mathbf{v} die Quellen und Wirbel vorgegeben sind,

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} &= 4\pi\rho \\ \text{rot } \mathbf{v} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

Dieser Fall tritt in der Elektro- und Magnetostatik nicht auf, ist aber von allgemeinem Interesse in der Physik.

Man kann dieses Problem lösen, indem man das Vektorfeld zerlegt

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_t, \quad (\text{II.53})$$

wobei \mathbf{v}_l der wirbelfreie Anteil ist,

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_l = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}_l = 0, \quad (\text{II.54})$$

und \mathbf{v}_t der quellenfreie Anteil,

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_t = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}_t = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (\text{II.55})$$

Eine solche Zerlegung ist in der Tat immer möglich, wenn auch nicht eindeutig.⁴

Für diese beiden Anteile kann man Lösungen nach den in a) und b) hergeleiteten Verfahren finden,

$$\mathbf{v}_l = \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x', \quad (\text{II.58})$$

bzw.

$$\mathbf{v}_t = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x', \quad (\text{II.59})$$

so daß auch das Problem eines Vektorfeldes mit Quellen und Wirbeln gelöst werden kann.

Abschließend stellen wir noch einmal die wichtigsten Formeln der Elektro- und Magneto- statik gegenüber und beobachten eine unverkennbare Ähnlichkeit:⁵

⁴Man bezeichnet den wirbelfreien Anteil \mathbf{v}_l auch als *longitudinalen Anteil*, den quellenfreien Anteil \mathbf{v}_t auch als *transversalen Anteil*. Diese Bezeichnung beruht darauf, daß man die Fouriertransformierte

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \quad (\text{II.56})$$

des Vektorfeldes zerlegen kann in zwei Anteile,

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) - \frac{1}{k^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{v}}), \quad (\text{II.57})$$

von denen der erste (entsprechend $\tilde{\mathbf{v}}_l$) proportional zu \mathbf{k} ist, während der zweite (entsprechend $\tilde{\mathbf{v}}_t$) senkrecht zu \mathbf{k} ist. \mathbf{v}_l und \mathbf{v}_t ergeben sich aus der Rücktransformation.

⁵Wie wir später sehen werden, hat die formale Ähnlichkeit der Gleichungen ihren Grund darin, daß sich die Potentiale φ und \mathbf{A} einerseits und die Ladungsdichte ρ und Stromdichte \mathbf{j} andererseits zu den Größen

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \varphi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}, \quad j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \quad (\text{II.60})$$

zusammenfassen lassen, die sich wie Vierervektoren unter Lorentztransformationen transformieren.

Elektrostatik	Magnetostatik
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$	$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$
$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$
$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ mit $\varphi \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$	$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ mit $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$
$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}' } d^3x'$	$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}' } d^3x'$
$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}' ^3} d^3x'$	$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}' ^3} d^3x'$

II.3 Randwertaufgaben der makroskopischen Elektrostatik

Beim elektrostatischen Problem sucht man Lösungen der Poissongleichung. Diese sind gemäß (II.33) eigentlich bekannt. Allerdings muß man dafür die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x})$ vollständig kennen. Das ist aber gerade bei makroskopischen Problemen oft nicht der Fall.

Wichtiges Beispiel hierfür sind Ladungen vor elektrisch leitenden Oberflächen. Hier ist die Bestimmung von $\rho(\mathbf{x})$ *Teil des Problems!* Allgemeiner können wir es mit Ladungen zu tun haben, die von einem System von mehreren Flächen umgeben sind.

II.3.a Elektrische Leiter

Ein **elektrischer Leiter** ist ein Medium, in dem sich frei bewegliche Ladungen befinden. Im Gleichgewicht verteilen sich die Ladungen so, daß auf keine Ladung mehr eine Kraft wirkt.⁶ Im Gleichgewicht herrscht daher *im* Leiter kein elektrisches Feld, d. h.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{im Leiter.} \quad (\text{II.61})$$

Also ist das elektrostatische Potential im Leiter konstant,

$$\varphi(\mathbf{x}) = \text{const.} \quad \text{im Leiter.} \quad (\text{II.62})$$

Flächen, auf denen das elektrostatische Potential konstant ist, heißen **Äquipotentialflächen**. Flächen in oder auf elektrischen Leitern sind daher im Gleichgewichtszustand Äquipotentialflächen.

Die Feldstärke \mathbf{E} steht immer senkrecht zu Äquipotentialflächen, wie man leicht an der Beziehung $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ erkennt. Insbesondere steht \mathbf{E} also immer senkrecht auf Leiteroberflächen.

Zunächst wollen wir allgemein das Verhalten des elektrischen Feldes an einer Leiterfläche untersuchen. Dazu betrachten wir eine kleine zylinderförmige Fläche, die ein Stück der Leiterfläche umschließt.

⁶Da es natürlich thermische Bewegung gibt, ist dies nur *im Mittel* der Fall.

Abbildung

Für die zylinderförmige Fläche gilt der Gaußsche Satz,

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x. \quad (\text{II.63})$$

Machen wir die Höhe des Zylinders sehr klein, $h \rightarrow 0$, so tragen zum Oberflächenintegral nur die Ober- und Unterseite des Zylinders bei. Ist die Ladungsdichte ρ nur auf der Leiterfläche von Null verschieden, so ist das Volumenintegral über ρ nur durch die **Flächenladungsdichte** $\sigma(\mathbf{x})$ bestimmt. Wir erhalten also im Grenzwert eines kleinen Zylinders

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 4\pi\sigma, \quad (\text{II.64})$$

wobei \mathbf{n} wieder der Einheitsnormalenvektor ist.

Wenn wir annehmen, daß die Leiterfläche die Oberfläche eines Leiters ist, so ist auf der Seite innerhalb des Leiters das elektrische Feld $\mathbf{E}_1 = 0$. Daher ist auf der Leiteroberfläche

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{x}) := \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi\sigma(\mathbf{x}). \quad (\text{II.65})$$

II.3.b Randbedingungen für die Poisson-Gleichung

Auf vorgegebenen Flächen kann man verschiedene Randbedingungen an das Potential φ (bzw. das Feld \mathbf{E}) stellen. Wir betrachten ein dreidimensionales Gebiet V , das von Flächen ∂V berandet wird. Diese Flächen müssen nicht zusammenhängend sein, es können sich etwa geschlossene Flächen innerhalb von V befinden. Innerhalb von V befindet sich eine Ladungsverteilung ρ . Für das Potential gilt innerhalb von V die Poisson-Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi\rho$.

Mögliche Randbedingungen an φ sind dann:

i) **Dirichlet-Randbedingungen**

$$\varphi(\mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial V \text{ gegeben} \quad (\text{II.66})$$

Wichtiges Beispiel hierfür: $\varphi = \text{const.}$ auf Leiteroberflächen

ii) **Neumann-Randbedingungen**⁷

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad } \varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n}} \quad \text{auf } \partial V \text{ gegeben} \quad (\text{II.67})$$

Beispiel hierfür ist etwa ein Permanentmagnet in einer supraleitenden Kavität.

iii) **gemischte Randbedingungen** Auf einem Teil von ∂V Dirichlet-, auf einem anderen Teil Neumann-Randbedingungen.

⁷Diese sind benannt nach Carl Gottfried Neumann, *nicht* nach John von Neumann (zwar auch ein wichtiger Physiker, aber für andere Dinge zuständig.)

Für die *gleichzeitige* Fixierung von φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}$ auf Punkten oder Teilen von ∂V , sogenannte **Cauchy-Randbedingungen**, existieren nicht notwendig Lösungen der Poisson-Gleichung.

Die Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung bei vorgegebenen Randbedingungen zeigt man wieder mit Hilfe der 1. Greenschen Formel. Seien dazu zwei Lösungen φ_1 und φ_2 der Poisson-Gleichung für eine gegebene Ladungsverteilung ρ mit denselben Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen gegeben. Definieren wir $u := \varphi_1 - \varphi_2$, so erfüllt es $\Delta u = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = 0$ in V , und $u = 0$ oder $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} = 0$ auf ∂V . Mit der 1. Greenschen Formel also

$$\int_V [u \underbrace{\Delta u}_{=0} + (\text{grad } u)^2] d^3x = \int_{\partial V} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} df. \quad (\text{II.68})$$

Der Integrand im letzten Integral ist auf ∂V immer Null, da hier entweder u oder $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}$ verschwinden. Daher also $(\text{grad } u)^2 = 0$, und daher $\text{grad } u = 0$, so daß $u = \text{const.}$ auf V . Für Dirichlet-Randbedingungen war $u = 0$ auf ∂V , und damit $u = 0$ auch auf V , so daß die Lösungen φ_1 und φ_2 identisch sind. Für Neumann-Randbedingungen können sie sich um einen physikalisch nicht relevante Konstante unterscheiden. Die Lösung der Poisson-Gleichung mit vorgegebenen Randbedingungen ist damit eindeutig (ggf. bis auf eine unwichtige Konstante).

Aus diesen Überlegungen zur Eindeutigkeit der Lösung folgt ein strenger Beweis für den Effekt des **Faradayschen Käfigs**: Für eine geschlossene Äquipotentialfläche (z. B. eine geschlossene Leiterfläche) ohne Ladungen im Inneren gilt $\Delta\varphi = 0$ im Inneren. Analog zu obigen u folgt dann $\varphi = \text{const.}$, und damit $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = 0$ im Inneren.

II.3.c Lösung des Dirichlet- und Neumann-Problems mit Greenschen Funktionen

Die von uns bei der Lösung der elektrostatischen und magnetostatischen Grundaufgabe benutzte Greensche Funktion (siehe Kapitel II.2.a und II.2.b)

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (\text{II.69})$$

war nur eine spezielle Lösung der Gleichung $\Delta G = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, denn G war nur eindeutig bis auf

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad \text{mit} \quad \Delta F = 0. \quad (\text{II.70})$$

Durch die geeignete Wahl von F kann man die Randbedingungen des elektrostatischen Problems erfüllen. Um das zu sehen, benutzen wir die 2. Greensche Formel (II.8) und setzen darin $\psi = G$ und $\phi = \varphi$:

$$\int_V (\varphi\Delta G - G\Delta\varphi) d^3x' = \int_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial G}{\partial\mathbf{n}'} - G \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}'} \right) df'. \quad (\text{II.71})$$

Da im ersten Integral $\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ und $\Delta\varphi = -4\pi\rho$, erhalten wir

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\varphi(\mathbf{x}')}{\partial\mathbf{n}'} - \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial\mathbf{n}'} \right] df' \quad (\text{II.72})$$

Die Freiheit in G erlaubt es dann, das Oberflächenintegral so zu haben, daß es nur von der vorgegebenen Randbedingung abhängt.

Für **Dirichlet-Randbedingungen** benötigt man hierzu

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad \text{für } \mathbf{x}' \text{ auf } \partial V, \quad (\text{II.73})$$

wodurch der erste Term im Oberflächenintegral verschwindet, und daher

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} df'. \quad (\text{II.74})$$

Beachte, daß im Integral im letzten Term φ nur auf ∂V benötigt wird, wo es nach Dirichlet-Randbedingungen gerade vorgegeben ist.

Für den Fall von Dirichlet-Randbedingungen kann man zeigen, daß G_D symmetrisch ist, $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_D(\mathbf{x}', \mathbf{x})$, indem man das Greensche Theorem mit $\phi = G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\psi = G_D(\mathbf{x}', \mathbf{y})$ und y als Integrationsvariable benutzt.

Für **Neumann-Randbedingungen** kann man die Freiheit in G so nutzen, daß

$$\frac{\partial G_N}{\partial \mathbf{n}'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{S} \quad \text{für } \mathbf{x}' \text{ auf } \partial V, \quad (\text{II.75})$$

wobei S der Flächeninhalt von ∂V ist. (Diesen Ausdruck stattdessen gleich Null zu setzen, würde zu einer Verletzung des Gaußschen Satzes führen.) Dann wird

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \langle \varphi \rangle_{\partial V} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') df', \quad (\text{II.76})$$

wobei $\langle \varphi \rangle_{\partial V}$ der Mittelwert von φ auf ∂V ist, der offenbar zu $\varphi(\mathbf{x})$ nur eine irrelevante Konstante beiträgt.

Im Falle von G_N ist die Symmetrie $G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_N(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ nicht automatisch erfüllt, kann aber ohne Verlust der Allgemeinheit gefordert werden.

Die Greenschen Funktionen sind in vielen Anwendungen nicht analytisch zu bestimmen, so daß eine numerische Lösung erforderlich ist.

Physikalische Bedeutung von $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$:

Da $\Delta F = 0$ in V , muß die Ladungsverteilung, die dieses Potential F erzeugt, *außerhalb* von V liegen, also außerhalb des Gebietes, das wir eigentlich betrachten. Es handelt sich also um eine fiktive Ladungsverteilung, die gerade so gewählt ist, daß die Greensche Funktion G_D oder G_N die geforderten Randbedingungen erfüllen kann.

II.3.d Methode der Spiegelladungen

Auf den obigen Überlegungen beruht die Methode der **Spiegelladungen** oder **Bildladungen**.

Betrachten wir als Beispiel eine Punktladung q im Abstand a vor einer leitenden, unendlich ausgedehnten und geerdeten (d. h. $\varphi = 0$) Platte. Es handelt sich hierbei also um ein Dirichlet-Problem.

Abbildung

Die Feldlinien treffen senkrecht auf die Platte, wie für Leiteroberflächen notwendig.

Im Gebiet vor der Platte ist das Feld dasselbe wie für zwei Punktladungen q und $-q$ im Abstand $2a$, aber *ohne* Platte. Die zweite Ladung bezeichnet man als Spiegelladung.

Abbildung

Man erkennt bereits aus Symmetriegründen, daß in der Ebene, in der sich im ursprünglichen Problem die Platte befunden hatte, $\varphi = 0$ gilt.

Wir wählen die Koordinaten so, daß die Platte in der x, z -Ebene liegt, und die Ladung sich bei $(0, a, 0)$ befindet. Mit der Bezeichnung

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} =: \mathbf{a} \quad (\text{II.77})$$

ist die Greensche Funktion für dieses Problem dann

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{x}'|}. \quad (\text{II.78})$$

Darin ist der erste Term die bekannte, 'normale' Greensche Funktion. Der zweite Term erfüllt vor der Platte die Gleichung $\Delta F = 0$, wie gefordert. Die Funktion G_D aus (II.78) verschwindet tatsächlich in der gesamten $y = 0$ -Ebene, denn dort

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{x^2 + (0 - a)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (0 + a)^2 + z^2} = |\mathbf{x} + \mathbf{x}'|. \quad (\text{II.79})$$

Aus dieser Bedingung kann man in der Tat den zweiten Term aus dem aus Symmetrie-Überlegungen plausiblen Ansatz

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{A}{|\mathbf{x} + \mathbf{x}'|} \quad (\text{II.80})$$

mit einer Konstante A herleiten, indem man $A = -1$ aus (II.79) bestimmt.

Das Potential ist dann wegen $\rho(\mathbf{x}') = q \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{a})$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \int_V q \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{a}) G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV' \\ &= \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} - \frac{q}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|} \\ &= q \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + a)^2 + z^2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.81})$$

Das elektrische Feld senkrecht zur x, z -Ebene ist dann

$$E_y(\mathbf{x}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (\text{II.82})$$

woraus man bei $y = 0$ findet (siehe Übungen)

$$E_y(\mathbf{x})|_{y=0} = -\frac{2aq}{(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{II.83})$$

worin $\rho^2 = x^2 + z^2$. Damit haben wir das elektrische Feld für den Fall bestimmt, in dem wir zwei Ladungen aber keine Platte haben. Vor der Platte ist das Feld aber nach unseren allgemeinen Überlegungen dasselbe wie im ursprünglichen Problem mit Platte und *ohne* Spiegelladung.

Kehren wir zum Problem zum Problem mit Platte zurück, so können wir aus dem elektrischen Feld bei $y = 0$ nun die Flächenladungsdichte der Platte in der x, z -Ebene bestimmen:

$$\sigma(x, z) = \frac{E_y(\mathbf{x})}{4\pi} = -\frac{aq}{2\pi(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{II.84})$$

Sie ist maximal am Lotpunkt, d. h. bei $\rho^2 = 0$.

Abbildung

Die Gesamtladung auf der Platte findet man durch explizite Integration (etwa in Polarkoordinaten mit $df = \pi d\rho^2$)

$$\int df \sigma(\rho) = -q, \quad (\text{II.85})$$

wie erwartet. Dies ist die auf der Platte **influenzierte Ladung** oder Influenzladung. Sie kann auf die Platte fließen, da diese geerdet ist. Sie hat daher keine feste Ladung, wie es bei einer isolierten Platte der Fall gewesen wäre.

Die Kraft auf die Ladung q durch die Influenzladung auf der Platte ist dieselbe wie die durch die Bildladung (aber ohne Platte) hervorgerufene Kraft. Dies ist der Fall, weil vor der Platte, wo sich die Ladung q befindet, das Feld nach Konstruktion dasselbe ist bei einer Bildladung ohne Platte und bei der Platte mit influenzierter Ladung. Die Kraft ist daher

$$\mathbf{K}_q = -\frac{q^2}{4a^2} \mathbf{e}_y. \quad (\text{II.86})$$

Auf die Platte wirkt die entgegengesetzte Kraft

$$\mathbf{K}_{\text{PI}} = \frac{q^2}{4a^2} \mathbf{e}_y. \quad (\text{II.87})$$

Mithilfe von Spiegelladungen kann man eine Reihe ähnlicher Problem relativ elegant lösen, z. B. den Fall einer Ladung vor einer leitenden Kugel (siehe Übungen), oder einer Ladung vor verschiedenen anderen Konfigurationen leitender Platten. In manchen Fällen sind dafür sogar unendlich viele Spiegelladungen erforderlich, etwa bei einer Punktladung vor zwei leitenden Ebenen, die einen spitzen Winkel einschließen.

Abbildung

Das Problem einer Ladung vor einer nicht geerdeten Leiterfläche lässt sich ebenfalls elegant lösen. Dazu sei die Fläche isoliert und mit einer Gesamtladung Q versehen. Dann löst man zunächst das Problem einer geerdeten Fläche wie im obigen Beispiel mit Spiegelladungen. Daraus kann man die auf der Leiterfläche influenzierte Ladung Q_{infl} und das daraus resultierende Feld \mathbf{E}_{infl} bestimmen. In dieser Situation sind alle Ladungen im Gleichgewicht, es wirken also auf die Ladungen keine Kräfte. Eine nun zusätzlich auf die Leiterfläche aufgebrachte Ladung $(Q - Q_{\text{infl}})$ wird sich daher gleichmäßig auf der Fläche verteilen und die Fläche hat wieder die geforderte Gesamtladung. Wir addieren dann das alleine von dieser gleichmäßig verteilten Ladung $(Q - Q_{\text{infl}})$ erzeugte Feld nach dem Superpositionsprinzip zum Feld \mathbf{E}_{infl} und erhalten so die Lösung des gesamten Problems.

Kapitel III

Multipolentwicklung für elektrostatische Felder

Häufig spielen in der makroskopischen Elektrostatik die mikroskopischen Details einer Ladungsverteilung keine große Rolle. Bei großem Abstand von der Ladungsverteilung kann man diese oft schon hinreichend gut charakterisieren durch wenige Größen, die sogenannten **Multipolmomente**.

Die Behandlung der Multipolmomente bietet auch Gelegenheit, einige mathematische Methoden zu erlernen, darunter Tensoren, die Fourier-Transformation und orthogonale Funktionensysteme.

III.1 Transformationseigenschaften von Feldern, Tensoren

Man kann physikalische Größen nach ihrem Verhalten unter Drehungen und Spiegelungen charakterisieren. Wir betrachten daher lineare **orthogonale Transformationen** im \mathbb{R}^3 , d. h. normerhaltende Transformationen. Diese bilden die **orthogonale Gruppe**. Im \mathbb{R}^3 können diese Transformationen durch reelle 3×3 Matrizen dargestellt werden:

$$O(3) = \{A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}^3) \mid A^T A = \mathbf{1}\} \quad (\text{III.1})$$

Dabei bezeichnet A^T das transponierte der Matrix A , und $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix. Die Bedingung $A^T A = \mathbf{1}$ ist äquivalent zu $A^T = A^{-1}$. Die Gruppe $O(3)$ beinhaltet Drehungen und Spiegelungen. Die Matrizen wirken als

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad (\text{III.2})$$

und mit $(A)_{ik} = a_{ik}$ (der erste Index bezeichnet die Zeile, der zweite die Spalte) also

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k =: a_{ik} x_k. \quad (\text{III.3})$$

Dabei haben wir die **Summenkonvention** benutzt, nach der in Produkten über doppelt auftretende Indizes summiert wird. Es ist offenbar

$$(A^T)_{ik} = a_{ki}. \quad (\text{III.4})$$

Damit wird $A^T A = \mathbf{1}$ zu

$$a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik} \quad (\text{III.5})$$

und daher $A^T \mathbf{x}' = A^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}$ zu

$$a_{ik}x'_i = a_{ik}a_{ij}x_j = \delta_{kj}x_j = x_k. \quad (\text{III.6})$$

Wegen

$$1 = \det \mathbf{1} = \det(A^T A) = \det(A^T) \det(A) = (\det A)^2 \quad (\text{III.7})$$

finden wir für alle $A \in O(3)$

$$\det A = \pm 1. \quad (\text{III.8})$$

Ein **Tensorfeld n-ter Stufe** ordnet jedem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 3^n Größen $T_{j_1 \dots j_n}$ zu und verhält sich unter orthogonalen Transformationen gemäß

$$T'_{k_1 \dots k_n}(\mathbf{x}') = \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{k_1 j_1} \dots a_{k_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}(\mathbf{x}) \quad (\text{III.9})$$

Alle physikalisch meßbaren Größen sind Tensoren! Häufig auftretende Typen von Tensorfeldern und ihre definierenden Transformationseigenschaften sind:

i) **Skalarfeld** oder Tensorfeld 0. Stufe

$$\lambda'(\mathbf{x}') = \lambda(\mathbf{x}) \quad (\text{III.10})$$

ii) (**polares**) **Vektorfeld** oder Tensorfeld 1. Stufe

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}') = A\mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (\text{III.11})$$

iii) **axiales Vektorfeld** oder Pseudovektorfeld

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}') = (\det A)A\mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (\text{III.12})$$

Offenbar entspricht dies aufgrund des Faktors $(\det A)$ nicht dem allgemeinen Transformationsverhalten (III.9) für ein Tensorfeld 1. Stufe. Axiale Vektorfelder lassen sich aber als antisymmetrische Tensoren 2. Stufe darstellen. (Beachte, daß ein antisymmetrischer Tensor dritter Stufe nur 3 unabhängige Komponenten hat, die sich mit den drei Komponenten eines axialen Vektorfelds identifizieren lassen.)

Als *reine Drehungen* bezeichnet man orthogonale Transformationen, die zusätzlich $\det A = +1$ erfüllen. Sie werden beschrieben durch die Gruppe $SO(3)$. *Drehspiegelungen* sind dagegen orthogonale Transformationen, für die $\det A = -1$.

Unter reinen Drehungen verhalten sich polare Vektoren und axiale Vektoren gleich, unter Drehspiegelungen (oder reinen Spiegelungen) aber verschieden.

Der Nabla-Operator ist ein polarer Vektor, denn

$$\nabla'_i = \frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_k} = a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} = a_{ik} \nabla_k. \quad (\text{III.13})$$

Es gilt (s. Übungen):

$$\begin{aligned} \text{grad } \lambda(\mathbf{x}) & \text{ ist polares Vektorfeld} \\ \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) & \text{ ist Skalarfeld} \\ \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}) & \text{ ist axiales Vektorfeld} \end{aligned}$$

Als **invarianten Tensor** bezeichnet man einen solchen, den eine jede orthogonale Transformation unverändert läßt. Z. B. ist das Kronecker-Delta δ_{ij} ein invarianter Tensor, denn

$$\delta'_{ik} = a_{ij}a_{kl}\delta_{jl} = a_{il}a_{kl} = \delta_{ik} . \quad (\text{III.14})$$

Auch ein Skalarprodukt (allgemeiner: eine Kontraktion) ist invariant, denn

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_i w_i = \delta_{ij} v_i w_j \quad (\text{III.15})$$

und dasselbe (nur mit anders benannten Summationsindizes) erhält man für

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}' = v'_i w'_i = \delta_{ij} v'_i w'_j = \delta_{ij} a_{ik} v_k a_{jl} w_l = a_{ik} a_{il} v_k w_l = \delta_{kl} v_k w_l . \quad (\text{III.16})$$

Allgemeiner kann man zeigen, daß in Kontraktionen nur die offenen Indizes nicht-trivial transformiert werden. Mit zwei Tensoren T_{ijk} und S_{jk} ist nämlich zum Beispiel

$$\begin{aligned} T'_{ijk} S'_{jk} &= \delta_{jm} \delta_{kn} T'_{ijk} S'_{mn} \\ &= \delta_{jm} \delta_{kn} a_{ir} a_{js} a_{kt} T_{rst} a_{mx} a_{ny} S_{xy} \\ &= \delta_{jm} a_{js} a_{mx} \delta_{kn} a_{kt} a_{ny} a_{ir} T_{rst} S_{xy} \\ &= a_{ms} a_{mx} a_{nt} a_{ny} a_{ir} T_{rst} S_{xy} \\ &= \delta_{sx} \delta_{ty} a_{ir} T_{rst} S_{xy} \\ &= a_{ir} T_{rst} S_{st} , \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

wobei im vorletzten Schritt (III.5) benutzt wurde.

Es ist weiter

$$\epsilon'_{ijk} = a_{im} a_{jn} a_{kl} \epsilon_{mnl} = (\det A) \epsilon_{ijk} , \quad (\text{III.18})$$

aufgrund der Definition der Determinante. Die Proportionalität zu ϵ_{ijk} ergibt sich bereits aus der totalen Antisymmetrie in den Indizes.

Wichtig ist außerdem die Zerlegung eines Tensors in **irreduzible** Tensoren. Wir erklären dies am Beispiel eines Tensors 2. Stufe, T_{ik} . Wir zerlegen

$$T_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) =: S_{ik} + A_{ik} , \quad (\text{III.19})$$

wobei S_{ik} der *symmetrische* Anteil ist,

$$S_{ik} = S_{ki} \quad (\text{III.20})$$

und A_{ik} der *antisymmetrische* Anteil ist,

$$A_{ik} = -A_{ki} . \quad (\text{III.21})$$

Diese Zerlegung ist invariant unter orthogonalen Transformationen:

$$S'_{ik} = S'_{ki}, \quad A'_{ik} = -A'_{ki}. \quad (\text{III.22})$$

Außerdem ist die **Spur**

$$\text{tr } T = \text{Sp } T = \sum_{i=1}^3 T_{ii} \quad (\text{III.23})$$

eine Invariante, nämlich ein Spezialfall einer Kontraktion. Wir können daher schreiben

$$\begin{aligned} T_{ik} &= \left[\frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) - \frac{1}{3}\delta_{ik} \text{tr } T \right] + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) + \frac{1}{3}\delta_{ik} \text{tr } T \\ &=: B_{ik} + A_{ik} + \frac{1}{3}\delta_{ik} \text{tr } T. \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Diese Zerlegung ist invariant unter orthogonalen Transformationen. Der Anteil B_{ik} ist symmetrisch und spurfrei,

$$B_{ik} = B_{ki}, \quad \text{tr } B = 0. \quad (\text{III.25})$$

Obige Zerlegung ist ein Beispiel für die **Ausreduktion** eines Tensors, d. h. die Zerlegung in separat invariante Anteile. Wenn keine weitere Ausreduktion in invariante Teile mehr möglich ist, spricht man von **irreduziblen** Tensoren.

III.2 Multipolmomente einer statischen Ladungsverteilung

Für eine lokalisierte Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x})$ (mit Dirichlet-Randbedingungen im Unendlichen) haben wir

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (\text{III.26})$$

Wir wollen annehmen, daß diese Ladungsverteilung in einer endlichen Kugel um den Ursprung lokalisiert ist. Um ihre Wirkung bei großen Abständen zu untersuchen, ist eine Taylorentwicklung nützlich.

Allgemein gilt für die Taylorentwicklung einer Funktion $f(\mathbf{x})$ in 3 Dimensionen

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) &= f(x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3) \\ &= f(x_1, x_2, x_3) + \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_i a_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_1, x_2, x_3) + \dots \\ &= f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_i a_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^n f(\mathbf{x}) \\ &= \exp(\mathbf{a} \cdot \nabla) f(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Wir wollen nun $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ in (III.26) für $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$ entwickeln, wobei wir $r = |\mathbf{x}|$ schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{1}{r} - (\mathbf{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\mathbf{x}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} + \dots \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^3} + \frac{1}{6} \sum_{k,l=1}^3 \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{r^5} 3x'_k x'_l + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Da aber

$$\frac{1}{6} \sum_{k,l=1}^3 \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{r^5} \mathbf{x}'^2 \delta_{kl} = \frac{1}{6} \sum_{k1}^3 \frac{3x_k^2 - r^2 \delta_{kk}}{r^5} \mathbf{x}'^2 = \frac{1}{6} \frac{\mathbf{x}'^2}{r^5} (3r^2 - 3r^2) = 0, \quad (\text{III.29})$$

können wir den letzten Term in (III.28) auch schreiben als

$$\frac{1}{6} \sum_{k,l=1}^3 \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{r^5} (3x'_k x'_l - \mathbf{x}'^2 \delta_{kl}). \quad (\text{III.30})$$

Dann erhalten wir für die Taylorentwicklung von (III.26)

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{x}') d^3 x' \\ &+ \frac{1}{r^3} \mathbf{x} \cdot \int \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d^3 x' \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{k,l=1}^3 \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{r^5} \int \rho(\mathbf{x}') (3x'_k x'_l - \mathbf{x}'^2 \delta_{kl}) d^3 x' \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Wir definieren die folgenden **Multipolmomente**:
die Gesamtladung (das Monopolmoment)

$$Q = \int \rho(\mathbf{x}') d^3 x', \quad (\text{III.32})$$

das **Dipolmoment**

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d^3 x', \quad (\text{III.33})$$

und den **Tensor des Quadrupolmoments**

$$q_{kl} = \int \rho(\mathbf{x}') (3x'_k x'_l - \mathbf{x}'^2 \delta_{kl}) d^3 x'. \quad (\text{III.34})$$

Dann wird die Multipolentwicklung für das Potential

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{6} \sum_{k,l=1}^3 q_{kl} \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{r^5} + \dots \\ &=: \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{(n)}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Hieraus gewinnt man durch $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ die Multipolentwicklung für die elektrische Feldstärke

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_{(n)}(\mathbf{x}), \quad (\text{III.36})$$

worin die ersten beiden (Monopol- und Dipol-)Terme sind:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = Q \frac{\mathbf{x}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} - r^2\mathbf{p}}{r^5} + \dots \quad (\text{III.37})$$

Aufgrund der Taylorentwicklung erkennt man leicht, daß in diesen Entwicklungen die Terme der Multipolordnung n für $r \rightarrow \infty$ abfallen wie

$$\begin{aligned} \varphi_{(n)}(\mathbf{x}) &\sim \frac{1}{r^{n+1}} \\ \mathbf{E}_{(n)}(\mathbf{x}) &\sim \frac{1}{r^{n+2}}. \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

Damit finden wir insbesondere, daß die elektrische Feldstärke \mathbf{E} jeder lokalisierten Ladungsverteilung ρ für große r mindestens wie $1/r^2$ abfällt. Dies war eine wichtige Voraussetzung für die Anwendung des Fundamentalsatzes der Vektoranalysis, siehe Kapitel I.5 und II.1. Erst hier haben wir uns jetzt überzeugt, daß die dort für \mathbf{E} gemachte Annahme tatsächlich zutrifft.

- \mathbf{p} ist ein Vektor, entsprechend drei unabhängigen Größen. Zwei dieser Parameter können jedoch durch eine Drehung des Koordinatensystems verändert werden (z. B. indem man \mathbf{p} entlang der z -Achse legt). Bei zwei der Parameter handelt es sich daher um **äußere** Eigenschaften, also solche, die von der Lage im Raum abhängen.
- Bei einer *Verschiebung* des Koordinatensystems um \mathbf{d} ,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{d}, \quad \rho'(\mathbf{x}') = \rho(\mathbf{x}) \quad (\text{III.39})$$

gilt:

$$\mathbf{p}' = \int \rho'(\mathbf{x}')\mathbf{x}' d^3x' = \int \rho(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{d}) d^3x = \mathbf{p} - Q\mathbf{d}, \quad (\text{III.40})$$

worin Q die Gesamtladung ist. Ist $Q \neq 0$, so verschwindet das Dipolmoment bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems! Für $Q = 0$ ist dagegen $|\mathbf{p}| = p$ eine unter Translationen und Drehungen invariante Größe, die die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x})$ charakterisiert, und damit eine **innere** Eigenschaft. Allgemein gilt:

Der Wert (Betrag) des niedrigsten nichtverschwindenden Multipolmoments einer Ladungsverteilung ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems.

- Es gilt $\mathbf{p} = 0$ für jede spiegelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x}) = \rho(-\mathbf{x})$, insbesondere also für jede rotationssymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x}) = \rho(|\mathbf{x}|)$, denn

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{x})\mathbf{x} d^3x = \int \rho(-\mathbf{x})(-\mathbf{x}) d^3x = - \int \rho(\mathbf{x})\mathbf{x} d^3x = -\mathbf{p}. \quad (\text{III.41})$$

- Das einfachste Beispiel für einen elektrischen Monopol ist eine Punktladung q im Ursprung mit dem Potential

$$\varphi_{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{q}{r} \quad (\text{III.42})$$

und dem Feld

$$\mathbf{E}_{(0)}(\mathbf{x}) = q \frac{\mathbf{x}}{r^3}. \quad (\text{III.43})$$

- Das einfachste Beispiel für einen elektrischen Dipol ist die folgende Ladungsverteilung

Abbildung

mit

$$\rho(\mathbf{x}') = e[-\delta^{(3)}(\mathbf{x}') + \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{d})]. \quad (\text{III.44})$$

Das Potential ist offenbar

$$\varphi(\mathbf{x}) = e \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|} - \frac{1}{r} \right). \quad (\text{III.45})$$

Mit dem elektrischen Dipolmoment $\mathbf{p} = e\mathbf{d}$ findet man durch Taylor-Entwicklung für kleine \mathbf{d} (siehe Übungen) für das Potential und das elektrische Feld in der ersten Ordnung (also für den Dipolterm) tatsächlich

$$\varphi_{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} \quad (\text{III.46})$$

und für die zugehörige Feldstärke

$$\mathbf{E}_{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} - r^2\mathbf{p}}{r^5}. \quad (\text{III.47})$$

Obige Konfiguration hat auch ein Quadrupolmoment. Ein **Punktdipol** ist definiert als der Grenzwert $\mathbf{d} \rightarrow 0$ dieser Konfiguration bei festgehaltenem $|\mathbf{p}|$ (d. h. gleichzeitig $e \rightarrow e/|\mathbf{d}|$).

- Wählt man \mathbf{p} als in z -Richtung liegend, $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$ so ist

$$\varphi_{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{pz}{r^3} = \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{pP_1(\cos \theta)}{r^3} \quad (\text{III.48})$$

mit dem Legendre-Polynom $P_1(x) = x$, und

$$\mathbf{E}_{(1)}(\mathbf{x}) = p \frac{3z\mathbf{x} - r^2\mathbf{e}_z}{r^5}. \quad (\text{III.49})$$

In sphärischen Polarkoordinaten sind die kartesischen Komponenten also

$$(\text{III.50})$$

Für den Fall eines Punktdipols mit Orientierung in z -Richtung bei $\mathbf{x} = 0$ (oder bei einem ausgedehnten Dipol mit $|\mathbf{d}| > 0$ für große Abstände $r \gg |\mathbf{d}|$) findet man daher die folgende Form der Feldlinien:

Abbildung

- Ein wichtiges Beispiel für ein Molekül, das ein elektrisches Dipolmoment aufweist, ist das Wassermolekül H_2O . Bei 300 K ist es im Gaszustand gegeben durch

$$p_{\text{H}_2\text{O}} = 1.85 \cdot 10^{-18} \text{ st.Cb cm.} \quad (\text{III.51})$$

Beachte, daß im Gaußschen Maßsystem $|e| = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ st.Cb}$, und ein **statisches Coulomb** (st.Cb oder statCb) ist gegeben durch

$$1 \text{ st.Cb} = 1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}, \quad (\text{III.52})$$

so daß ein Coulomb in SI Einheiten $3 \cdot 10^9 \text{ st.Cb}$ entspricht.

- Der Tensor des Quadrupolmoments q_{kl} ist symmetrisch und spurfrei, und daher ein irreduzibler Tensor. Der zusätzliche (verschwindende) Term in (III.29) bzw. (III.30) war addiert worden, um die Spurfreiheit zu erreichen.
- Der Tensor des Quadrupolmoments hat als symmetrischer, spurfreier Tensor 5 unabhängige Komponenten. Da q_{kl} symmetrisch ist, kann er durch eine (orthogonale) Hauptachsentransformation diagonalisiert werden und hat in den entsprechenden Koordinaten die Diagonalform

$$(q_{kl}) = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{III.53})$$

Da die Spur unter orthogonalen Transformationen erhalten ist, gilt auch in der diagonalen Form

$$\text{tr}(q_{kl}) = \sum_i q_{ii} = 0. \quad (\text{III.54})$$

Damit sind es nur noch 2 Parameter, die das Quadrupolmoment charakterisieren.

Es gibt daher 2 *innere* Parameter des Tensors des Quadrupolmoments, während 3 weitere Parameter durch die Wahl des Koordinatensystems bestimmt sind.

- Eine einfache Ladungsverteilung, die als führenden Multipol ein Quadrupolmoment besitzt (die also kein Monopol- und kein Dipolmoment aufweist), ist die folgende:

Abbildung

worin $\mathbf{d}'' = \mathbf{d} + \mathbf{d}'$. Das Potential ist offenbar

$$\varphi(\mathbf{x}) = e \left(-\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}'|} + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}''|} + \frac{1}{r} \right). \quad (\text{III.55})$$

Hieraus erhält man (siehe Übungen), daß $\varphi_{(0)}(\mathbf{x}) = \varphi_{(1)}(\mathbf{x}) = 0$ und

$$q_{kl} = e[3(d_k d'_l + d'_k d_l) - 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}' \delta_{kl}]. \quad (\text{III.56})$$

In diesem einfachen Beispiel einer Quadrupolanordnung können als die beiden unabhängigen inneren Parameter zum Beispiel dd' und $\angle(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$ gewählt werden.

- Allgemein ist für eine rotationssymmetrische Ladungsverteilung ρ das Quadupolmoment Null. Denn für $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r)$ ist $q_{kl} = c\delta_{kl}$, da keine Richtung ausgezeichnet ist. Da aber wegen der Spurfreiheit weiter $\sum_i q_{ii} = 3c = 0$, ist $c = 0$ und damit $(q_{kl}) = 0$.
- Für jede um die 3-Achse rotationssymmetrische Ladungsverteilung ρ ist aus Symmetriegründen

$$q_{11} = q_{22} \quad (\text{III.57})$$

und dann wegen der Spurfreiheit

$$q_{33} = -2q_{11} = -2q_{22}. \quad (\text{III.58})$$

In einer um die 3-Achse symmetrischen Konfiguration spricht man daher auch von q_{33} als **dem** Quadupolmoment der Ladungsverteilung. Bei einer homogenen Ladungsverteilung mißt q_{33} dann die Abweichung von der Kugelgestalt, denn

$$q_{33} = \int \rho(\mathbf{x})(3x_3^2 - r^2) d^3x = \int \rho(\mathbf{x})r^2(3\cos^2\theta - 1) d^3x. \quad (\text{III.59})$$

Falls $q_{33} > 0$, so liegt eine eher zigarrenförmig entlang der 3-Achse orientierte Ladungsverteilung vor,

Abbildung

Für $q_{33} < 0$, ist die Ladungsverteilung dagegen eher diskusförmig entlang der 1-2-Ebene orientiert,

Abbildung

Viele Atomkerne haben solche Formen. Die Größenordnung des Quadupolmoments wird hier durch Ladung und Größe des Atomkerns bestimmt. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} q_{33}(\text{Deuteron}) &= 2.7 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2 \\ \frac{1}{e} q_{33}({}^{203}\text{Bi}) &= -4 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Die potentielle Energie einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x})$ in einem *äußeren* elektrischen Potential φ^{ext} , das wir als schwach veränderlich annehmen wollen, ist

$$W = \int_V \rho(\mathbf{x})\varphi^{\text{ext}}(\mathbf{x}) d^3x. \quad (\text{III.60})$$

Wir können φ^{ext} um einen geeignet gewählten Ursprung entwickeln,

$$\begin{aligned}\varphi^{\text{ext}} &= \varphi^{\text{ext}}(0) + (\mathbf{x} \cdot \nabla)\varphi^{\text{ext}}(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi^{\text{ext}}(0) + \dots \\ &= \varphi^{\text{ext}}(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} E_j^{\text{ext}}(0) + \dots\end{aligned}\quad (\text{III.61})$$

Da für ein äußeres elektrisches Feld $\text{div } \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) = 0$, haben wir

$$0 = \frac{1}{6} r^2 \text{div } \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) = \frac{1}{6} \sum_j r^2 \frac{\partial}{\partial x_j} E_j^{\text{ext}}(0) = \frac{1}{6} \sum_{i,j} r^2 \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} E_j^{\text{ext}}(0). \quad (\text{III.62})$$

Daher können wir den letzten Term in (III.61) so ergänzen, daß darin die Quadrupolmomente q_{ij} auftreten:

$$-\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} E_j^{\text{ext}}(0) = -\frac{1}{6} \sum_{i,j} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial}{\partial x_i} E_j^{\text{ext}}(0) \quad (\text{III.63})$$

Mit der Entwicklung für das äußere Potential wird die potentielle Energie dann

$$W = Q\varphi^{\text{ext}}(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} q_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} E_j^{\text{ext}}(0) + \dots \quad (\text{III.64})$$

Wir beobachten darin die Kopplung der verschiedenen Multipole der Ladungsverteilung ρ an das äußere Feld: Die Ladung koppelt an das Potential, der Dipol an das elektrische Feld, der Quadrupol an den Gradienten des Feldes, usw.

Die Kraft auf einen Dipol im Ursprung im äußeren Feld ist (für den Dipol ist $Q = 0$)

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \int \rho(\mathbf{x}') \mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{x}') d^3 x' \\ &= (\mathbf{p} \cdot \text{grad}) \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) + \dots\end{aligned}\quad (\text{III.65})$$

Das Drehmoment auf den Dipol im Ursprung ist

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \int \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} \times \mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{x}) d^3 x \\ &= \mathbf{p} \times \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) + \dots\end{aligned}\quad (\text{III.66})$$

In einem *homogenen* elektrischen Feld wirkt daher auf einen Dipol keine Kraft, aber ein Drehmoment.

Ein wichtiger Spezialfall ist die Wechselwirkungsenergie $V_{1,2}$ eines Dipols im Feld eines anderen Dipols, separiert durch den Abstand \mathbf{x} ,

$$\begin{aligned}V_{1,2} &= -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \\ &= \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x})}{r^5}.\end{aligned}\quad (\text{III.67})$$

Sie hängt ab von der Orientierung der Dipole zueinander, sowie von der Orientierung jedes Dipols zur Verbindungslinie.

III.3 Vollständige, orthogonale Funktionensysteme

Es ist instruktiv und oft nützlich, die Multipolmomente in sphärischen Polarkoordinaten zu untersuchen. Dabei begegnen wir unter anderem den Legendre-Polynomen und den Kugelflächenfunktionen, die Beispiele für orthogonale Funktionensysteme sind. Letztere treten ebenfalls in vielen Gebieten der Physik auf. Ziel ist nun im folgenden zunächst, das Konzept des linearen Vektorraums mit einem Skalarprodukt auf Funktionenräume zu übertragen.

Wir betrachten abzählbar unendlich viele komplexwertige Funktionen auf einem Intervall, $\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Auf der Menge dieser Funktionen $\{\varphi_n(\xi)\}_{n \in \mathbb{N}}$ definieren wir ein Skalarprodukt durch

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_a^b \varphi_n^*(\xi) \varphi_m(\xi) d\xi. \quad (\text{III.68})$$

Das System heißt orthogonal, falls

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = A_n \delta_{nm} \quad (\text{III.69})$$

und orthonormal, falls alle $A_n = 1$. Dann bilden die $\{\varphi_n\}$ eine Orthonormalbasis für einen unendlich-dimensionalen Vektorraum mit den Linearkombinationen

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^N f_n \varphi_n(\xi) \quad (\text{III.70})$$

mit beliebigem $N \in \mathbb{N}$. Man findet (analog dem Produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i$ im endlich-dimensionalen Fall)

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f^*(\xi) g(\xi) d\xi = \sum_{n,m} f_n^* g_m \int_a^b \varphi_n^*(\xi) \varphi_m(\xi) d\xi = \sum_{n,m} f_n^* g_m \delta_{nm} = \sum_m f_m^* g_m. \quad (\text{III.71})$$

Offenbar ist

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*. \quad (\text{III.72})$$

Man definiert die Norm von f als

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left[\int_a^b f^*(\xi) f(\xi) d\xi \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_n f_n^* f_n \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_n |f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0. \quad (\text{III.73})$$

$\|f\| = 0$ tritt nur ein, wenn $f(\xi) = 0$ für alle ξ .

Es gilt die **Schwarzsche Ungleichung**

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2. \quad (\text{III.74})$$

Man kann jedes linear unabhängige System von $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens orthonormalisieren.

Entwickelt man eine beliebige Funktion $F(\xi)$ in eine Orthonormalbasis,

$$F(\xi) = \sum_n F_n \varphi_n(\xi), \quad (\text{III.75})$$

so erhält man die Koeffizienten F_n durch

$$F_n = \int_a^b \varphi_n^*(\xi) F(\xi) d\xi = \langle \varphi_n, F \rangle. \quad (\text{III.76})$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \Delta_N &:= \left\| F - \sum_{n=0}^N F_n \varphi_n \right\|^2 \\ &= \|F\|^2 - \sum_{n=0}^N F_n^* \langle \varphi_n, F \rangle - \sum_{n=0}^N F_n \langle F, \varphi_n \rangle + \sum_{n,m=0}^N F_n^* F_m \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle \\ &= \|F\|^2 - 2 \sum_{n=0}^N F_n^* F_n + \sum_{n=0}^N F_n^* F_n \\ &= \|F\|^2 - \sum_{n=0}^N |F_n|^2. \end{aligned} \quad (\text{III.77})$$

Δ_N mißt, wie gut $\sum_{n=0}^N F_n \varphi_n(\xi)$ die Funktion $F(\xi)$ approximiert. Falls $\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N = 0$ für jede stetige Funktion $F(\xi)$, so heißt $\{\varphi_n\}$ ein **vollständiges** Orthonormalsystem.

Wegen

$$\Delta_N = \|F\|^2 - \sum_{n=0}^N |F_n|^2 = \|F\|^2 - \sum_{n=0}^N |\langle \varphi_n, F \rangle|^2 \quad (\text{III.78})$$

kann man die Bedingung $\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N = 0$, die Vollständigkeitsrelation, schreiben als

$$\langle F, F \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \varphi_n, F \rangle|^2, \quad (\text{III.79})$$

oder äquivalent als

$$\begin{aligned} \int_a^b F^*(\xi) F(\xi) d\xi &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \varphi_n^*(\xi) F(\xi) d\xi \int_a^b \varphi_n(\xi') F^*(\xi') d\xi' \\ &= \int_a^b d\xi' \int_a^b d\xi F(\xi) F^*(\xi') \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^*(\xi) \varphi_n(\xi'). \end{aligned} \quad (\text{III.80})$$

Wir haben daher die **Vollständigkeitsrelation**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^*(\xi) \varphi_n(\xi') = \delta(\xi - \xi'). \quad (\text{III.81})$$

III.4 Fourier-Entwicklung, Fourier-Transformation

Ein sehr wichtiges Beispiel für ein Orthonormalsystem von Funktionen ist das System aus trigonometrischen Funktionen

$$e^{i\alpha\xi} = \cos \alpha\xi + i \sin \alpha\xi. \quad (\text{III.82})$$

Dieses bringt uns zur **Fourier-Entwicklung** für Funktionen.

Die Funktionen ($a \in \mathbb{R}_+$)

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{in\pi\xi/a}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{III.83})$$

bilden ein Orthonormalsystem auf $[-a, a]$. Man kann daher für eine Funktion f die Fourierentwicklung

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\pi\xi/a} \quad (\text{III.84})$$

schreiben mit den Fourierkoeffizienten

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-a}^a e^{-in\pi\xi/a} f(\xi) d\xi. \quad (\text{III.85})$$

Für den speziellen Fall $f(\xi) = \delta(\xi - \xi')$ (für $\xi \in [-a, a]$) ist

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-in\pi\xi'/a}, \quad (\text{III.86})$$

so daß

$$\delta(\xi - \xi') = \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\pi(\xi - \xi')/a}. \quad (\text{III.87})$$

Die Funktionen φ_n sind $2a$ -periodisch,

$$\varphi_n(\xi + 2a) = \varphi_n(\xi). \quad (\text{III.88})$$

Daher lassen sich alle Funktionen der Periode $2a$ so entwickeln. Allerdings ist die Konvergenz nur an den Stetigkeitsstellen von f auch gleichmäßig, nicht an den Sprungstellen.

Wir wollen das Konzept der Fourierentwicklung auch auf nicht-periodische Funktionen verallgemeinern und diese ebenfalls entwickeln. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} k_n &:= \frac{n\pi}{a} \\ \Delta k &:= \frac{\pi}{a} \\ \tilde{f}(k_n) &:= \sqrt{\frac{a}{\pi}} f_n. \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

Damit wird die Entwicklung

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}} f_n e^{in\pi\xi/a} \frac{\pi}{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_n) e^{ik_n\xi} \Delta k. \end{aligned} \quad (\text{III.90})$$

Für $a \rightarrow \infty$ wird aus der Summation über k_n eine Integration über k :

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ik\xi} dk \quad (\text{III.91})$$

$\tilde{f}(k)$ heißt **Fouriertransformierte** von $f(\xi)$. Wir können $\tilde{f}(k)$ durch die Verallgemeinerung von (III.85) bestimmen, nämlich

$$\tilde{f}(k_n) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ik_n \xi} f(\xi) d\xi. \quad (\text{III.92})$$

Für $a \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} f(\xi) d\xi \quad (\text{III.93})$$

Ein präziser Beweis dieser Formeln im Grenzwert $a \rightarrow \infty$ ist möglich.

Aus obigen Transformationen erhalten wir

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' e^{ik(\xi-\xi')} f(\xi') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' f(\xi') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(\xi-\xi')}. \end{aligned} \quad (\text{III.94})$$

Daraus lesen wir ab, daß

$$\delta(\xi - \xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(\xi-\xi')}, \quad (\text{III.95})$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi} dk = 2\pi\delta(\xi) \quad (\text{III.96})$$

Diese Formeln lassen sich leicht auf drei Dimensionen verallgemeinern:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \quad (\text{III.97})$$

$$f(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \quad (\text{III.98})$$

und

$$\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \quad (\text{III.99})$$

Eine wichtige Anwendung ist unter anderem die Darstellung der Greenschen Funktion als Fouriertransformierte,

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{k^2}. \quad (\text{III.100})$$

III.5 Legendre-Polynome

Ein weiteres wichtiges Beispiel für ein vollständiges orthogonales Funktionensystem sind die Legendre-Polynome. Wir entwickeln wieder die Greensche Funktion $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ in eine Potenzreihe, wobei wir $r = |\mathbf{x}|$, $r' = |\mathbf{x}'|$ und $\theta = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ benutzen,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \theta}} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r'}{r}\right)^l \quad \text{für } r' < r \end{aligned} \quad (\text{III.101})$$

Die hierdurch definierten $P_l(x)$ sind die **Legendre-Polynome**. Diese Polynome, $\{P_l(x)\}_{l \in \mathbb{N}}$, bilden ein vollständiges orthogonales Funktionensystem auf dem Intervall $[-1, 1]$.

In obiger Formel ist die Bedingung $r' < r$ wichtig für die Konvergenz der Reihe. Für den Fall $r < r'$ vertauscht man r und r' . Man schreibt allgemein auch

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (\text{III.102})$$

wobei $r_{<}$ ($r_{>}$) das kleinere (größere) von r und r' ist.

Dies kann man auch mit Hilfe der θ -Funktion darstellen:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \theta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) + \theta(r' - r) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (\text{III.103})$$

Für $\mathbf{x}' = r' \mathbf{e}_z$ können wir auch folgende Taylorentwicklung schreiben:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} r'^l (\mathbf{e}_z \cdot \nabla)^l \frac{1}{r} = \sum_{l=0}^{\infty} r'^l \frac{(-1)^l}{l!} \frac{\partial^l}{\partial z^l} \frac{1}{r}. \quad (\text{III.104})$$

Durch Vergleich mit (III.101) erkennt man

$$P_l(\cos \theta) = r'^{l+1} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{\partial^l}{\partial z^l} \frac{1}{r}. \quad (\text{III.105})$$

Man kann zeigen, daß dies äquivalent ist zur **Rodrigues-Formel**

$$\boxed{P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l} \quad (\text{III.106})$$

Damit findet man

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^2 - 3x) \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{III.107})$$

Insbesondere ist P_l ein Polynom vom Grad l . Es gilt

$$P_l(1) = 1, \quad P_l(-1) = (-1)^l. \quad (\text{III.108})$$

P_l ist eine gerade (ungerade) Funktion für l gerade (ungerade). P_l hat l Nullstellen in $[-1, 1]$.

Die P_l erfüllen eine Differentialgleichung 2. Ordnung, die **Legendresche Differentialgleichung**

$$(1 - x^2)P_l'' - 2xP_l' + l(l+1)P_l = 0 \quad (\text{III.109})$$

die man auch schreiben kann als

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP_l}{dx} \right] + l(l+1)P_l = 0. \quad (\text{III.110})$$

Damit kann man (durch Reihenentwicklung, deren Konvergenz das Abbrechen der Reihe erfordert,) zeigen, daß die Endlichkeit und Stetigkeit auf $[-1, 1]$ (mit den Endpunkten!) erfordert:

$$l \in \mathbb{N}. \quad (\text{III.111})$$

Es gilt die Rekursionsformel

$$(l+1)P_{l+1} - (2l+1)xP_l + lP_{l-1} = 0, \quad (\text{III.112})$$

wofür $P_{-1} = 0$ definiert wird. Weiter gilt die **Orthogonalitätsrelation**

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (\text{III.113})$$

Die P_l bilden ein vollständiges System auf $[-1, 1]$, d. h. jedes $f(x)$ auf $[-1, 1]$ kann man darstellen als

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x) \quad (\text{III.114})$$

mit

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_l(x)f(x) dx. \quad (\text{III.115})$$

Die Vollständigkeitsrelation ist

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x)P_l(x') = \delta(x-x') \quad (\text{III.116})$$

III.6 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten, Kugelflächenfunktionen

Es ist in vielen Fällen nützlich, die Multipolentwicklung einer Ladungsverteilung in sphärischen Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) durchzuführen. Dabei wollen wir die Poisson-Gleichung lösen, um das elektrostatische Potential $\varphi(\mathbf{x})$ zu bestimmen. Wie wir gesehen hatten, sind

für dieses Problem auch die homogenen Lösungen, d. h. die Lösungen der Laplace-Gleichung wichtig. Diese wollen wir jetzt in Kugelkoordinaten studieren. Die folgenden Überlegungen sind auch in der Quantenmechanik von großer Bedeutung.

In sphärischen Polarkoordinaten (r, θ, φ) wird die Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$ zu

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \right) \phi = 0, \quad (\text{III.117})$$

worin

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (\text{III.118})$$

Mit dem Separationsansatz

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{u(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi) \quad (\text{III.119})$$

wird daraus nach Multiplikation mit $r^3 \sin^2 \theta / (u P Q)$

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{u} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{1}{P} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] = -\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2}. \quad (\text{III.120})$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nicht von φ abhängt, muß auch die rechte Seite von φ unabhängig und damit eine Konstante sein, die wir mit m^2 bezeichnen wollen,

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2. \quad (\text{III.121})$$

Dies wird gelöst durch

$$Q = e^{\pm im\varphi}. \quad (\text{III.122})$$

Damit die Lösung eindeutig ist, d. h. zur Sicherstellung der 2π -Periodizität in φ , muß

$$m \in \mathbb{Z}. \quad (\text{III.123})$$

In ähnlicher Weise können die von r und die von θ abhängigen Terme auf der linken Seite von (III.120) separiert werden, indem man eine neue Konstante $l(l+1)$ einführt. Man erhält

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0 \quad (\text{III.124})$$

und

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u = 0. \quad (\text{III.125})$$

Die Lösung der letzten Gleichung ist (mit zwei Konstanten A und B)

$$u(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}, \quad (\text{III.126})$$

während aus (III.124) mit $x = \cos \theta$ die **verallgemeinerte Legendresche Differentialgleichung** wird:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0. \quad (\text{III.127})$$

Ihre Lösungen sind die **zugeordneten Legendre-Funktionen** $P_l^m(x)$. Man kann zeigen: für die Endlichkeit auf ganz $[-1, 1]$ muß $l \in \mathbb{N}$ und $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$.

Beachte, daß man für $m = 0$ die Legendre-Differentialgleichung erhält, so daß $P_l^0 = P_l$.
Man findet für $m > 0$

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x). \quad (\text{III.128})$$

Mit der Rodrigues-Formel daher

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \quad (\text{III.129})$$

was für positive und negative m gilt. Weiter gilt

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (\text{III.130})$$

Die P_l^m sind orthogonal,

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll}. \quad (\text{III.131})$$

Wir hatten die Lösung der Laplace-Gleichung in 3 Faktoren zerlegt, die von den Variablen r , θ und φ abhängen. Wenn wir die Faktoren mit den Winkelabhängigkeiten zusammenfassen, erhalten wir die **Kugelflächenfunktionen** (im englischen *spherical harmonics*) $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, manchmal auch als $Y_{lm}(\Omega)$ bezeichnet. Sie sind definiert als

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\text{III.132})$$

Es gilt

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \quad (\text{III.133})$$

und die Orthogonalitätsrelation

$$\int Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{m'm}. \quad (\text{III.134})$$

Die Vollständigkeitsrelation ist

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') = \delta^{(2)}(\Omega - \Omega'). \quad (\text{III.135})$$

Die niedrigsten Y_{lm} sind (wobei negative m durch (III.133) erhalten werden können)

$$\begin{aligned}
 Y_{00}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
 Y_{11}(\theta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \\
 Y_{10}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\
 Y_{22}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi} \\
 Y_{21}(\theta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} \\
 Y_{20}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{III.136}$$

Offenbar ist

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta). \tag{III.137}$$

Es gilt das Additionstheorem

$$\frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = P_l(\cos \alpha), \tag{III.138}$$

worin $\alpha = \angle(\Omega, \Omega')$ mit $\Omega = (\theta, \varphi)$, $\Omega' = (\theta', \varphi')$.

Man kann jede beliebige Funktion $g(\theta, \varphi)$ in die Y_{lm} entwickeln,

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{III.139}$$

mit den Koeffizienten

$$A_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi). \tag{III.140}$$

Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung (die das Randwertproblem ohne Ladungen beschreibt) ist dann

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi), \tag{III.141}$$

und die Koeffizienten A_{lm} , B_{lm} sind durch die Randbedingungen bestimmt. Für Dirichlet-Randbedingungen $\phi = 0$ im Unendlichen folgt z. B. $A_{lm} = 0$.

III.7 Elektrische Multipole beliebiger Ordnung

Die Lösung der Poisson-Gleichung ist allgemein

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \tag{III.142}$$

Wir interessieren uns wieder für das Potential einer *lokalisierten* Ladungsverteilung ρ , z. B. mit $\rho(\mathbf{x}') = 0$ für $|\mathbf{x}'| > R$. Für große $r > R > r'$ können wir daher die Entwicklung (siehe (III.101))

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \alpha) \left(\frac{r'}{r} \right)^l \quad (\text{III.143})$$

einsetzen und erhalten

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \rho(\mathbf{x}') \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \alpha) \frac{r'^l}{r^{l+1}} d^3 x' \quad (\text{III.144})$$

mit $\alpha = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Mit dem Additionstheorem für die Kugelflächenfunktionen (III.138) gilt daher

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \int \rho(\mathbf{x}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d^3 x' \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}. \quad (\text{III.145})$$

Definieren wir die (statischen) **Multipolmomente** in Kugelkoordinaten

$$Q_{lm} := \int \rho(\mathbf{x}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d^3 x' \quad (\text{III.146})$$

gilt also für $r > R$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \quad (\text{III.147})$$

Die Q_{lm} sind im allgemeinen komplexe Zahlen, und es gilt

$$Q_{l,-m} = (-1)^m Q_{lm}^*. \quad (\text{III.148})$$

Es gibt jeweils $2l + 1$ Multipolmomente der Ordnung l . Dies entspricht unseren Erwartungen aus der Kenntnis der Multipolmomente in kartesischen Koordinaten:

$$l = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 1 \text{ Komponente: Gesamtladung } Q$$

$$l = 1 \quad \longleftrightarrow \quad 3 \text{ Komponenten von } \mathbf{p}$$

$$l = 2 \quad \longleftrightarrow \quad 5 \text{ Komponenten von } (q_{kl})$$

Es ist

$$Q_{00} = \int \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{\sqrt{4\pi}} d^3 x' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} Q \quad (\text{III.149})$$

mit der Gesamtladung Q und das Potential zu dieser Ordnung ist

$$\varphi_{00}(\mathbf{x}) = 4\pi \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} \frac{Y_{00}}{r} = \frac{Q}{r}. \quad (\text{III.150})$$

Weiter finden wir für die Dipolmomente

$$\begin{aligned}
 Q_{10} &= \int \rho(\mathbf{x}') r' \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta' d^3 x' \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') z' d^3 x' \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_3
 \end{aligned} \tag{III.151}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= - \int \rho(\mathbf{x}') r' \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta' e^{-i\varphi'} d^3 x' \\
 &= - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') r' [\cos \varphi' \sin \theta' - i \sin \varphi' \sin \theta'] d^3 x' \\
 &= - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') [x' - iy'] d^3 x' \\
 &= - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_1 - ip_2)
 \end{aligned} \tag{III.152}$$

$$Q_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_1 + ip_2), \tag{III.153}$$

sowie in ähnlicher Weise für die Quadrupolmomente

$$\begin{aligned}
 Q_{22} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') (x' - iy')^2 d^3 x' \\
 &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (q_{11} - q_{22} - 2iq_{12})
 \end{aligned} \tag{III.154}$$

$$Q_{21} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (q_{13} - iq_{23}) \tag{III.155}$$

$$Q_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} q_{33} \tag{III.156}$$

$$Q_{2,-1} = -Q_{21}^* \tag{III.157}$$

$$Q_{2,-2} = Q_{22}^*. \tag{III.158}$$

Wir hatten gesehen, daß sich ein Koordinatensystem finden läßt, so daß

$$Q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} |\mathbf{p}|, \quad Q_{11} = 0. \tag{III.159}$$

Ähnlich ist für das Quadrupolmoment eine Koordinatenwahl möglich, so daß

$$\begin{aligned}
 Q_{22} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (q_{11} - q_{22}) \\
 Q_{21} &= -Q_{2,-1} = 0 \\
 Q_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} q_{33}.
 \end{aligned} \tag{III.160}$$

Für axialsymmetrisches ρ ist zudem $q_{11} = q_{22}$, d. h. $Q_{22} = 0$. Dann

$$\begin{aligned}\varphi_{(2)} &= \frac{4\pi}{5} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} q_{33} \frac{\frac{4\pi}{5} P_2(\cos \theta)}{r^3} \\ &= \frac{1}{2} q_{33} \frac{P_2(\cos \theta)}{r^3}\end{aligned}\tag{III.161}$$

wie gehabt.

Allgemein lassen sich von den $2l + 1$ Komponenten des Multipols l -ter Ordnung durch geeignete Koordinatenwahl 3 beliebig wählen (etwa durch Fixierung der Euler-Winkel). Die Q_{lm} enthalten dann für $l > 1$ nur noch $2l - 2$ **innere** Komponenten.

Kapitel IV

Magnetostatik

Magnetostatische Probleme können mit ähnlichen Methoden behandelt werden wie die der Elektrostatik. Insbesondere kann man auch hier bei lokalisierten Stromverteilungen die Multipolentwicklung anwenden. Im folgenden beschränken wir uns auf wenige Aspekte, von denen einige charakteristische Eigenheiten der Magnetostatik aufgreifen.

Wir hatten bereits die Grundgleichungen der Magnetostatik kennengelernt, die aus den Maxwell-Gleichungen im statischen Fall ($\dot{\mathbf{E}} = 0$, $\dot{\mathbf{B}} = 0$) folgen:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.\end{aligned}\tag{IV.1}$$

Letzteres ist die differentielle Form des Ampèreschen Gesetzes. Für das Vektorpotential \mathbf{A} mit

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}\tag{IV.2}$$

konnten wir die Coulomb-Eichung wählen, d. h.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.\tag{IV.3}$$

Dies war immer durch eine geeignete Eichtransformation

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi\tag{IV.4}$$

mit einer Funktion $\chi(\mathbf{x})$ zu erreichen. \mathbf{B} ist eichinvariant. In Coulomb-Eichung gilt dann

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j},\tag{IV.5}$$

und die (eindeutige) Lösung war

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'.\tag{IV.6}$$

Daraus folgt das Biot-Savartsche Gesetz

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x'.\tag{IV.7}$$

Wir können also das Vektorpotential und die magnetische Induktion einer gegebenen (statischen) Stromverteilung berechnen.

IV.1 Magnetfeld eines geradlinigen Leiters

Als einfaches Beispiel betrachten wir einen geradlinigen, unendlich langen Draht, der vom Strom I durchflossen wird. Der Draht habe einen vernachlässigbar kleinen Querschnitt und sei in 3-Richtung orientiert. Die Stromdichte ist dann

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3 I \delta(x_1) \delta(x_2). \quad (\text{IV.8})$$

Nach dem Ampèreschen Gesetz ist

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (\text{IV.9})$$

Da nach (IV.6) offenbar $\mathbf{A} \sim \mathbf{e}_3$, haben wir $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \sim \mathbf{e}_\varphi$:

$$\mathbf{B} = B(r) \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{IV.10})$$

Abbildung

Also ist

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B(r) = \frac{4\pi}{c} I, \quad (\text{IV.11})$$

so daß

$$\mathbf{B}(r) = \frac{2I}{c} \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{IV.12})$$

Alternativ können wir nach das Magnetfeld nach dem Biot-Savartschen Gesetz bestimmen. Für einen dünnen Leiter können wir die Integration zerlegen in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil, $d^3x' = df d\mathbf{x}$. Der Strom ist $I = |\mathbf{j}| df$, und $\mathbf{j} \sim d\mathbf{x}'$ ist entlang des Leiters orientiert. Das Integral $\int df$ kann mit der δ -Funktion für den dünnen Leiter leicht ausgeführt werden, so daß aus $\mathbf{j} d^3x'$ der Ausdruck $I d\mathbf{x}'$ wird, den wir entlang der Leiterkurve integrieren. Daher

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{I}{c} \int_{\text{Leiter}} d\mathbf{x}' \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= \frac{I}{c} \mathbf{e}_3 \times \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{\mathbf{R}}{(R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2I}{cR} \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

wobei wir \mathbf{R} folgendermaßen gewählt haben

Abbildung

so daß $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 = R^2 + l^2$. Im zweiten Schritt haben wir benutzt, daß nur Komponenten senkrecht zu \mathbf{e}_3 zum Integral beitragen. Mit der Ersetzung $R \rightarrow r$ erhalten wir also dasselbe Resultat wie oben.

IV.2 Kraft auf einen Strom im Magnetfeld

Für eine bewegte Ladungsverteilung ρ erhält man allgemein, d. h. auch für zeitabhängige Fälle, die zugehörige Stromdichte als $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, oder expliziter

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{IV.14})$$

Aus der Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{IV.15})$$

erhalten wir dann die Kraft auf ein kleines Volumen δV

$$\delta \mathbf{K} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) \delta V \quad (\text{IV.16})$$

mit der **Kraftdichte**

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (\text{IV.17})$$

Die Kraft auf das Volumen V wird dann

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{k}(\mathbf{x}) d^3x. \quad (\text{IV.18})$$

Damit wirkt auf eine Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ im Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ die Kraft

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c} \int d^3x \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (\text{IV.19})$$

Zum Beispiel wirkt auf einen Stromkreis (2) im Feld eines anderen (1) die Kraft

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2 &= \frac{1}{c} \int d^3x \mathbf{j}_2(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}_1(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{c^2} \int d^3x d^3x' \mathbf{j}_2(\mathbf{x}) \times \frac{\mathbf{j}_1(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

Darin ist (siehe (II.49))

$$\frac{\mathbf{j}_1(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \left(\nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \times \mathbf{j}_1(\mathbf{x}'). \quad (\text{IV.21})$$

Daher aus (IV.20)

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{c^2} \int d^3x d^3x' [\mathbf{j}_1(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{x})] \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{c^2} \int d^3x d^3x' \left[\left(\nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{x}) \right] \mathbf{j}_1(\mathbf{x}'). \quad (\text{IV.22})$$

Da aber das Integral

$$\int d^3x \left(\nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{x}) = - \int d^3x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.23})$$

für den Kreisstrom 2 wegen der Quellenfreiheit ($\operatorname{div} \mathbf{j}_2 = 0$), verschwindet, erhalten wir

$$\mathbf{K}_2 = -\frac{1}{c^2} \int d^3x d^3x' [\mathbf{j}_1(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{x})] \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (\text{IV.24})$$

Dieses Kraftgesetz zeigt die Symmetrie unter Vertauschung der beiden Stromkreise: Man erhält $\mathbf{K}_1 = -\mathbf{K}_2$ durch die Vertauschungen $1 \leftrightarrow 2$ und $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$.

Nehmen wir zwei dünne Leiter an, können wir nach den Überlegungen aus Abschnitt IV.1 schreiben

$$\mathbf{K}_2 = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (\text{IV.25})$$

IV.3 Lokalisierte Stromverteilung und magnetischer Dipol

Auch für lokalisierte Stromverteilungen ist es sinnvoll, eine Multipolentwicklung durchzuführen. Dabei geht es wieder darum, einige wenige Eigenschaften der Stromverteilung zu berechnen, die die führenden Beiträge zum Magnetfeld bei großen Abständen von der Stromverteilung bestimmen.

Wir betrachten eine lokalisierte Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{x}')$ nahe am Ursprung, d. h. $\mathbf{j}(\mathbf{x}') = 0$ für $|\mathbf{x}'| > L$ mit einem vorgegebenen L . Für große $|\mathbf{x}|$ ($|\mathbf{x}| \gg L$) können wir dann eine Taylorentwicklung in r/r' durchführen. (Natürlich ist wieder $r = |\mathbf{x}|$ und $r' = |\mathbf{x}'|$.)

Das Vektorpotential der Stromverteilung in Coulomb-Eichung ist nach (II.48)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (\text{IV.26})$$

Durch Entwickeln in eine Taylorreihe erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{cr^3} \int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' + \dots \\ &=: \mathbf{A}_{(0)}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_{(1)}(\mathbf{x}) + \dots \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

Für große r ist $\dot{\mathbf{j}} = 0$ und wegen $\dot{\rho} = 0$ auch $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Für einen beliebigen konstanten Vektor \mathbf{a} gilt weiter

$$\operatorname{div} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{j}] = \mathbf{j} \operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{j}}_{=0} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}. \quad (\text{IV.28})$$

Nach dem Gaußschen Satz also

$$\int_V \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} d^3x = \int_V \operatorname{div} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{j}] d^3x = \int_{\partial V} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = 0, \quad (\text{IV.29})$$

da $\mathbf{j} = 0$ auf ∂V bei großem r . Dies gilt für jedes konstante \mathbf{a} , insbesondere für $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Daher

$$\int_V \mathbf{j} d^3x = 0. \quad (\text{IV.30})$$

Daher

$$\boxed{\mathbf{A}_{(0)}(\mathbf{x}) = 0} \quad (\text{IV.31})$$

Der erste Term $\mathbf{A}_{(0)}(\mathbf{x})$ in der Taylorentwicklung von $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Es gibt also keine magnetischen Monopolfelder!

Um den nächsten Term $\mathbf{A}_{(1)}(\mathbf{x})$ in der Entwicklung (IV.27) zu vereinfachen, betrachten wir zunächst folgenden Ausdruck, der darin vorkommt:

$$[(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{j}]_l = x_k x'_k j_l. \quad (\text{IV.32})$$

Wir zerlegen darin $x'_k j_l$ in einen symmetrischen Anteil S_{kl} und einen antisymmetrischen Anteil:

$$\begin{aligned} x'_k j_l &= \frac{1}{2}(x'_k j_l + x'_l j_k) + \frac{1}{2}(x'_k j_l - x'_l j_k) \\ &= S_{kl} + \frac{1}{2} \sum_m \epsilon_{klm} [\mathbf{x}' \times \mathbf{j}]_m. \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

Mit

$$j_l = \operatorname{div}(\mathbf{j}x_l) = x_l \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{j}}_{=0} + \mathbf{j} \cdot \underbrace{\operatorname{grad} x_l}_{=\mathbf{e}_l} \quad (\text{IV.34})$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \int x'_k j_l d^3 x' &= \int x'_k \operatorname{div}_{x'}(\mathbf{j}x'_l) d^3 x' \\ (\text{part. Int.}) &= - \int \underbrace{(\nabla_{x'} x'_k)}_{\mathbf{e}_k} \mathbf{j} x'_l d^3 x' \\ &= - \int j_k x'_l d^3 x', \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

woraus folgt, daß

$$\int S_{kl} d^3 x' = \frac{1}{2} \int (x'_k j_l + x'_l j_k) d^3 x' = 0. \quad (\text{IV.36})$$

Es bleibt bei der Berechnung von $\mathbf{A}_{(1)}(\mathbf{x})$ in (IV.27) also nur der antisymmetrische Anteil aus (IV.33) zu berücksichtigen. Daher

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(1)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{cr^3} \sum_l \mathbf{e}_l \int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') j_l(\mathbf{x}') d^3 x' \\ (\text{nur antisymm. Anteil}) &= \frac{1}{2cr^3} \sum_l \mathbf{e}_l \int \sum_{k,m} x_k \epsilon_{klm} [\mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}')]_m d^3 x' \\ &= -\frac{1}{2cr^3} \sum_l \mathbf{e}_l \int [\mathbf{x} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}'))]_l d^3 x' \\ &= -\frac{1}{2cr^3} \int \mathbf{x} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}')) d^3 x' \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

Wir finden also

$$\boxed{\mathbf{A}_{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3}} \quad (\text{IV.38})$$

mit dem **magnetischen Dipolmoment** der Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{x}')$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' \quad (\text{IV.39})$$

Man beachte die Analogie zum elektrischen Dipolmoment.

Die Äquipotentialflächen $|\mathbf{A}_{(1)}| = \text{const}$ haben wegen

$$|\mathbf{A}_{(1)}| = \frac{|\mathbf{m}| \sin \theta}{r^2} \quad (\text{IV.40})$$

die folgende Form:

Abbildung

Das **magnetische Dipolfeld** $\mathbf{B}_{(1)}(\mathbf{x})$, das sich aus $\mathbf{A}_{(1)}(\mathbf{x})$ ergibt, ist

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(1)}(\mathbf{x}) &= \text{rot } \mathbf{A}_{(1)}(\mathbf{x}) \\ &= -\nabla_x \times \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{m}}{r^3} \\ &= -(\mathbf{m} \times \nabla) \frac{\mathbf{x}}{r^3} + \mathbf{m} \text{div} \frac{\mathbf{x}}{r^3}. \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

Also

$$\mathbf{B}_{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} - r^2\mathbf{m}}{r^5} \quad (\text{IV.42})$$

Höhere Multipolmomente können ganz analog zur Elektrostatik definiert werden. Auch dabei kann man höhere Multipolmomente mittels kartesischer Koordinaten oder mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen definieren.

IV.4 Magnetisches Dipolmoment eines Ringstroms

IV.5 Kraft und Drehmoment auf einen magnetischen Dipol

Kapitel V

Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen, elektromagnetische Wellen

Wir betrachten jetzt wieder die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen, für die wir im folgenden allgemeine Lösungen finden wollen.

Die Maxwell-Gleichungen konnten, wie wir in Kapitel I.6.c gesehen haben, in zwei Gruppen aufgeteilt werden: die **homogenen Maxwell-Gleichungen**

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{V.1})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{V.2})$$

und die **inhomogenen Maxwell-Gleichungen**

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (\text{V.3})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (\text{V.4})$$

Die Ladungs- und Stromverteilungen $\rho(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ treten also nur in den inhomogenen Gleichungen auf.

Wir wollen im folgenden $\rho(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ als vorgegebene Funktionen von \mathbf{x} und t auffassen, wir nehmen also an, daß die Bewegung aller geladenen Teilchen bekannt ist. Wir vernachlässigen die Rückwirkung des elektromagnetischen Feldes auf die Teilchen. Dieses Vorgehen ist also nur die 1. Näherung in einer systematischen Approximation.

Wir werden nun die homogenen Gleichungen durch Einführung der elektromagnetischen Potentiale $\varphi(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ lösen. Die inhomogenen Gleichungen werden dann auf Wellengleichungen für φ und \mathbf{A} führen.

V.1 Lösung der homogenen Gleichungen, allgemeine elektromagnetische Potentiale, Eichtransformationen

Aus $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ folgt, daß \mathbf{B} ein Wirbelfeld ist,

$$\boxed{\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}} \quad (\text{V.5})$$

mit einem zunächst beliebigen Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$. Einsetzen dieser Relation in (V.2) ergibt

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = 0, \quad (\text{V.6})$$

bzw.

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = 0. \quad (\text{V.7})$$

Daher ist der Ausdruck in Klammern ein Gradientenfeld:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (\text{V.8})$$

oder

$$\boxed{\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}} \quad (\text{V.9})$$

mit einer zunächst beliebigen Funktion $\varphi(\mathbf{x}, t)$.

Damit sind die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen gelöst, denn sie sind für jede Wahl von $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ und $\varphi(\mathbf{x}, t)$ erfüllt.

Allerdings sind \mathbf{A} und φ *nicht* eindeutig bestimmt. Wenn wir \mathbf{A} in folgender Weise transformieren:

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi \quad (\text{V.10})$$

mit einer beliebigen Funktion $\chi(\mathbf{x}, t)$, so ändert sich *bsB* nicht, denn

$$\mathbf{B}' = \operatorname{rot} \mathbf{A}' = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \underbrace{\operatorname{rot} \operatorname{grad} \chi}_{=0} = \mathbf{B}. \quad (\text{V.11})$$

Damit dann auch \mathbf{E} invariant bleibt, müssen wir auch φ transformieren, und zwar so, daß

$$-\operatorname{grad} \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}' = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}. \quad (\text{V.12})$$

Mit $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi$ ergibt das

$$\begin{aligned} -\operatorname{grad} \varphi' - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial t} \chi &= -\operatorname{grad} \varphi \\ \implies \operatorname{grad} \left(\varphi' + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi \right) &= \operatorname{grad} \varphi, \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

so daß die Transformation von φ gerade ist

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi. \quad (\text{V.14})$$

Damit finden wir:

\mathbf{E} und \mathbf{B} bleiben invariant unter der Eichtransformation

$$\begin{aligned} \varphi &\longrightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

mit einer *beliebigen* Funktion $\chi(\mathbf{x}, t)$.

Diese Transformationen bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die sogenannte **Eichgruppe**.

Für den Spezialfall

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \chi_0(\mathbf{x}) - ctC \quad (\text{V.16})$$

mit $C = \text{const.}$ erhält man die Eichtransformation der statischen Theorie (vgl. (II.39), (II.40)),

$$\begin{aligned} \varphi &\longrightarrow \varphi + C, \\ \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A} + \text{grad } \chi_0 \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

Die Potentiale φ und \mathbf{A} haben *keine* physikalische Bedeutung, sie sind *nicht meßbar*. \mathbf{E} und \mathbf{B} sind dagegen meßbar, d. h. sie sind **Observablen**. Im Gegensatz zu φ und \mathbf{A} sind sie **eichinvariant**. Alle Observablen sind eichinvariant.

V.2 Die inhomogenen Gleichungen, Coulomb- und Lorenz-Eichung

Mit (V.5) und (V.9) folgt aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen (V.3) und (V.4):

$$-\Delta\varphi - \frac{1}{c} \text{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 4\pi\rho \quad (\text{V.18})$$

und

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{A} &= \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \\ &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{V.19})$$

bzw.

$$\left(-\Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} + \text{grad} \left(\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (\text{V.20})$$

Wir können nun versuchen, die beiden Gleichungen (V.18) und (V.20) durch geeignete Eichtransformationen zu vereinfachen.

V.2.a Coulomb-Eichung

Man kann (wie in der statischen Theorie, jetzt aber für alle t) die Nebenbedingung bzw. **Eichbedingung**

$$\boxed{\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0} \quad (\text{V.21})$$

für alle t wählen. Dies nennt man die **Coulomb-Eichung**¹, **transverale Eichung** oder **Strahlungseichung**. Daß diese Wahl auch im allgemeinen, zeitabhängigen Fall immer möglich ist, können wir folgendermaßen erkennen. Sei etwa $\text{div } \mathbf{A} = 4\pi\eta(\mathbf{x}, t) \neq 0$, und sei χ die Funktion in der Eichtransformation, so daß

$$\text{div } \mathbf{A}' = \text{div } \mathbf{A} + \Delta\chi = 0, \quad (\text{V.22})$$

¹Sie ist benannt nach Charles Augustin de Coulomb.

d. h.

$$\Delta\chi = -4\pi\eta(\mathbf{x}, t). \quad (\text{V.23})$$

Dies wird durch

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\eta(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (\text{V.24})$$

gelöst, und wir haben damit ein geeignetes χ , um auf die Coulomb-Eichung zu gelangen.

Mit $\text{div } \mathbf{A} = 0$ vereinfacht sich (V.18) und wird zu

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}, t) = -4\pi\rho(\mathbf{x}, t), \quad (\text{V.25})$$

also zur bekannten Poisson-Gleichung, die wir bereits aus der Elektrostatik kennen. Deren eindeutige Lösung ist

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (\text{V.26})$$

Das skalare Potential wird also in Coulomb-Eichung zu jeder Zeit t durch dieser Zeit vorhandene Ladungsdichte bestimmt und zwar durch die aus der Elektrostatik bekannte Coulomb-Formel. (Daher stammt auch der Name dieser Eichung.) Dies wird als das **instantane Coulomb-Potential** bezeichnet. Zeitliche Änderungen der Ladungsdichte übertragen sich *sofort* (gleichsam mit unendlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit) auf $\varphi(\mathbf{x}, t)$. φ ist aber *keine* Observable. Man kann zeigen:² das instantane Coulomb-Potential impliziert *keine* Verletzung des Prinzips, daß sich Wirkungen höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Es kommt daher nicht zu einer Verletzung der Kausalität.

Aus (V.20) erhalten wir dann

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \text{grad} \frac{1}{c} \int \frac{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (\text{V.27})$$

und wegen $\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ also

$$\begin{aligned} \square \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \text{grad} \int \frac{\text{div } \mathbf{j}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \\ &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_t(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (\text{V.28})$$

worin wir den **d'Alembert-Operator**

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (\text{V.29})$$

und die **transversale Komponente des Stroms**

$$\mathbf{j}_t(\mathbf{x}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) - \text{grad} \int \frac{\left(-\frac{1}{4\pi}\right) \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (\text{V.30})$$

²Siehe z. B. O.L. Brill, B. Goodman, *Causality in the Coulomb Gauge*, Am. J. Phys. 35 (1967), 832; C.W. Gardiner, P.D. Drummond, *Causality in the Coulomb gauge: A direct proof*, Phys. Rev. A38 (1988); J.D. Jackson, *From Lorenz to Coulomb and other explicit gauge transformations*, Am. J. Phys. 70 (2002) [arXiv:physics/0204034 [physics.class-ph]].

definiert haben.

Die Bezeichnung 'transversal' kommt daher, daß

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{j}_t &= \nabla \cdot \mathbf{j} - \int \Delta_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(-\frac{1}{4\pi} \right) \nabla_{x'} \mathbf{j}(\mathbf{x}', t) d^3x' \\
 &= \nabla \cdot \mathbf{j} - \int \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_{x'} \mathbf{j}(\mathbf{x}', t) d^3x' \\
 &= \nabla \cdot \mathbf{j} - \nabla \cdot \mathbf{j} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{V.31}$$

Also $\nabla \cdot \mathbf{j}_t = 0$, d. h. \mathbf{j}_t ist **transversal** oder orthogonal zu ∇ . (Im Fourier-Raum ist \mathbf{j}_t orthogonal zu \mathbf{k} .) Analog heißt

$$\mathbf{j}_l = \operatorname{grad} \int \frac{\left(-\frac{1}{4\pi} \right) \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \tag{V.32}$$

die **longitudinale Komponente des Stroms**, d. h. \mathbf{j}_l ist parallel zu ∇ , denn $\nabla \times \mathbf{j}_l = 0$. Mit der Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \mathbf{j} + \dot{\rho} = 0$ ist

$$\mathbf{j}_l = \frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \tag{V.33}$$

Die longitudinale Komponente des Stroms ist also eindeutig durch die Ladungsdichte bestimmt.

Zusammenfassend finden wir also in der Coulomb-Eichung $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$:

- Das skalare Potential φ ist durch die Coulomb-Formel beschrieben.
- Das Vektorpotential \mathbf{A} wird durch den transversalen Anteil des Stroms beschrieben. (Daher stammt die Bezeichnung 'transversale Eichung'.)

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist, daß für $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$, d. h. im ladungs- und stromfreien Raum,

$$\varphi = 0. \tag{V.34}$$

Es ist also nur \mathbf{A} von Null verschieden und ist eine Lösung der Gleichung

$$\square \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0. \tag{V.35}$$

Wie wir sehen werden, sind allgemein in der Coulomb-Eichung (transversale) Strahlungsfelder nur durch \mathbf{A} gegeben, φ trägt nur im Nahfeld einer Ladungsverteilung bei. (Daher stammt die Bezeichnung 'Strahlungseichung'.)

In der Coulomb-Eichung ist offenbar die Behandlung von φ und \mathbf{A} nicht symmetrisch. Dies ist für die relativistisch invariante Beschreibung (s. später) ungünstig.

V.2.b Lorenz-Eichung

In der **Lorenz-Eichung**³ stellt man die in φ und \mathbf{A} symmetrische Eichbedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{V.36}$$

³Diese Eichung ist benannt nach Ludvig V. Lorenz, *nicht* nach Hendrik A. Lorentz – auch wenn die falsche Schreibweise in der Literatur weit verbreitet ist. Nach H. A. Lorentz sind die Lorentz-Transformationen benannt.

Damit vereinfacht sich die Gleichung (V.20) zu

$$\square \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{V.37})$$

und wegen

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (\text{V.38})$$

wird Gleichung (V.18) zu

$$\square \varphi(\mathbf{x}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{x}, t) \quad (\text{V.39})$$

Damit genügen in Lorenz-Eichung φ und \mathbf{A} einer **Wellengleichung**.

Wir überprüfen noch, daß die Lorenz-Eichung immer durch eine Eichtransformation erreicht werden kann. Sei etwa $\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 4\pi \eta(\mathbf{x}, t) \neq 0$ und $\chi(\mathbf{x}, t)$ die gesuchte Funktion für eine Eichtransformation (V.15) in die Lorenz-Eichung. Dann muß gelten

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} &= \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \\ &= 4\pi \eta - \square \chi = 0, \end{aligned} \quad (\text{V.40})$$

woraus folgt

$$\square \chi = 4\pi \eta. \quad (\text{V.41})$$

Dies ist aber gerade die Gleichung, die wir im folgenden Abschnitt lösen werden. Mit deren Lösung für ein beliebiges $\eta(\mathbf{x}, t)$ ist dann gezeigt, daß die Lorenz-Eichung immer durch eine Eichtransformation erreicht werden kann.

Es ist zu beachten, daß in der Lorenz-Eichung φ und \mathbf{A} *nicht* eindeutig bestimmt sind. Wir können bei Vorliegen der Lorenz-Eichung noch Umeichungen durchführen, deren Eichfunktion χ die Bedingung

$$\square \chi = 0 \quad (\text{V.42})$$

erfüllt. Man sagt, daß es sich bei der Lorenz-Eichung um eine **unvollständige Eichung** handelt.

V.2.c Andere Eichungen

Man unterscheidet eine Reihe weiterer Eichbedingungen, die in verschiedenen Situationen mit (mehr oder weniger) Gewinn benutzt werden. Unter den wichtigsten anderen Eichungen sind

- die **temporale Eichung** oder **Weyl-Eichung**

$$\varphi = 0, \quad (\text{V.43})$$

deren Eichbedingung oft auch als $A^0 = 0$ angegeben wird (eine Notation, die wir später kennenlernen werden). Auch die temporale Eichung ist eine unvollständige Eichung.

- die **axiale Eichung**

$$A_3 = 0, \quad (\text{V.44})$$

oder allgemeiner $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0$ für einen vorgegebenen Vektor \mathbf{n} mit $|\mathbf{n}| = 1$.

Der Vorteil der Lorenz-Eichung ist ihre Invarianz unter Lorentz-Transformationen der speziellen Relativitätstheorie (s. später). Die Lorentz-Invarianz ist in den anderen Eichungen nicht manifest.

V.3 Lösung der freien Wellengleichung

Offenbar ist die Wellengleichung für die Lösung der Maxwell-Gleichungen von großer Bedeutung. Wir hatten bereits gesehen, daß in Coulomb-Eichung \mathbf{A} Lösung der Wellengleichung ist, und daß in Lorenz-Eichung \mathbf{A} und φ Lösungen der Wellengleichung sind. Darüberhinaus kann man zeigen, daß direkt aus den Maxwell-Gleichungen auch Wellengleichungen für die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} resultieren, falls $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$ (siehe Übungen). Außerdem treten Wellengleichungen allgemein in der Physik in verschiedenen Zusammenhängen auf.

Um die allgemeine Lösung der Wellengleichung zu finden, ist es nützlich, zunächst die **freie Wellengleichung** (oder **homogene Wellengleichung**)

$$\square \psi(\mathbf{x}, t) = -\Delta \psi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{V.45})$$

zu studieren. Der Begriff 'frei' bezieht sich dabei auf die Abwesenheit von Quellen, d. h. $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$.

Es stellt sich als nützlich heraus, komplexwertige Lösungen der Wellengleichung zu suchen. Für reelle Größen kann man dann den Realteil der komplexwertigen Lösung nehmen.

V.3.a Lösung durch ebene Wellen

Wir machen den Ansatz einer **ebenen Welle**

$$\psi(\mathbf{x}, t) = a e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \quad (\text{V.46})$$

Dabei heißt \mathbf{k} der **Wellenzahlvektor**, und wir definieren $k = |\mathbf{k}|$. Man bezeichnet $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ als **Wellenlänge** der Welle, denn für festes t ist ψ eine periodische Funktion des Orts mit Periode λ in Richtung \mathbf{k} :

$$\psi\left(\mathbf{x} + \lambda \frac{\mathbf{k}}{k}, t\right) = \psi(\mathbf{x}, t) e^{i\lambda \frac{k^2}{k}} = \psi(\mathbf{x}, t) e^{i2\pi} = \psi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{V.47})$$

ω heißt **Kreisfrequenz**, und $\frac{2\pi}{\omega} = T = \frac{1}{\nu}$ ist die **Schwingungsdauer** der ebenen Welle, denn für festes \mathbf{x} ist ψ eine periodische Funktion der Zeit t mit Periode T :

$$\psi(\mathbf{x}, t + T) = \psi(\mathbf{x}, t) e^{-iT\omega} = \psi(\mathbf{x}, t) e^{-i2\pi} = \psi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{V.48})$$

Einsetzen des Ansatzes (V.46) in die freie Wellengleichung (V.45) ergibt die Terme

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= (i\mathbf{k})^2 \psi \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi &= \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 \psi, \end{aligned} \quad (\text{V.49})$$

so daß aus der freien Wellengleichung einen Zusammenhang zwischen \mathbf{k} und ω folgt:

$$\begin{aligned} \left[-(i\mathbf{k})^2 + \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 \right] \psi &= 0 \\ \implies \mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{bzw.} \quad |\mathbf{k}| = k = \pm \frac{\omega}{c}. \end{aligned} \quad (\text{V.50})$$

Anders ausgedrückt gilt

$$\lambda = cT \quad \text{bzw.} \quad \lambda \nu = c. \quad (\text{V.51})$$

Wir nennen $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ die **Phase** der Welle. Flächen konstanter Phase,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \text{const.}, \quad (\text{V.52})$$

stehen *senkrecht* auf \mathbf{k} .

Abbildung

Ist nämlich z. B. \mathbf{k} entlang der 1-Achse orientiert, so haben die Zeit- und Ortspunkte t_0, \mathbf{x}_0 und t, \mathbf{x} dieselbe Phase, wenn

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 - \omega t_0 \\ (\mathbf{k} = k\mathbf{e}_1) \implies kx - \omega t &= kx_0 - \omega t_0, \end{aligned} \quad (\text{V.53})$$

d. h.

$$x = x_0 + \frac{\omega}{k} (t - t_0), \quad (\text{V.54})$$

was Ebenen senkrecht zur 1-Richtung entspricht. Flächen konstanter Phase bewegen sich demzufolge mit der **Phasengeschwindigkeit**

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k} = c. \quad (\text{V.55})$$

■ Die Phasengeschwindigkeit der Welle ψ ist die Lichtgeschwindigkeit.

Wir werden später mit den Kugelwellen auch noch ein anderes mögliches Lösungssystem für die Wellengleichung kennenlernen.

V.3.b Monochromatische ebene elektromagnetische Wellen, Polarisation ebener Wellen

Betrachten wir nun eine **monochromatische** ebene Welle, d. h. eine ebene Welle mit gegebenen \mathbf{k} und $\omega = c|\mathbf{k}|$. (Die allgemeine Lösung der freien Wellengleichung wird dann eine Überlagerung monochromatischer Wellen sein, siehe unten.)

Wir erhalten dann eine Lösung der freien Maxwell-Gleichung in *Strahlungseichung*: bei $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ folgt aus $\text{div } \mathbf{A} = 0$ sofort $\varphi = 0$ und

$$\square \mathbf{A} = 0. \quad (\text{V.56})$$

Mit obiger ebener Welle erhalten wir eine Lösung dieser Gleichung als

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ &= \frac{\mathbf{A}_0}{|\mathbf{A}_0|} |\mathbf{A}_0| e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ &= \boldsymbol{\epsilon} |\mathbf{A}_0| e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \end{aligned} \quad (\text{V.57})$$

mit $\omega = \pm|\mathbf{k}|c$. Der Vektor $\boldsymbol{\epsilon}$ ist unabhängig von \mathbf{x} und t , ist aber im allgemeinen ein komplexwertiger Vektor. Man bezeichnet $\boldsymbol{\epsilon}$ als **Polarisationsvektor** der ebenen Welle. Wir betrachten hier wieder komplexwertige ebene Wellen, nehmen aber (was wir nicht explizit aus-schreiben) am Ende der Rechnung den Realteil, um reellwertige Größen zu erhalten.

Aus $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ folgt

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (\text{V.58})$$

d. h. $\boldsymbol{\epsilon}$ und \mathbf{k} stehen senkrecht aufeinander. Die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} können wir berechnen:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\epsilon} |A_0| e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (\text{V.59})$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = i(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}) |A_0| e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}, \quad (\text{V.60})$$

bzw. genauer $\mathbf{E} = \operatorname{Re}(\dots)$ und $\mathbf{B} = \operatorname{Re}(\dots)$. Also finden wir

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{E} \quad (\text{V.61})$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{B}. \quad (\text{V.62})$$

Dieses Ergebnis ist eichinvariant, da es direkt durch die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} ausgedrückt ist. Es beruht letztlich auf $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ und $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, was für den Fall $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ zutrifft.

Weiter sehen wir, daß

$$|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}| \quad (\text{V.63})$$

und

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}. \quad (\text{V.64})$$

Es folgt

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{B}. \quad (\text{V.65})$$

(Letztlich ist dies eine Folge von $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.)

Abbildung

Wir sehen, daß eine solche ebene elektromagnetische Welle durch die Angabe von \mathbf{E} (oder von \mathbf{B}) eindeutig beschrieben ist. Meistens wird hierfür \mathbf{E} verwendet.

■ Eine ebene elektromagnetische Welle breitet sich also mit der Geschwindigkeit c in Richtung \mathbf{k} aus, ist transversal polarisiert, und \mathbf{E} und \mathbf{B} stehen senkrecht aufeinander und beide senkrecht auf \mathbf{k} .

Man beachte noch einmal, daß eine Komponente von \mathbf{A}_0 parallel zu \mathbf{k} nichts zu den Feldstärken beiträgt.

Polarisation

Wir wollen die Polarisation ebener Wellen genauer untersuchen. Dazu wählen wir $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_3$, so daß

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\epsilon_1| e^{i\delta_1} \\ |\epsilon_2| e^{i\delta_2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{V.66})$$

Für einen festen Punkt \mathbf{x}_0 folgt dann der folgende zeitliche Verlauf der Feldstärkekomponenten:

$$\begin{aligned}
 E_1(t) &= \operatorname{Re} \left[|\epsilon_1| |\mathbf{A}_0| \frac{\omega}{c} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 - \omega t + \frac{\pi}{2} + \delta_1)} \right] \\
 &= |\epsilon_1| |\mathbf{A}_0| \frac{\omega}{c} \cos \left(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 - \frac{\pi}{2} - \delta_1 \right) \\
 E_2(t) &= |\epsilon_2| |\mathbf{A}_0| \frac{\omega}{c} \cos \left(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 - \frac{\pi}{2} - \delta_2 \right) \\
 B_1(t) &= -|\epsilon_2| |\mathbf{A}_0| \frac{\omega}{c} \cos \left(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 - \frac{\pi}{2} - \delta_2 \right) \\
 B_2(t) &= |\epsilon_1| |\mathbf{A}_0| \frac{\omega}{c} \cos \left(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 - \frac{\pi}{2} - \delta_1 \right) .
 \end{aligned} \tag{V.67}$$

Abbildung

Es gibt nun die folgenden Spezialfälle.

- (i) $\delta_1 = \delta_2$ oder $\delta_1 = \delta_2 + \pi$

In diesem Fall spricht man von **linearer** Polarisation. In diesem Fall ist ϵ reell, oder bis auf eine Phase reell:

$$e^{-i\delta_1} \epsilon = \text{reell} \tag{V.68}$$

Abbildung

- (ii) $\delta_1 \neq \delta_2$ und $\delta_1 \neq \delta_2 + \pi$

Allgemein spricht man in diesem Fall von **elliptischer** Polarisation.

Abbildung

Speziell eine Ellipse mit den 1- und 2-Achsen als Hauptachsenrichtungen erhält man für $\delta_2 - \delta_1 = \pm \frac{\pi}{2}$.

Spezialfall der elliptischen Polarisation ist die **zirkuläre** Polarisation:

(iii) $\delta_2 = \delta_1 + \frac{\pi}{2}$ und $|\epsilon_1| = |\epsilon_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Hier ist

$$\epsilon = e^{i\delta_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.69})$$

und man spricht von **rechtszirkularer** Polarisation (oder von Helizität +1).

Abbildung

(iv) $\delta_2 = \delta_1 - \frac{\pi}{2}$ und $|\epsilon_1| = |\epsilon_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Hier ist

$$\epsilon = e^{i\delta_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.70})$$

und man spricht von **linkszirkularer** Polarisation (oder von Helizität -1).

Abbildung

V.3.c Allgemeine Lösung der freien Wellengleichung

Die freie Wellengleichung ist eine lineare Gleichung. Also ist mit ψ_1 und ψ_2 auch jede Linearkombination $c\psi_1 + d\psi_2$ eine Lösung. Die allgemeine Lösung erhält man dann durch Superposition aller möglichen ebenen Wellen obiger Form. Dazu machen wir den Ansatz eines Fourier-Integrals⁴ für die Raum- und Zeitkomponenten mit der **Spektralfunktion** $\tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega)$:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) d^3k d\omega. \quad (\text{V.71})$$

Durch Einsetzen in die freie Wellengleichung (V.46) ergibt sich

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \left[\mathbf{k}^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \right] \tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) d^3k d\omega = 0. \quad (\text{V.72})$$

Nach dem Fourier-Umkehrtheorem gilt also

$$\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (\text{V.73})$$

⁴Dies ist für jede stückweise glatte Funktion $\psi(\mathbf{x}, t)$ möglich, was für unsere Zwecke hinreichend allgemein ist.

d. h.

$$\tilde{\psi} = 0 \quad \text{für } \mathbf{k}^2 \neq \frac{\omega^2}{c^2} \quad (\text{V.74})$$

und

$$\tilde{\psi} \text{ beliebig} \quad \text{für } \mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (\text{V.75})$$

Im 4-dimensionalen (ω, \mathbf{k}) -Raum darf $\tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega)$ also nur auf dem durch

$$\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (\text{V.76})$$

gegebenen 3-dimensionalen Hyperkegel von Null verschieden sein.

Abbildung

Wir können diese Bedingung durch δ -Funktionen ausdrücken. Dazu überlegen wir zunächst, daß die allgemeinste Lösung der Gleichung

$$xf(x) = 0 \quad (\text{V.77})$$

gegeben ist durch

$$f(x) = a \delta(x) \quad (\text{V.78})$$

mit einer beliebigen Konstante a . Die Lösung von

$$(x - x_0)(x + x_0)f(x) = 0 \quad (\text{V.79})$$

ist dann

$$f(x) = a_+ \delta(x - x_0) + a_- \delta(x + x_0) \quad (\text{V.80})$$

mit beliebigen Konstanten a_{\pm} (und man kann zeigen, daß dies die allgemeinste Lösung ist). Fassen wir nun in (V.73) \mathbf{k} als Parameter auf und schreiben $\omega_0 = c|\mathbf{k}|$, so erhalten wir

$$(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)\tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (\text{V.81})$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist dann also

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) = a_+(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_0) + a_-(\mathbf{k}) \delta(\omega + \omega_0). \quad (\text{V.82})$$

Einsetzen in den Ansatz (V.71) ergibt

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} [a_+(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_0) + a_-(\mathbf{k}) \delta(\omega + \omega_0)] d^3k d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int [a_+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_0 t)} + a_-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \omega_0 t)}] d^3k. \end{aligned} \quad (\text{V.83})$$

Die allgemeinste Lösung der freien Wellengleichung hängt also von zwei beliebigen Funktionen ab, die durch die Randbedingungen zu bestimmen sind.

Statt der beiden Funktionen $a_{\pm}(\mathbf{k})$ können wir auch $\psi(\mathbf{x}, t = 0)$ und $\frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t = 0)$ wählen, um die Lösung zu fixieren. Das entspricht der Formulierung des Problems als Cauchysches Anfangswertproblem. Um dies durchzuführen, beobachten wir, daß nach dem Fourierschen Umkehrsatz

$$\begin{aligned} a_+(\mathbf{k}) + a_-(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2\pi} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \psi(\mathbf{x}', 0) \\ -a_+(\mathbf{k}) + a_-(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2\pi i\omega_0} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}', 0). \end{aligned} \quad (\text{V.84})$$

Daher

$$\begin{aligned} a_+(\mathbf{k}) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \left[\psi(\mathbf{x}', 0) - \frac{1}{i\omega_0} \frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}', 0) \right] \\ a_-(\mathbf{k}) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \left[\psi(\mathbf{x}', 0) + \frac{1}{i\omega_0} \frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}', 0) \right]. \end{aligned} \quad (\text{V.85})$$

Setzen wir dies wieder in (V.83) ein, so finden wir

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3x' \left[\int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \right] \psi(\mathbf{x}', 0) \\ &+ \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3x' \left[\int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{i\omega_0} \right] \frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}', 0). \end{aligned} \quad (\text{V.86})$$

Mit der Funktion

$$D(\mathbf{x}, t) := \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t}) \quad (\text{V.87})$$

läßt sich das kürzer schreiben als

$$\psi(\mathbf{x}, t) = - \int d^3x' \left[\frac{\partial D}{\partial t}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \right] \psi(\mathbf{x}', 0) - \int d^3x' D(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}', 0). \quad (\text{V.88})$$

Wir können dies verallgemeinern, wenn wir die Lösung nicht bei $t = 0$ sondern zu einem beliebigen Zeitpunkt $t = t'$ vorgeben. Wir können dann die Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ durch $\frac{\partial}{\partial t'}$ ersetzen, wobei im ersten Term durch die innere Ableitung ein Minuszeichen generiert wird. Damit erhalten wir

$$\psi(\mathbf{x}, t) = - \int d^3x' D(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t'}} \psi(\mathbf{x}', t'), \quad (\text{V.89})$$

worin $\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}$ definiert ist durch

$$f(t) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} g(t) = f(t) \frac{\partial}{\partial t} g(t) - g(t) \frac{\partial}{\partial t} f(t). \quad (\text{V.90})$$

Offenbar ist $D(\mathbf{x}, t)$ Lösung der freien Wellengleichung (da nämlich (V.87) ein Spezialfall von (V.83) ist), d. h.

$$\square D(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (\text{V.91})$$

Weiter ist

$$D(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (\text{V.92})$$

und

$$\frac{\partial D}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \delta^{(3)}(\mathbf{x}), \quad (\text{V.93})$$

womit sich die Richtigkeit von (V.88) für $t = 0$ leicht überprüfen läßt.

Unter Verwendung sphärischer Polarkoordinaten für \mathbf{k} kann man folgenden einfachen Ausdruck für $D(\mathbf{x}, t)$ herleiten (siehe Übungen):

$$D(\mathbf{x}, t) = \frac{-1}{2\pi c} \epsilon(t) \delta(r^2 - c^2 t^2), \quad (\text{V.94})$$

wobei $r = |\mathbf{x}|$ und

$$\epsilon(t) = \begin{cases} -1 & \text{falls } t < 0 \\ 0 & \text{falls } t = 0 \\ +1 & \text{falls } t > 0. \end{cases} \quad (\text{V.95})$$

V.3.d Kugelwellen

Es gibt neben den ebenen Wellen auch andere vollständige Lösungssysteme der freien Wellengleichung, unter denen die **Kugelwellen** besonders wichtig sind.

Wir betrachten die freie Wellengleichung in sphärischen Polarkoordinaten, in denen

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega, \quad (\text{V.96})$$

und nehmen eine kugelsymmetrische Form der Lösung an, d. h. $\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(r, t)$. Damit erhalten wir

$$\square \psi = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (r\psi) = 0, \quad (\text{V.97})$$

so daß

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (r\psi) = 0. \quad (\text{V.98})$$

Die ist gerade die 1-dimensionale Wellengleichung für $(r\psi)$, deren Lösung wir bereits kennen:

$$r\psi = a e^{i(kr - \omega t)}, \quad (\text{V.99})$$

wobei aus der Wellengleichung wieder folgt

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (\text{V.100})$$

Damit erhalten wir die Kugelwellen

$$\psi_\pm(\mathbf{x}, t) = A_\pm \frac{e^{i(kr \pm \omega t)}}{r}. \quad (\text{V.101})$$

Die Amplitude dieser Welle nimmt offenbar mit $\frac{1}{r}$ ab. Für Flächen konstanter Phase, $(kr \pm \omega t) = \text{const.}$ haben wir

$$r = \frac{\text{const.} \mp \omega t}{k} = \text{const.}' \mp \frac{\omega}{k} t. \quad (\text{V.102})$$

Daher beschreibt ψ_+ eine einlaufende, ψ_- eine auslaufende Kugelwelle. Die Phasengeschwindigkeit ist wegen (V.100) offenbar wieder c . Flächen gleicher Phase haben zu einem festen Zeitpunkt t_0 den radialen Abstand

$$k \Delta r = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (\text{V.103})$$

Ganz analog zu den ebenen Wellen finden wir die Wellenlänge und Periode

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (\text{V.104})$$

Auch hier gilt, daß man für die elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} transversale Wellen erhält (siehe Übungen).

Die allgemeine Lösung der freien Wellengleichung kann man dann durch Überlagerung von Kugelwellen konstruieren.

Wie aus der in Kapitel III behandelten Vollständigkeit verschiedener Funktionensysteme hervorgeht, kann man ebene Wellen in Kugelwellen entwickeln und umgekehrt.⁵

Kugelkoordinaten

Für die Behandlung kugelsymmetrischer Probleme, insbesondere für den Umgang mit Kugelwellen, sind sphärische Polarkoordinaten oder Kugelkoordinaten nützlich, an die wir hier noch einmal erinnern.

In Kugelkoordinaten (r, φ, θ) sind die kartesischen Koordinaten (x, y, z)

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{V.107})$$

Wir können dann Basisvektoren in den Richtungen des Fortschreitens der Koordinaten r, φ, θ definieren, indem wir das Linienelement $d\mathbf{x}$ ausdrücken durch

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_r dr + r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi d\varphi + r \mathbf{e}_\theta d\theta, \quad (\text{V.108})$$

was ausgedrückt in kartesischen Basisvektoren bedeutet

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) - \sin \theta \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{V.109})$$

⁵In der quantenmechanischen Streutheorie spielt zum Beispiel die Entwicklung einer ebenen Welle in Kugelwellen eine große Rolle. Zur Illustration sei dieser Zusammenhang hier ohne Zeitabhängigkeit angeführt. Es gilt

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta), \quad (\text{V.105})$$

worin $j_l(x)$ die sphärischen Besselfunktionen sind, die für große Argumente das Verhalten

$$j_l(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) = \frac{1}{2ix} (-i)^l (e^{ix} - (-1)^l e^{-ix}) \quad (\text{V.106})$$

haben, in dem man bereits in dieser Form das Auftreten von Kugelwellen erkennt.

Entsprechend kann man jeden Vektor in Kugelkoordinaten schreiben, indem man seine Entwicklungskoeffizienten in der Entwicklung nach $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta$ in einem dreidimensionalen Vektor zusammenfaßt. Dabei sollte unbedingt die Reihenfolge der Koeffizienten in dieser Anordnung beachtet werden, da es in der Literatur keine eindeutige Konvention gibt. (Wir benutzen hier die gerade genannte Reihenfolge.)

Mittels der Jacobi-Matrix des Koordinatenwechsels von (x, y, z) zu (r, φ, θ) kann man dann (unter Beachtung der Kettenregel) Gradient, Divergenz und Rotation in Kugelkoordinaten ausdrücken. Man findet für den Gradienten

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (\text{V.110})$$

oder als Vektor in der Basis $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta)$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}. \quad (\text{V.111})$$

Bei der Berechnung der Divergenz und Rotation ist zu beachten, daß die Basisvektoren $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta)$ Funktionen von φ und θ sind, so daß die Produktregel anzuwenden ist, z. B. in

$$\nabla \cdot \mathbf{a}(r, \varphi, \theta) = \nabla \cdot [a_r(r, \varphi, \theta) \mathbf{e}_r(\varphi, \theta) + a_\varphi(r, \varphi, \theta) \mathbf{e}_\varphi(\varphi, \theta) + a_\theta(r, \varphi, \theta) \mathbf{e}_\theta(\varphi, \theta)]. \quad (\text{V.112})$$

Dies führt für die Divergenz zu

$$\nabla \cdot \mathbf{a}(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} a_\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) \right], \quad (\text{V.113})$$

und für die Rotation zu

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{a})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[-\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\varphi) \right] \\ (\nabla \times \mathbf{a})_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} a_r \\ (\nabla \times \mathbf{a})_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} a_r. \end{aligned} \quad (\text{V.114})$$

V.4 Lösung der inhomogenen Wellengleichung

Wir betrachten nun die **inhomogene Wellengleichung**

$$\square \psi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \quad (\text{V.115})$$

mit einer gegebenen Funktion $f(\mathbf{x}, t)$. Wir hatten bereits ebene Wellen als vollständiges System von Lösungen der homogenen Wellengleichung identifiziert. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man, indem man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung findet und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (d. h. der freien Wellengleichung) addiert:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_{\text{spez}}(\mathbf{x}, t) + \psi_{\text{homogen}}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{V.116})$$

Physikalisch ist die spezielle Lösung eine Welle, die von der Quelle $f(\mathbf{x}, t)$ ausgeht. Die tatsächliche Lösung wird dann durch die Randbedingungen bestimmt.

Zur Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\square\psi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)$ benutzen wir wieder Greensche Funktionen, d. h. wir suchen eine Lösung von

$$\square G(\mathbf{x}, t) = \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \delta(t). \quad (\text{V.117})$$

Dies entspricht einer Quelle am Ort \mathbf{x} , die nur zur Zeit $t = 0$ vorhanden ist. Zur Lösung dieser Gleichung machen wir einen Ansatz mit einem Fourier-Integral bzgl. der Zeit:

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) d\omega. \quad (\text{V.118})$$

Man bezeichnet in dieser Darstellung $\tilde{G}(\mathbf{x}, \omega)$ als Spektralfunktion.⁶ Setzen wir dies in (V.117) ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} - \Delta \right) \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \delta^{(3)}, \quad (\text{V.119})$$

worin wir auf der rechten Seite $\delta(t)$ mittels (III.96) als Integral geschrieben haben. Hieraus folgt

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta^{(3)}. \quad (\text{V.120})$$

Bis auf die Normierung finden wir also, daß es sich bei \tilde{G} für $\omega = 0$ um die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung handelt, und für $\omega \neq 0$ um die Greensche Funktion der **Helmholtz-Gleichung**. Die Lösung ist (siehe Übungen)

$$\tilde{G}_{\pm}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}r}}{r}. \quad (\text{V.121})$$

Die Rücktransformation von der ω - zur t -Darstellung ergibt sich durch Einsetzen in (V.118):

$$\begin{aligned} G_{\pm}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}r}}{r} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega(t \pm \frac{r}{c})} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) \\ &= \frac{c}{4\pi r} \delta(r \pm ct). \end{aligned} \quad (\text{V.122})$$

Man nennt diese Lösungen **retardierte** bzw. **avancierte Green-Funktion**:

$$D_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (\text{V.123})$$

$$D_{\text{av}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t + \frac{r}{c}\right) \quad (\text{V.124})$$

⁶Im Zusammenhang mit Green-Funktionen bezeichnet man eine Funktion und ihre Spektralfunktion (bzw. Fouriertransformierte) oft mit demselben Symbol, wenn die Unterscheidung durch die Angabe des Arguments (hier t oder ω) klar ist.

Sie erfüllen

$$\square D_{\text{ret,av}}(\mathbf{x}, t) = \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \delta(t). \quad (\text{V.125})$$

Wegen $r = |\mathbf{x}|$ ist $D_{\text{ret}} \neq 0$ nur für $t > 0$, $D_{\text{av}} \neq 0$ nur für $t < 0$. Wir können daher schreiben

$$D_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \theta(t) \quad (\text{V.126})$$

oder

$$D_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{2\pi} \delta(r^2 - c^2 t^2) \theta(t), \quad (\text{V.127})$$

und für $t > 0$ ist

$$D_{\text{ret}} = -c^2 D \quad (\text{V.128})$$

mit D aus (V.94).

Die Tatsache, daß wir verschiedene spezielle Lösungen der inhomogenen Wellengleichung finden, ist nicht verwunderlich. Addiert man nämlich zu einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung eine Lösung der homogenen Gleichung, so erhält man wieder eine Lösung der inhomogenen Gleichung. In der Tat löst die Differenz der beiden obigen Lösungen die homogene Gleichung,

$$\square (D_{\text{ret}} - D_{\text{av}}) = 0. \quad (\text{V.129})$$

Die Formel (V.126) bedeutet, daß nur auf dem **positiven Lichtkegel** L_+ (also auf dem Hyperkegel im 4-dimensionalen (ct, \mathbf{x}) -Raum), gegeben durch

$$r^2 = (ct)^2, \quad (\text{V.130})$$

$D_{\text{ret}} \neq 0$ gilt.

Wir können D_{ret} interpretieren als Kugelwellenpuls, der von $t = 0$, $\mathbf{x} = 0$ ausgeht und mit Lichtgeschwindigkeit c nach außen läuft. Dies entspricht der Vorstellung, daß ein Feld durch eine Ladung erzeugt wird.

Abbildung

D_{av} können wir interpretieren als einen kontrahierenden Kugelwellenpuls, der bei $t = 0$ von der Quelle (besser: Senke) bei $\mathbf{x} = 0$ absorbiert wird.

Abbildung

Mit der Greenschen Funktion erhält man die spezielle Lösung der inhomogenen Wellengleichung (V.115) nach dem bekannten Schema:

$$\begin{aligned}
 \psi_{\text{spez}}(\mathbf{x}, t) &= \int D_{\text{ret}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') f(\mathbf{x}', t') dt' d^3x' \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\delta(t - t' - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f(\mathbf{x}', t') dt' d^3x' \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{x}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'
 \end{aligned} \tag{V.131}$$

oder

$$\boxed{\psi_{\text{spez}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad \text{mit} \quad t'_{\text{ret}} = t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| d^3x'} \tag{V.132}$$

Die tatsächliche Lösung der inhomogenen Wellengleichung erhält man durch Addition der allgemeinen homogenen Lösung und durch Berücksichtigung der Randbedingungen.

Sowohl die retardierte als auch die avancierte Green-Funktion haben physikalische Bedeutung. (Dies ist auch in Einklang mit der Zeitumkehrinvarianz der Gleichungen der Elektrodynamik.) Welche Green-Funktion man im konkreten Fall wählt, hängt von der physikalischen Situation ab, die man beschreiben will und die die Randbedingungen festlegt. Die retardierte Green-Funktion ist die natürliche Wahl, wenn man die von vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilungen erzeugten Felder berechnen will. Die avancierte Green-Funktion ist aber ebenfalls wichtig, z. B. in der Quantenfeldtheorie.

Schließlich wollen wir noch bemerken, daß man D_{ret} und D_{av} auch in kovarianter Weise berechnen kann, indem man die Fourier-Darstellung (oder Spektraldarstellung) nicht nur bzgl. t sondern auch bzgl. \mathbf{x} wählt. Diese Herleitung benutzt Methoden der Funktionentheorie, insbesondere den Cauchyschen Integralsatz, und ist in den meisten Lehrbüchern zu finden.

V.5 Die retardierten Potentiale

Mit Hilfe der retardierten Greenschen Funktion können wir nun sofort die Lösung der Maxwell-Gleichungen bei vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilungen ρ und \mathbf{j} bestimmen. Wir wählen dazu die Lorenz-Eichung und finden für die elektromagnetischen Potentiale

$$\boxed{\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \text{homogene Lösung}} \tag{V.133}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \text{homogene Lösung} \\ \text{mit} \quad t'_{\text{ret}} &= t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \end{aligned}} \tag{V.134}$$

Die für $\varphi(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ relevanten Zeiten und Orte der Ladungs- und Stromverteilungen liegen also auf dem Rückwärtslichtkegel (*nicht darin!*):

Abbildung

Von den Quellen gehen Wirkungen aus, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Nur Ursachen, die auf dem Rückwärtslichtkegel von (\mathbf{x}, t) liegen, tragen zu den elektromagnetischen Potentialen (und damit zu den Feldern) an diesem Raum-Zeit-Punkt bei, den nur deren Wirkungen treffen am Ort \mathbf{x} zur Zeit t ein.

Wir können die elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} aus den Potentialen mittels $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ und $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ berechnen. Dabei treten durch die retardierte Zeitabhängigkeit innere Ableitungen nach dem Ort auf. Zum Beispiel ist (wir betrachten im folgenden nur die spezielle Lösung)

$$\begin{aligned} -\text{grad } \varphi &= - \int \text{grad}_x \frac{\rho(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \\ &= \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \rho(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) d^3 x' + \frac{1}{c} \int \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d^3 x'. \end{aligned} \quad (\text{V.135})$$

Berechnet man noch $-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ und $\text{rot } \mathbf{A}$ (siehe Übungen), so findet man für die von ρ und \mathbf{j} erzeugten elektromagnetischen Felder

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \rho(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) d^3 x' \\ &\quad + \frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) \right] \frac{d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \\ &=: \mathbf{E}_{\text{Coulomb, ret}} + \mathbf{E}_{\text{Str}} \end{aligned} \quad (\text{V.136})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \int \left[\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}}) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \\ &=: \mathbf{B}_{\text{Biot-Savart, ret}} + \mathbf{B}_{\text{Str}} \end{aligned} \quad (\text{V.137})$$

Gegebenenfalls sind noch homogene Lösungen zu addieren.

Der jeweils erste Term in diesen Lösungen, $\mathbf{E}_{\text{Coulomb, ret}}$ bzw. $\mathbf{B}_{\text{Biot-Savart, ret}}$, ist die direkte Verallgemeinerung der Ergebnisse der Elektro- bzw. Magnetostatik, wobei aber ρ bzw. \mathbf{j} mit retardierten Argumenten zu nehmen ist. Die beiden letzten Terme, \mathbf{E}_{Str} und \mathbf{B}_{Str} , treten nur bei zeitabhängigen Ladungs- und Stromverteilungen auf! Ein wichtiger Unterschied besteht in der r -Abhängigkeit dieser Terme bei großen Abständen. Wir sehen, daß

$$|\mathbf{E}_{\text{Coulomb, ret}}|, |\mathbf{B}_{\text{Biot-Savart, ret}}| \sim \frac{1}{r^2} \quad (\text{V.138})$$

aber

$$|\mathbf{E}_{\text{Str}}|, |\mathbf{B}_{\text{Str}}| \sim \frac{1}{r}. \quad (\text{V.139})$$

Daher ist die *Reichweite* das Kriterium für die Unterscheidung zwischen dem **retardierten statischen Feld**, das an die Ladungen und Ströme gebunden bleibt, und dem **Strahlungsfeld**, das von den erzeugenden Ladungen und Strömen ins Unendliche wegfließt. Wir werden sehen, daß nur das Strahlungsfeld zu einem Energiestrom ins Unendliche führt. Bei großer Entfernung ist *nur* noch das Strahlungsfeld bemerkbar.

Es ist instruktiv, an dieser Stelle noch die Größenordnung für den Unterschied zwischen retardiertem statischem Feld und Strahlungsfeld abzuschätzen. ...

... wird noch ergänzt

Kapitel VI

Spezielle Relativitätstheorie

Wie wir sehen werden, ist die Elektrodynamik nicht invariant unter den Galilei-Transformationen der klassischen Mechanik. Die Betrachtung der Symmetrien der Elektrodynamik führt uns vielmehr zu der Erkenntnis, daß Raum und Zeit keine unabhängigen Größen sondern eng miteinander verknüpft sind. Dieser Zusammenhang und seine Folgen ist Gegenstand der speziellen Relativitätstheorie.

Die spezielle Relativitätstheorie macht Aussagen über die Struktur der Raumzeit. Um sie zu studieren, werden wir oft sog. Inertialsysteme betrachten, d. h. Bezugssysteme, die gegeneinander gleichförmig und geradlinig bewegt sind. Die spezielle Relativitätstheorie geht aber weit über die Betrachtung von Inertialsystemen hinaus.

VI.1 Klassische Vorstellung von Raum und Zeit, Galilei-Transformationen

Nach **Isaac Newton** existieren ein 'absoluter Raum' und eine 'absolute Zeit', die universell sind:

Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig, und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand.

Die Absolutheit des Raumes versuchte er unter anderem durch den *Newtonschen Eimer Versuch* zu belegen. Dieser macht die Beobachtung, daß in einem rotierenden, wassergefüllten Eimer die Wasseroberfläche eine Paraboloidform annimmt, während sie bei nicht rotierendem Eimer flach bleibt. Nach Newton ist dies hervorgerufen durch die Bewegung gegenüber dem absoluten Raum.

Immanuel Kant argumentierte sogar noch grundlegender für einen absoluten Raum und eine absolute Zeit. Er sagte, daß Raum und Zeit 'Anschauungsformen a priori' seien. Einziger denkbarer Rahmen für die Naturbeschreibung seien der dreidimensionale euklidische Raum und die absolute Zeit.

Ernst Mach brachte gegen diese Vorstellungen den Einwand vor, daß es sich dabei um Begriffe ohne empirischen Wert handele. Ihm zufolge erfordert etwa die Bezeichnung 'gleichförmig' einen Vergleich. So ist der Eimer Versuch nur ein Vergleich mit einem anderen Bezugssystem (Inertialsystem) und nicht mit dem Raum selber, in diesem Fall z. B. mit einem durch den Fixsternhimmel gegebenen Bezugssystem. Er folgerte, daß die absolute Zeit

ein 'metaphysischer Begriff' sei.¹

Unser modernes Verständnis von Raum und Zeit wurde wesentlich durch **Albert Einstein** (1905) geprägt. Danach sind Raum und Zeit Strukturen, die empirisch erforscht werden müssen. Insbesondere braucht man Meßvorschriften für Raum und Zeit. Diese erfordern physikalische Phänomene. Wir werden im folgenden genauer betrachten, wie dies geschieht. Zunächst wollen wir uns aber noch einmal die klassischen Vorstellungen vergegenwärtigen.

In der klassischen Mechanik postuliert man die Existenz eines sogenannten Inertialsystems, in dem die Newtonschen Axiome gelten. Für einen in diesem System ruhenden Beobachter sind Abstände durch starre Maßstäbe meßbar. Die Zeit wird durch einen periodischen Vorgang, z. B. durch einen Oszillator, gemessen. Es wird weiter angenommen, daß der Raum euklidisch ist. Die Synchronisation von Uhren an verschiedenen Orten ist dann durch starre Maßstäbe möglich. (Durch das Ruckeln an einem solchen starren Maßstab kann ein Signal *instantan* an das andere Ende des Maßstabs übertragen werden.) Problem ist allerdings, daß starre Maßstäbe zwar in der klassischen Mechanik, aber nicht in der Realität existieren. Ein Signal breitet sich nämlich in realen Maßstäben durch Schallwellen aus, die eine *endliche* Geschwindigkeit haben.

Man findet in der klassischen Mechanik: Jeder Beobachter, der zum ersten Beobachter gleichförmig geradlinig bewegt ist, findet dieselben Naturgesetze. Die klassische Mechanik ist daher invariant unter **Galilei-Transformationen**

$$\begin{aligned} t' &= t + \tau \\ x'_i &= -v_i t + R_{ij} x_j + a_i, \end{aligned} \tag{VI.1}$$

worin τ , v_i und a_i Konstanten sind und (R_{ij}) eine orthogonale 3×3 Matrix ist ($RR^T = \mathbf{1}$). Diese Transformationen bilden eine 10-parametrische Gruppe, die **Galilei-Gruppe**. (Dabei sind beliebige Drehungen durch 3 Parameter charakterisiert, etwa durch drei Euler-Winkel.) Die Bewegungsgleichungen, z. B. die Gravitationskraft, sind invariant unter den Galilei-Transformationen.

Die Invarianz unter Galilei-Transformationen drückt aus:

- die Homogenität der Zeit (τ),
- die Homogenität des Raums (a_i),
- die Isotropie des Raums (R_{ij}),
- die Äquivalenz gleichförmig geradlinig zueinander bewegter Beobachter (v_i).

Der letzte Punkt motiviert die besondere Bedeutung von **Inertialsystemen**, also solchen Systemen, die gleichförmig geradlinig zueinander bewegt sind. Die Äquivalenz dieser Systeme formuliert man als (**spezielles**) **Relativitätsprinzip**:

Alle Bezugssysteme, die sich relativ zueinander geradlinig gleichförmig (d. h. mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v}) bewegen, sind äquivalent.

Messungen von Zeit und Ort sind nur *relativ* zu einem Bezugssystem möglich. Gleichzeitig ist ein *absoluter* Begriff, ebenso räumliche Distanzen zweier Punktereignisse, die zur selben Zeit stattfinden.

Beschleunigte Bezugssysteme sind Inertialsystemen *nicht* äquivalent. In ihnen treten **Scheinkräfte** auf.

¹Diese Bezeichnung war von ihm sehr negativ gemeint.

VI.2 Relativität und Elektrodynamik, Einsteins Postulate

Man erkennt leicht, daß die Maxwell-Gleichungen nicht invariant unter Galilei-Transformationen sind. Betrachten wir z. B. ebene Wellen (die Lösungen der freien Maxwell-Gleichungen sind),

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \quad \text{mit} \quad c|\mathbf{k}| = \omega, \quad (\text{VI.2})$$

und wenden darauf die Transformation

$$t' = t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \quad (\text{VI.3})$$

an, so erhalten wir

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}t-\omega t')} = e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'-\omega' t')} \quad (\text{VI.4})$$

mit $\mathbf{k}' = \mathbf{k}, \quad \omega' = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}.$

Es ist aber im allgemeinen $\omega' = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \neq c|\mathbf{k}'|$, und damit ist die transformierte Welle keine Lösung der freien Maxwell-Gleichungen.

Falls sich Maßstäbe und Uhren wie in der klassischen Mechanik verhalten, wären damit die Gesetze der Elektrodynamik verschieden in zueinander bewegten Inertialsystemen.

In dieser Situation gibt es folgende drei Möglichkeiten:

- Die Maxwell-Gleichungen könnten inkorrekt sein. – Das ist unwahrscheinlich, da sie experimentell sehr gut überprüft sind.
- Die Galilei-Invarianz gilt für die klassische Mechanik, aber die Elektrodynamik hat ein bevorzugtes Bezugssystem, in die Maxwell-Gleichungen gelten: das Ruhesystem des **Äthers**. Dies wäre in Analogie zu Schallwellen, die von der Bewegung des Mediums abhängen, so daß die Wellengleichung für Schall nur im Ruhesystem des Mediums gilt. Hier wäre das Medium der Äther. – Die experimentelle Suche nach dem Äther blieb aber erfolglos! So vergleicht man z. B. im Michelson-Morley-Experiment die Lichtgeschwindigkeit parallel und senkrecht zur Erdbewegung, und damit zur Bewegung relativ zum angenommenen Äther. (Die Erde bewegt sich mit ca. 30 km/sec⁻¹ relativ zur Sonne und mit ca. 200 km/sec⁻¹ relativ zum Zentrum der Galaxie.)

Abbildung

In diesem Aufbau beträgt nach klassischen Überlegungen die Laufzeit des Lichts zum Spiegel 1 und zurück

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2-v^2} = \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) \quad (\text{VI.5})$$

und zum Spiegel 2 und zurück

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right) \quad (\text{VI.6})$$

Es ergibt sich also ein Laufzeitunterschied durch die Bewegung

$$t_1 - t_2 = \frac{lv^2}{c^3}, \quad (\text{VI.7})$$

Der Effekt sollte also mit der Größe l des Interferometers zunehmen. Bei Drehung des Apparats um 90 Grad wäre eine Veränderung des Interferenzmusters auf dem Schirm zu erwarten, da sich die Rolle der beiden Arme des Interferometers vertauscht, entsprechend einem betraglich gleichen, aber negativen Laufzeitunterschieds $t_1 - t_2$. Es wurde in entsprechenden Experimenten intensiv nach Effekten des Äthers gesucht, allerdings kein Hinweis auf seine Existenz gefunden.²

- Es gilt ein anderes Relativitätsprinzip für die klassische Mechanik und Elektrodynamik, das nicht auf Galilei-Invarianz beruht. Dies würde erfordern, die Gesetze der Mechanik zu ändern (und entsprechend experimentell zu überprüfen). – Diese Möglichkeit wurde von Albert Einstein ausgearbeitet und hat sich als die richtige erwiesen.

Einstein formuliert in seiner grundlegenden Arbeit³ von 1905 die folgenden zwei Postulate:⁴

1. Relativitätsprinzip:

Die physikalischen Gesetze sind unabhängig von der gleichförmigen Bewegung des Systems als Ganzem.

2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:

Die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem Inertialsystem die gleiche und unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle.

Bevor wir uns mit den Konsequenzen der Postulate befassen, müssen wir noch die **Synchronisation von Uhren** nach Einstein behandeln. Bei diesem Verfahren ruht ein Beobachter bezüglich des Fixsternhimmels. Er kann den Raum durch *ruhende* (reale) Maßstäbe ausmessen. Unter der Annahme, daß der Raum euklidisch ist, ergeben sich dann die kartesischen Koordinaten der Raumpunkte. Weiter seien an verschiedenen Punkten Uhren angebracht, die ruhen. Der Transport von Uhren ist keine geeignete Möglichkeit zur Synchronisation, da sie dabei beschleunigt würden, was Einfluß auf die angezeigte Zeit hätte. Auch eine Synchronisation mit starren Stäben ist nicht möglich, da diese in der Realität nicht existieren. Als geeignete Methode bietet sich stattdessen die Synchronisation mit Lichtsignalen an.

²Auch modifizierte Äthertheorien, die eine 'Mitführung' des Äthers mit der Erddrehung annehmen, sind inzwischen experimentell sicher ausgeschlossen.

³Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik **17** (1905) 891

⁴Im originalen Wortlaut: (Die Lichtgeschwindigkeit ist in der Originalarbeit mit V bezeichnet.)

1. Die Gesetze nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystem diese Zustandsänderungen bezogen werden.

2. Jeder Lichtstrahl bewegt sich im 'ruhenden' Koordinatensystem mit der bestimmten Geschwindigkeit V , unabhängig davon, ob dieser Lichtstrahl von einem ruhenden oder bewegten Körper emittiert ist. Hierbei ist

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Lichtweg}}{\text{Zeitdauer}},$$

wobei 'Zeitdauer' im Sinn der [... vorher gegebenen] Definition aufzufassen ist.

Hierzu betrachten wir zwei Uhren an den Punkten P und Q , die 'P-Zeit' und 'Q-Zeit' anzeigen. Man legt per Definition fest, daß ein Lichtsignal von P nach Q gleich lange braucht wie umgekehrt. Die Lichtgeschwindigkeit auf dem Hinweg $c^{(+)}$ soll also gleich groß sein wie die auf dem Rückweg $c^{(-)}$.⁵ Man sendet dann ein Lichtsignal von P nach Q , wo es reflektiert werde und wieder nach P gelange. Dies geschehe zu den Zeitpunkten t_P , t_Q und t'_P .

Abbildung

Dabei werden t_P und t'_P auf der Uhr bei P gemessen, t_Q auf der Uhr bei Q . Die Uhren sollen dann per Definition synchron sein, wenn

$$t_Q = t_P + \frac{1}{2}(t'_P - t_P). \quad (\text{VI.8})$$

Auf diese Weise ist auch die widerspruchsfreie Synchronisation von mehreren Uhren an verschiedenen Punkten möglich. Die (Zweiwege-)Lichtgeschwindigkeit ist dann

$$c = \frac{2\overline{PQ}}{t'_P - t_P}, \quad (\text{VI.9})$$

was mit der obigen Definition $c^{(+)} = c^{(-)} = \pm c$ entspricht.

VI.3 Spezielle Lorentz-Transformationen

Wir suchen nun die Transformationsgesetze (analog den Galilei-Transformationen der klassischen Mechanik) zwischen zwei gleichförmig geradlinig zueinander bewegten Bezugssystemen, d. h. zwischen zwei Inertialsystemen. Die Transformationsgesetze sollen jetzt mit den obigen Postulaten in Einklang sein.

Dazu betrachten wir zwei Inertialsysteme I und I' . I' sei mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} relativ zu I bewegt. Die Ursprünge von I und I' sollen bei $t = 0$, $t' = 0$ übereinstimmen. Bei $\mathbf{x} = 0$, $t = 0$ sei ein Lichtblitz erzeugt. Seine Wellenfront wird also beschrieben durch

$$\mathbf{x}^2 - c^2 t^2 = 0, \quad t > 0 \quad (\text{VI.10})$$

im ruhenden System I . Das ist gerade der **Vorwärtslichtkegel** L_+ . Aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgt, daß die Lichtwelle in I' dieselbe Form haben muß (entgegen der klassischen Erwartung):

$$\mathbf{x}'^2 - c^2 t'^2 = 0, \quad t' > 0. \quad (\text{VI.11})$$

Dazu ist es notwendig, daß auch die Zeit transformiert wird, d. h. im allgemeinen $t' \neq t$. (Dies impliziert auch, den Begriff der Gleichzeitigkeit aufzugeben, s. u.) Bei der Transformation $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$, $t \rightarrow t'$ muß gelten:

$$\mathbf{x}^2 - c^2 t^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x}'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (\text{VI.12})$$

⁵Die sogenannte Einwege-Lichtgeschwindigkeit kann nur gemessen werden, wenn Uhren an den verschiedenen Punkten auf andere Art synchronisiert sind als durch Lichtsignale. Daher hängt die Einwege-Lichtgeschwindigkeit von der Art der Synchronisation ab und ist als physikalische Observable von zweifelhaftem Wert.

Ein Beispiel für eine solche Transformation ist die **spezielle Lorentz-Transformation**, auch **Lorentz-Boost** genannt.⁶ Wird ein solcher Boost z. B. in x -Richtung durchgeführt mit der Geschwindigkeit v , so ist das Transformationsgesetz

$$\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \\ x' &= \gamma(x - vt) = \gamma(x - \beta ct) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{aligned} \quad (\text{VI.13})$$

worin

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (\text{VI.14})$$

und

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{VI.15})$$

Man kann allgemein zeigen, daß die Transformationen zwischen zwei Inertialsystemen *linear* in x_i und t sein müssen, damit lineare Bewegungen in lineare Bewegungen übergehen.

Führen wir die **Rapidität** η ein mit

$$\tanh \eta = \frac{v}{c} = \beta, \quad (\text{VI.16})$$

d. h.

$$\eta = \text{Artanh} \frac{v}{c} \quad (\text{VI.17})$$

mit

$$\begin{aligned} \sinh \eta &= \gamma \frac{v}{c} \\ \cosh \eta &= \gamma, \end{aligned} \quad (\text{VI.18})$$

so ist

$$\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = \gamma^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} = 1. \quad (\text{VI.19})$$

Dann können wir schreiben

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) = + \cosh \eta ct - \sinh \eta x \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) = - \sinh \eta ct + \cosh \eta x \end{aligned} \quad (\text{VI.20})$$

oder in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta \\ -\sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{VI.21})$$

⁶Solche Transformationen wurden bereits vor der Formulierung der speziellen Relativitätstheorie untersucht, unter anderem von W. Vogt (1887), H. A. Lorentz (1904) und H. Poincaré (1905).

Die spezielle Lorentz-Transformation hat offenbar Ähnlichkeit mit einer Drehung, bzw. ist eine verallgemeinerte Drehung.

Die Beziehung $\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1$ führt zu

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - \mathbf{x}'^2 &= \cosh^2 \eta c^2 t^2 - 2 \cosh \eta \sinh \eta c t x + \sinh^2 \eta x^2 \\ &\quad - \sinh^2 \eta c^2 t^2 + 2 \cosh \eta \sinh \eta c t x - \cosh^2 \eta x^2 - y^2 - z^2 \\ &= (\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta) c^2 t^2 - (\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta) x^2 - y^2 - z^2 \\ &= c^2 t^2 - \mathbf{x}^2. \end{aligned} \quad (\text{VI.22})$$

Wie wir gesehen haben, lassen sich spezielle Lorentz-Transformationen, die den Vorwärtslichtkegel invariant lassen, als verallgemeinerte Drehungen schreiben, bei denen Zeit- und Ortskoordinaten ineinander gedreht werden. Es lohnt sich daher, ct und \mathbf{x} zu einer Größe zusammenzufassen.

VI.4 Relativistische Notation, der Minkowski-Raum

Wir beschreiben jeden **Raum-Zeit-Punkt** (oder **Weltpunkt**) durch einen **Vierervektor** (oder 4-Vektor), indem wir ct und \mathbf{x} zusammenfassen. Wir schreiben

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad (\text{VI.23})$$

und nennen

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.24})$$

einen **kontravarianten** Vierervektor (oder: x^μ die kontravarianten Komponenten des Vierervektors x). Weiter definieren wir den **kovarianten** Vierervektor

$$(x_\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.25})$$

Mit dem **metrischen Tensor**⁷

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.26})$$

ist

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad \text{bzw.} \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu. \quad (\text{VI.27})$$

Auf dem Raum der Vierervektoren definiert man das vierdimensionale oder **invariante Skalarprodukt**

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = x_\mu y^\mu. \quad (\text{VI.28})$$

⁷Dieser wird im Kontext der allgemeinen Relativitätstheorie die 'flache Metrik' genannt.

Den Raum der Vierervektoren (x^μ) mit der **Minkowski-Metrik** $g_{\mu\nu}$ bzw. dem von ihr induzierten Skalarprodukt⁸ nennt man den **Minkowski-Raum**.

Man beachte, daß

$$x \cdot y = c^2 t_x t_y - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad (\text{VI.29})$$

ein *indefinites* Skalarprodukt ist, d. h. $x \cdot y$ kann positiv, negativ oder Null sein.

Die **invariante Länge** eines 4-Vektors (oder sein 4-dim. Abstand oder **invarianter Abstand** vom Ursprung) ist definiert durch

$$x^2 = x \cdot x = x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2. \quad (\text{VI.30})$$

Oft wird auch $\sqrt{x^2}$ als invariante Länge bezeichnet.

Mit dieser Notation wird die Gleichung für die Wellenfront eines Lichtsignals ausgesandt bei $t = 0$ und $\mathbf{x} = 0$

$$x^2 = 0. \quad (\text{VI.31})$$

Vektoren (x^μ) mit $x^2 = 0$ bezeichnet man daher als **lichtartig**. Vektoren mit $x^2 < 0$ nennt man **raumartig**, solche mit $x^2 > 0$ **zeitartig**. Entsprechend können auch die Abstände zwischen zwei Punkten,

$$s^2 = (x - y)^2 = c^2 (t_x - t_y)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 \quad (\text{VI.32})$$

größer, kleiner, oder gleich Null sein.

Es ist üblich, Indizes, die von 0 bis 3 laufen, mit griechischen Buchstaben ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$) zu bezeichnen und solche, die von 1 bis 3 laufen, mit lateinischen Buchstaben (i, j, k, \dots), z. B.

$$x^2 = x^\mu x_\mu = x^0 x_0 - x^i x^i. \quad (\text{VI.33})$$

Wir definieren das 4-dimensionale Kronecker- δ durch

$$\delta^\mu_\nu \quad \text{oder} \quad \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (\text{VI.34})$$

Weiter können wir für einen allgemeinen Tensor Indizes heben und senken mittels $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} C^{\dots\mu\dots} &= g^{\mu\nu} C^{\dots\nu\dots} \\ C_{\dots\mu\dots} &= g_{\mu\nu} C^{\dots\nu\dots} \end{aligned} \quad (\text{VI.35})$$

Man sieht, daß

$$\begin{aligned} g_\mu^\nu &= g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu \\ g^\mu_\nu &= g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu. \end{aligned} \quad (\text{VI.36})$$

Lineare Transformationen von Weltvektoren können wir schreiben als

$$x' = Ax, \quad (\text{VI.37})$$

wobei A eine (reelle) 4×4 Matrix ist. In Komponenten:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= A^\mu_\nu x^\nu \\ x'_\mu &= A_\mu^\nu x_\nu. \end{aligned} \quad (\text{VI.38})$$

⁸In der mathematisch orientierten Literatur wird oft auch eine Metrik und damit ein Skalarprodukt mit umgekehrten Vorzeichen verwendet: $-$ für die Zeitkomponente, $+$ für die räumlichen Komponenten.

Man findet

$$A_{\mu}^{\nu} x_{\nu} = x'_{\mu} = g_{\mu\rho} x'^{\rho} = g_{\mu\rho} A^{\rho}_{\sigma} x^{\sigma} = g_{\mu\rho} A^{\rho}_{\sigma} g^{\sigma\nu} x_{\nu}, \quad (\text{VI.39})$$

woraus man abliest

$$A_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\rho} A^{\rho}_{\sigma} g^{\sigma\nu}, \quad (\text{VI.40})$$

wie auch aus der allgemeinen Regel für das Heben und Senken von Indizes zu erwarten war. Analog gilt

$$A^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\rho} A_{\rho}^{\sigma} g_{\sigma\nu}. \quad (\text{VI.41})$$

VI.5 Geometrie des Minkowski-Raums

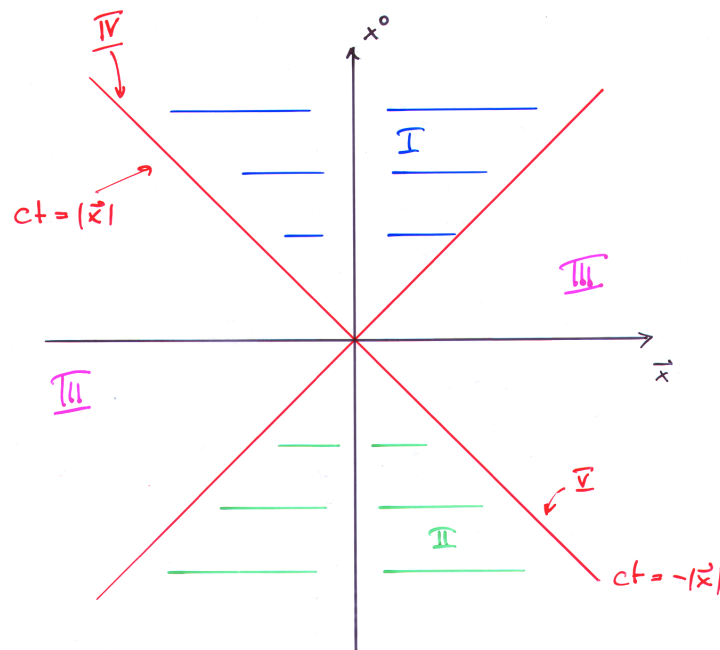
VI.5.a Kausalität und Minkowski-Diagramme

Eine wichtige Folgerung des Prinzips von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist, daß c Grenzgeschwindigkeit für physikalische Prozesse ist. Dies ist sichtbar z. B. daran, daß Energie und Impuls eines Teilchens für $v \rightarrow c$ unendlich groß werden (s. später). Nur masselose Teilchen können die Geschwindigkeit c erreichen, haben aber auch immer diese Geschwindigkeit.

Wir wollen nun zeigen: physikalische Wirkungen können sich nicht mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten. Der Grund dafür ist nicht dynamisch, sondern liegt in der relativistischen Struktur der Raumzeit. Wir veranschaulichen die verschiedenen Bereiche, die den Fällen

$$x^2 = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 \begin{cases} > 0 & \text{zeitartig} \\ < 0 & \text{raumartig} \\ = 0 & \text{lichtartig} \end{cases} \quad (\text{VI.42})$$

entsprechen, in einem Diagramm:



Darin sind die Bereiche I-V gegeben durch

I:	$x^2 > 0, x^0 > 0$	Zukunft
II:	$x^2 > 0, x^0 < 0$	Vergangenheit
III:	$x^2 < 0$	
IV:	$x^2 = 0, x^0 > 0$	Zukunft
V:	$x^2 = 0, x^0 < 0$	Vergangenheit

Wie wir sehen werden, bleiben diese Bereiche jeweils invariant unter eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen.

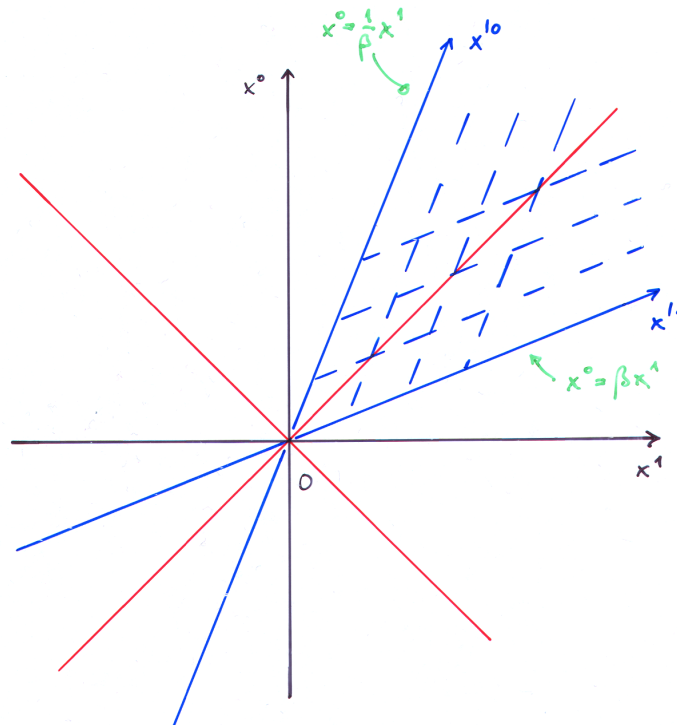
Die zeit- und lichtartigen Bereiche zerfallen jeweils in zwei Teile: die Zukunft und die Vergangenheit. Der raumartige Bereich ist dagegen zusammenhängend. Die räumlichen und die zeitliche Dimensionen unterscheiden sich also!

Bereich IV ist gerade der Vorwärtslichtkegel L_+ , Bereich V der Rückwärtslichtkegel L_- .

Im nicht-relativistischen Grenzfall, d. h. für $c \rightarrow \infty$, würde der Bereich III auf die Hyperebene $t = 0$ schrumpfen. Nur gleichzeitige Weltpunkte wären dann noch raumartig. Für $c < \infty$ gibt es dagegen für *jeden* Weltpunkt aus III ein Inertialsystem, in dem der Punkt mit dem Ursprung gleichzeitig ist. Um dies zu sehen, interpretieren wir die spezielle Lorentz-Transformation geometrisch. An

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \quad (\text{VI.43})$$

erkennen wir: Die x'^0 - und x'^1 -Achsen bilden im x^0, x^1 -Koordinatensystem eine spitzen (stumpfen) Winkel, falls $\beta > 0$ ($\beta < 0$), der durch den Lichtkegel halbiert wird. Denn: die x'^0 -Achse ist durch $x'^1 = 0$ definiert, erfüllt also $x^0 = \frac{1}{\beta} x^1$. Analog ist die x'^1 -Achse durch $x'^0 = 0$ definiert, erfüllt also $x^0 = \beta x^1$. Damit erhalten wir folgendes **Minkowski-Diagramm**, das die Achsen des transformierten Systems im ursprünglichen System darstellt.



Variiert β , $-1 < \beta < 1$, so überstreicht die x'^1 -Achse den gesamten raumartigen Bereich III und gleichzeitig die x'^0 -Achse den zeitartigen Bereich. Man kann daher für jeden Punkt $P \in \text{III}$

ein β finden, so daß P und O auf der x'^1 -Achse liegen und damit dieselbe Zeitkoordinate x'^0 haben. Gleichzeitige Ereignisse im $'$ -System liegen auf Parallelen zur x'^1 -Achse. Analog liegen Ereignisse am selben Ort im $'$ -System auf Parallelen zur x'^0 -Achse.

Damit können nun herleiten:

Alle von einem Punkt ausgehenden *physikalischen* Wirkungen können sich nur innerhalb des Vorwärtslichtkegels oder auf seinem Rand ausbreiten.

Abbildung

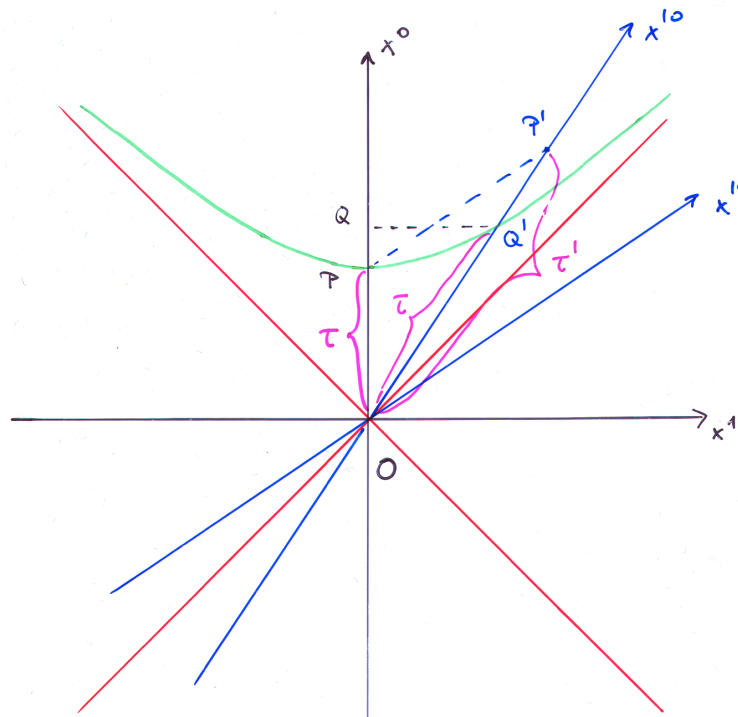
Nehmen wir nämlich an, daß eine von O ausgehende 'punktförmige' Wirkung (oder ein Signal) einen im raumartigen Bereich gelegenen Raum-Zeit-Punkt P erreicht, so finden wir nach obigen Überlegungen folgendes. Es gibt ein Inertialsystem, in dem P eine *negative* Zeitkoordinate hat, während O die Zeitkoordinate $x'^0 = 0$ hat. Damit würde in diesem System I' das Signal bei P eintreffen, *bevor* es bei O losgeschickt ist. Dies wäre eine Verletzung der **makroskopischen Kausalität**, die besagt, daß eine physikalische Wirkung immer zeitlich später oder allenfalls gleichzeitig mit der Ursache auftritt. Daraus folgt, daß die Lichtgeschwindigkeit die obere Grenze für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von physikalischen Wirkungen oder Signalen ist.⁹

Liegen zwei Ereignisse (Raum-Zeit-Punkte) raumartig zueinander, so gibt es Inertialsysteme in denen sie *verschiedener Reihenfolge* ablaufen!

VI.5.b Zeitdilatation

Wir wollen (als Beispiel) ein radioaktives Teilchen betrachten, etwa ein Myon, das zerfällt: $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. Es ruhe im System I und beschreibe die Weltlinie OP. Es zerfalle bei P nach einer Zeit τ .

⁹Formal treten durchaus Überlichtgeschwindigkeiten auf, z.B. in der Phasengeschwindigkeit von Wellen, bei der Bewegung von Schatten in großer Entfernung etc. Dabei können aber keine Signale mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen werden.



Im bewegten System I' hat P die Zeitkoordinate $\tau'(P)'$, die man durch paralleles Verbinden von P zur x'^1 -Achse erhält. Um die Zeit im System I' zu messen, übertragen wir die Zeiteinheit auf dieses System I' . Dazu betrachten wir den invarianten Ausdruck

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = \tau^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2. \quad (\text{VI.44})$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel. Diese Hyperbel überträgt den Zeitmaßstab, denn für $x^1 = 0$ ist gemäß dieser Relation $x^0 = \tau$, und analog ist auch für $x'^1 = 0$ gerade $x'^0 = \tau$.

Man sieht nun geometrisch, daß $\tau' > \tau$. Quantitativ erhalten wir

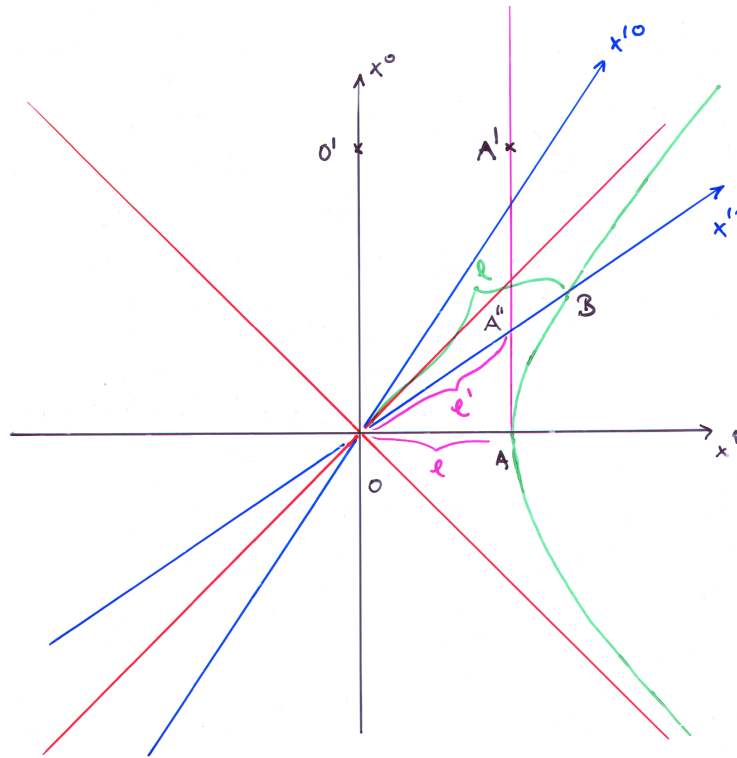
$$\begin{aligned} x^1 = 0, \quad x^0 = \tau, \quad x'^0 = \tau' \\ \implies \tau' = \gamma\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tau. \end{aligned} \quad (\text{VI.45})$$

Die Lebensdauer des bewegten Teilchens ist um den Faktor γ größer! Dies wird als relativistische **Zeitdilatation** bezeichnet.

Umgekehrt findet man: ruht das Myon in I' , so beschreibt es die Weltlinie OQ' . Von I aus gesehen, ist die Zeitkoordinate des Zerfalls die Zeitkoordinate von Q' die von Q , erhalten aus einer Parallelen zur x^1 -Achse von Q' aus. Dieser Punkt entspricht wieder $\tau' > \tau$. Es ist also, in Übereinstimmung mit dem Relativitätsprinzip, kein System vor dem anderen ausgezeichnet.

VI.5.c Längenkontraktion

Ein Maßstab der Länge l ruhe im System I . Seine Endpunkte bewegen sich dann auf den Weltlinien OO' und AA' in folgendem Minkowski-Diagramm.



In I' ist die Länge des Maßstabs der Abstand zweier Weltpunkte auf OO' und AA' , die in I' gleichzeitig sind. Dies sind z. B. O und A'' . Die Länge des Maßstabs in I' ist dann $l' = \overline{OA''}$.

Um diese Längen zu vergleichen, übertragen wir die Länge l von I nach I' . Dazu beobachten wir, daß

$$-l^2 = x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2, \quad (\text{VI.46})$$

was wieder die Gleichung einer Hyperbel darstellt. Daher hat B von O in I' den Abstand $x'^1 = l$. Wir sehen, daß $l' < l$. Quantitativ erhalten wir aus der inversen Lorentz-Transformation

$$x^1 = \gamma(x'^1 + \beta x'^0) \quad (\text{VI.47})$$

mit $x'^0 = 0$, $x'^1 = l'$ und $x^1 = l$

$$l' = \frac{1}{\gamma} l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l. \quad (\text{VI.48})$$

Dies bezeichnet man als relativistische **Längenkontraktion**. Wie wir gerade gesehen haben, beruht sie auf der Relativität der Gleichzeitigkeit.

Man beachte, daß sich die Längenkontraktion auf die in verschiedenen Systemen gemessene Länge bezieht, nicht auf die optische Erscheinung eines bewegten Objekts. Um die optische Erscheinung eines bewegten Objekts zu ermitteln, muß man die endliche Laufzeit des Lichts von verschiedenen Punkten des Objekts zum ruhenden Beobachter einbeziehen. Selbst schnell (nahe der Lichtgeschwindigkeit) bewegte Kugeln erscheinen optisch als Kugeln, jedoch gedreht und mit verzerrter Oberfläche. Allgemeine Objekte erscheinen optisch als verzerrt und gedreht.

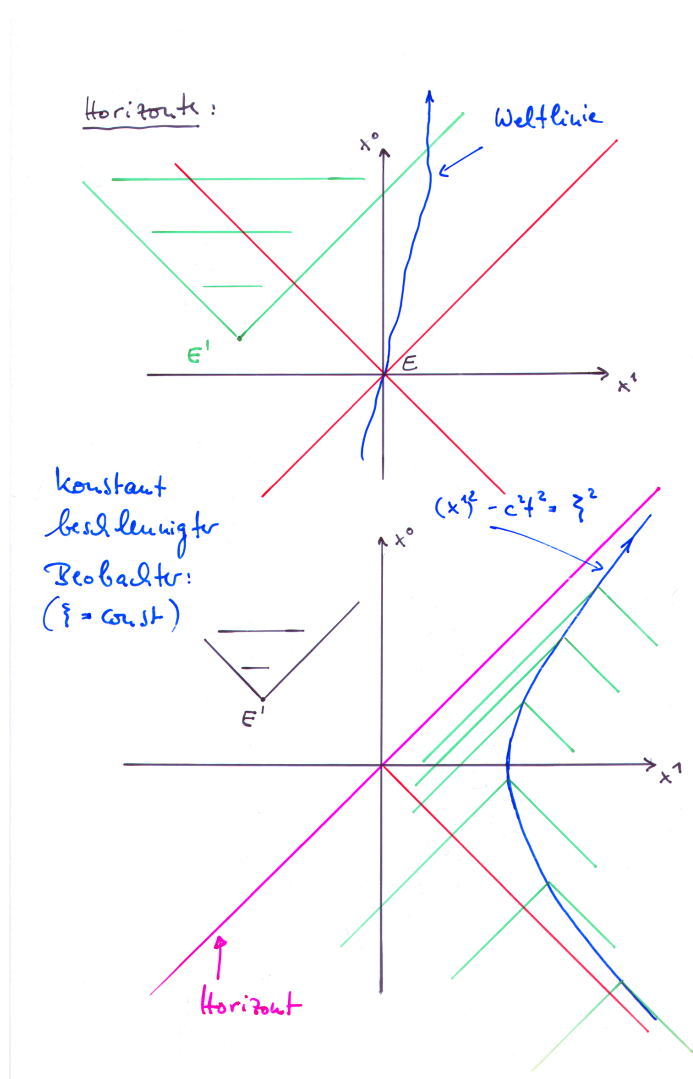
VI.5.d Addition von Geschwindigkeiten

Bei zwei aufeinanderfolgenden speziellen Lorentz-Transformationen sind nicht die Geschwindigkeiten additiv (wie bei Galilei-Transformationen), sondern die Rapiditäten. Durch Anwendung zweier spezieller Lorentz-Transformationen mit Geschwindigkeiten v_1 und v_2 in derselben Richtung erhält man daher das Additionstheorem für Geschwindigkeiten (s. Übungen):

$$v_{\text{ges}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \leq c. \tag{VI.49}$$

VI.5.e Horizonte

Zunächst stellen wir fest, daß man als Beobachter durch Warten auch etwas über raumartig gelegene Ereignisse erfahren kann. Dies trifft ebenfalls zu, wenn sich der Beobachter mit konstanter oder beschränkter Geschwindigkeit $v < c$ bewegt, wie man auch leicht an einem Diagramm erkennt:



Für einen beschleunigten Beobachter \tilde{B} gilt dies nicht notwendig. Betrachten wir z. B. einen konstant beschleunigten Beobachter mit der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{x}^2 - c^2 t^2 = \xi^2 = \text{const.}, \quad (\text{VI.50})$$

dessen Weltlinie eine Hyperbel ist, siehe obiges Diagramm. \tilde{B} kann nur Signale von oder aus dem Inneren seines jeweiligen Rückwärtslichtkegels erhalten. Wie man leicht sieht, wird er ein vom Punkt E' ausgehendes Signal nie erhalten können: Der Vorwärtslichtkegel von E' hat keine Schnittmenge mit irgendeinem der Rückwärtslichtkegel entlang der Weltlinie von \tilde{B} . Es gibt daher für \tilde{B} ein Gebiet, aus dem er nie Informationen erhalten kann. Dessen Grenze bezeichnet man als **Horizont**. Horizonte spielen in der allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle, dort auch in anderen Zusammenhängen, etwa bei schwarzen Löchern.

Man kann sogar zeigen, daß sich zwei beschleunigte Beobachter bei geeigneten Bedingungen beliebig nahe kommen können, ohne sich gegenseitig zu bemerken (s. Übungen).

VI.6 Lorentz- und Poincaré-Transformationen

Wie wir gesehen hatten, folgt aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit für die Transformation von einem Inertialsystem I zu einem anderen I' : wenn $\mathbf{x}^2 - c^2 t^2 = 0$, so ist auch $\mathbf{x}'^2 - c^2 t'^2 = 0$, oder in Vierer-Schreibweise: aus $x^2 = 0$ folgt $x'^2 = 0$. Für Lichtsignale ist also der Viererabstand unabhängig vom Bewegungssystem der Quelle.

Wir wollen nun allgemeiner Transformationen zwischen Inertialsystemen untersuchen, die den Viererabstand invariant lassen, die also $x'^2 = x^2$ erfüllen.

Zunächst kann man zeigen, daß solche Transformationen linear sein müssen, damit geradlinig gleichförmige Bewegungen in geradlinig gleichförmige Bewegungen übergehen – wie auch anschaulich klar ist. Die allgemeine Form der Transformation ist dann

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{bzw.} \quad x' = \Lambda x. \quad (\text{VI.51})$$

Für lineare Transformationen kann man aus $x'^2 = x^2 = 0$ für lichtartige 4-Vektoren folgern, daß für allgemeine 4-Vektoren gilt

$$ex'^2 = \alpha(\Lambda) x^2, \quad (\text{VI.52})$$

und für die Umkehrtransformation erhält man einen analogen Faktor $\alpha(\Lambda^{-1})$. Für diesen gilt wegen $\alpha(\mathbf{1}) = \alpha(\Lambda\Lambda^{-1}) = 1$

$$\alpha(\Lambda) = \frac{1}{\alpha(\Lambda^{-1})}. \quad (\text{VI.53})$$

Wegen der Isotropie des Raumes sollte die Transformation in einer Richtung nicht vor der Transformation in die Gegenrichtung ausgezeichnet sein, woraus folgt

$$\alpha(\Lambda) = 1. \quad (\text{VI.54})$$

Alle Transformationen

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{bzw.} \quad x' = \Lambda x \quad (\text{VI.55})$$

mit

$$x'^2 = x^2 \quad \text{bzw.} \quad x'^{\mu} x'_{\mu} = x^{\mu} x_{\mu} \quad (\text{VI.56})$$

heißen **Lorentz-Transformationen** (oder auch **homogene Lorentz-Transformationen**).

Sie bilden die **Lorentz-Gruppe** $SO(3, 1)$.¹⁰ Die Definition der Lorentz-Transformation als Transformation, die die 4-dimensionale Länge x^2 invariant läßt ist ganz analog z. B. zur Definition der Drehungen im dreidimensionalen Raum, die die Länge von Vektoren invariant lassen. Die Lorentz-Transformationen bilden eine Gruppe bzgl. der Hintereinanderausführung.

Mit der invarianten Länge x^2 von 4-Vektoren x^μ ist jedes Skalarprodukt

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (\text{VI.57})$$

invariant unter Lorentz-Transformationen, denn es kann durch 'Polarisieren' dargestellt werden durch invariante Längen:

$$a \cdot b = \frac{1}{2} [(a+b)^2 - a^2 - b^2]. \quad (\text{VI.58})$$

Die $\Lambda^\mu{}_\nu$ der Lorentz-Transformation (VI.56) erfüllen wegen $x'^2 = x^2$

$$x'^2 = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma = x^2, \quad (\text{VI.59})$$

woraus wir ablesen

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}. \quad (\text{VI.60})$$

Die linke Seite können wir schreiben als $\Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma$, woraus mit $\Lambda^\mu{}_\rho = (\Lambda^T)_{\rho}{}^\mu$ wird

$$\boxed{\Lambda^T g \Lambda = g} \quad (\text{VI.61})$$

Mit $g^2 = \mathbf{1}$ folgt durch Multiplikation mit Λ^{-1} und mit g :

$$\boxed{\Lambda^T = g \Lambda^{-1} g} \quad (\text{VI.62})$$

und

$$(\Lambda^T)^{-1} = g \Lambda g \quad (\text{VI.63})$$

sowie

$$\Lambda^{-1} = g \Lambda^T g. \quad (\text{VI.64})$$

Daher ist

$$\Lambda_\rho{}^\mu := (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho = g^{\mu\nu} \Lambda^\sigma{}_\nu g_{\sigma\rho}, \quad (\text{VI.65})$$

und daher

$$(\Lambda^{-1} \Lambda)_\rho{}^\tau = (\Lambda^{-1})_\rho{}^\mu \Lambda_\mu{}^\tau \quad (\text{VI.66})$$

so daß

$$\boxed{\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\mu{}^\tau = \delta_\rho{}^\tau} \quad (\text{VI.67})$$

was das Analogon von $O^T O = \mathbf{1}$ im Fall der dreidimensionalen orthogonalen Transformationen ist.

Damit erhalten wir aus $x'^\rho = \Lambda^\rho{}_\nu x^\nu$

$$\Lambda_\rho{}^\mu x'^\rho = \Lambda_\rho{}^\mu \Lambda^\rho{}_\nu x^\nu = \delta_\nu{}^\mu x^\nu = x^\mu \quad (\text{VI.68})$$

¹⁰Die Zahlen 3 und 1 stehen für die Signatur der Metrik, d. h. für 3 raumartige Dimensionen (mit $-$ in der Metrik) und für eine zeitartige Dimension (mit $+$ in der Metrik).

so daß in Einklang mit (VI.65)

$$\boxed{x^\mu = \Lambda_\rho{}^\mu x'^\rho} \quad (\text{VI.69})$$

Allgemein bezeichnet man ein 4-Vektorfeld $A(x)$ mit dem Transformationsverhalten

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \quad (\text{VI.70})$$

als **kontravarianten** Vektor (oder als kontravariantes Vektorfeld), wobei

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (\text{VI.71})$$

Ein Vektorfeld mit dem Transformationsverhalten

$$A'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x) \quad (\text{VI.72})$$

bezeichnet man als **kovarianten** Vektor (oder als kovariantes Vektorfeld), wobei

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}. \quad (\text{VI.73})$$

Man sieht hiermit auch explizit, daß das Skalarprodukt zweier Vektorfelder invariant ist:

$$A'^\mu B'_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} B_\rho = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu B_\rho = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} A^\nu B_\rho = \delta_\nu{}^\rho A^\nu B_\rho = A^\nu B_\nu. \quad (\text{VI.74})$$

Es bilden

$$\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad \text{d. h.} \quad (\partial^\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{VI.75})$$

die kontravarianten Komponenten eines 4-Vektors, denn

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu. \quad (\text{VI.76})$$

Analog bilden

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{d. h.} \quad (\partial_\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{VI.77})$$

die kovarianten Komponenten eines 4-Vektors, denn

$$\partial'^\mu = g^{\mu\lambda} \partial'_\lambda = g^{\mu\lambda} \Lambda_\lambda{}^\rho \partial_\rho = g^{\mu\lambda} \Lambda_\lambda{}^\rho g_{\rho\nu} \partial^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu. \quad (\text{VI.78})$$

Es ist dann

$$\partial^\mu \partial_\mu = \square = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \Delta, \quad (\text{VI.79})$$

d. h. der d'Alembert-Operator ist lorentzinvariant.

Ein Skalarfeld transformiert sich mit $\phi'(x') = \phi(x)$. Tensoren 2. Stufe transformieren sich gemäß

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma} \quad (\text{VI.80})$$

$$T'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\nu{}^\sigma T^\rho{}_\sigma \quad \text{etc.} \quad (\text{VI.81})$$

Beispiel für ein Tensorfeld 2. Stufe ist $\partial^\nu A^\mu(x)$, ein Skalarfeld ist z. B. $\partial_\mu A^\mu(x) = \partial^\mu A_\mu(x)$.

Wir definieren

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu\nu\rho\sigma \text{ gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{falls } \mu\nu\rho\sigma \text{ ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{VI.82})$$

Damit erhalten wir das Transformationsverhalten

$$\epsilon'_{\mu\nu\rho\sigma} = (\det \Lambda) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{VI.83})$$

Aus $\Lambda^T g \Lambda = g$ folgt

$$(\det \Lambda^T)(\det g)(\det \Lambda) = \det g, \quad (\text{VI.84})$$

und da $\det g = -1$, $\det \Lambda^T = \det \Lambda$:

$$\boxed{\det \Lambda = \pm 1} \quad (\text{VI.85})$$

Aus $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$ erhalten wir für den Fall $\rho = \sigma = 0$

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = 1 \quad (\text{VI.86})$$

oder explizit

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \underbrace{\sum_k (\Lambda^k{}_0)^2}_{\geq 0} = 1 \quad (\text{VI.87})$$

und damit

$$(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1. \quad (\text{VI.88})$$

Das bedeutet

$$\boxed{\Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \text{oder} \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1} \quad (\text{VI.89})$$

Aufgrund der beiden (voneinander unabhängigen) Bedingungen (VI.85) und (VI.89) unterscheidet man vier Klassen von Lorentz-Transformationen, die nicht stetig miteinander zusammenhängen. Die zugehörigen Matrizen lassen sich also nicht durch kontinuierliche Veränderung von Parametern ineinander überführen.

Lorentz-Transformationen mit $\det \Lambda = +1$ nennt man **eigentliche**, solche mit $\det \Lambda = -1$ nennt man **uneigentliche** Lorentz-Transformationen. Wenn $\Lambda^0{}_0 \geq +1$, spricht man von **orthochronen** Lorentz-Transformationen.

Man bezeichnet die vier Klassen von Transformationen oft mit

$$L_+^\uparrow, \quad L_+^\downarrow, \quad L_-^\uparrow, \quad L_-^\downarrow. \quad (\text{VI.90})$$

Dabei steht $+(-)$ für $\det \Lambda = +1(-1)$, und $\uparrow(\downarrow)$ für $\Lambda^0{}_0 \geq +1(\leq -1)$.

Spezielle Beispiele für die vier Klassen von Lorentz-Transformationen sind:

$$\mathcal{E} = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L_+^\uparrow, \quad (\text{VI.91})$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in L_-^\uparrow, \quad (\text{VI.92})$$

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L_-^\downarrow, \quad (\text{VI.93})$$

$$\mathcal{PT} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in L_+^\downarrow. \quad (\text{VI.94})$$

Diese vier Transformationen bilden selber eine Gruppe, die sogenannte **Kleinsche Gruppe**,

$$\{\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{PT}\}. \quad (\text{VI.95})$$

L_+^\uparrow bildet eine Untergruppe der homogenen Lorentz-Transformationen, die eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe.¹¹ In ihr sind keine Paritätstransformationen (Raumspiegelungen) enthalten. L_+^\uparrow bildet die Gebiete I-V im obigen Minkowski-Diagramm auf sich selber ab, so daß diese invariant unter L_+^\uparrow sind.

Man kann zeigen, daß jede homogene Lorentz-Transformation geschrieben werden kann als

$$\Lambda = \text{sign}(\Lambda^0_0) \Lambda_B(\vec{\eta}) \mathcal{R}(\vec{\varphi}) \mathcal{P}^k \quad (k \in \{0, 1\}), \quad (\text{VI.96})$$

wobei $\Lambda_B(\vec{\eta})$ ein Boost in Richtung $\vec{\eta}$ ist, und \mathcal{R} eine räumliche Drehung,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (\text{VI.97})$$

mit $R \in SO(3)$ (siehe auch Übungen). Man hat daher je 3 **Erzeugende** (infinitesimale Transformationen) für die Drehungen und für die Boosts. So kann man z. B. für einen Boost in x -Richtung schreiben

$$\Lambda^\mu_\nu = [\exp(\eta K_x)]^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.98})$$

¹¹Im Englischen: 'proper orthochronous'.

mit dem infinitesimalen Boost

$$(K_x)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.99})$$

Zusätzlich zu Drehungen, Boosts und Paritätstransformationen muß man (wie bei den Galilei-Transformationen) auch Translationen betrachten. In der Raum-Zeit haben wir jetzt 4 solche Translationen, drei im Raum und eine in der Zeit, also

$$x \longrightarrow x' = x + a \quad (\text{VI.100})$$

mit einem 4-Vektor a , d. h.

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu. \quad (\text{VI.101})$$

Die allgemeinen Transformationen auf dem Minkowski-Raum erhält man durch Kombination der homogenen Lorentz-Transformationen mit den Translationen,

$$x \longrightarrow x' = \Lambda x + a \quad (\text{VI.102})$$

oder

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (\text{VI.103})$$

Diese bilden die **Poincaré-Transformationen** oder **inhomogenen Lorentz-Transformationen**.

Sie bilden eine Gruppe bzgl. der Hintereinanderausführung,

$$(\Lambda_2, a_2) \circ (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2), \quad (\text{VI.104})$$

die 10-parametrische **Poincaré-Gruppe**. Diese ist die fundamentale Symmetriegruppe der Natur.

Kapitel VII

Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Wir wollen nun zeigen, daß die Grundgleichungen der Elektrodynamik so formuliert werden können, daß sie in allen Inertialsystemen *dieselbe Form* haben, d. h. *forminvariant* unter Lorentz-Transformationen sind. Man spricht dann von **Kovarianz**.

VII.1 Viererpotential und Feldstärketensor

Die Lorenz-Eichung war gegeben durch die Relation zwischen den Potentialen

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (\text{VII.1})$$

die wir schreiben können als

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^0} = 0. \quad (\text{VII.2})$$

Das legt die Hypothese nahe, daß das **Viererpotential**

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (\text{VII.3})$$

einen kontravarianten Vierervektor bildet. Wir werden dies auch in Abschnitt VII.3 explizit bestätigt finden.

Mit dem Viererpotential wird die Eichtransformation

$$\begin{aligned} \varphi &\longrightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi \end{aligned} \quad (\text{VII.4})$$

zu

$$\boxed{A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi} \quad (\text{VII.5})$$

Die Lorenz-Eichbedingung ist dann

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0} \quad (\text{VII.6})$$

und dies ist offenbar *invariant* unter Lorentz-Transformationen. Man spricht daher von einer **kovarianten Eichung**.

Mit $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ und $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ folgt für die Feldstärken

$$\begin{aligned} B_1 &= \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 \\ B_2 &= \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \\ B_3 &= \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 \end{aligned} \quad (\text{VII.7})$$

und

$$\begin{aligned} E_1 &= -\partial_1 \varphi - \partial_0 A^1 = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 \\ E_2 &= -\partial_2 \varphi - \partial_0 A^2 = \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 \\ E_3 &= -\partial_3 \varphi - \partial_0 A^3 = \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3. \end{aligned} \quad (\text{VII.8})$$

Wir können das zusammenfassen zu

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (\text{VII.9})$$

mit dem **Feldstärketensor**

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{VII.10})$$

Damit haben wir

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{VII.11})$$

Offenbar ist der Feldstärketensor antisymmetrisch,

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \quad (\text{VII.12})$$

Wichtig ist, daß $F_{\mu\nu}$ eichinvariant ist. Dies sieht man daran, daß darin nur die (eichinvarianten) Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} enthalten sind. Alternativ kann man dies aus der Anwendung einer Eichtransformation (VII.4) auf (VII.9) erhalten.

VII.2 Transformation der elektromagnetischen Felder

Wir beobachten, daß $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ eine *kovariante* Beziehung ist, während $\partial_\mu A^\mu = 0$ *invariant* ist. $\partial_\mu A^\mu = 0$ ist nämlich in allen Inertialsystemen *gleich* (hier gleich 0). Die Komponenten von $F^{\mu\nu}$ ändern sich unter Lorentz-Transformationen, die Form bleibt aber gleich:

$$F'^{\mu\nu} = \partial'^\mu A'^\nu - \partial'^\nu A'^\mu. \quad (\text{VII.13})$$

Betrachten wir das Verhalten der Felder unter einer speziellen Lorentz-Transformation in x -Richtung, so finden wir

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho F^{\rho\sigma} (\Lambda^T)_{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E'_1 & E'_2 & E'_3 \\ -E'_1 & 0 & -B'_3 & B'_2 \\ -E'_2 & B'_3 & 0 & -B'_1 \\ -E'_3 & -B'_2 & B'_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{VII.14})$$

Durch Einsetzen der Matrix (VI.98) für diesen Boost erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta B_3), & E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta B_2), \\ B'_1 &= B_1, & B'_2 &= \gamma(B_2 + \beta E_3), & B'_3 &= \gamma(B_3 - \beta E_2). \end{aligned} \quad (\text{VII.15})$$

Allgemein findet man bei einem Boost mit $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}$ für die Komponenten parallel bzw. senkrecht zu $\boldsymbol{\beta}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} \\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (\text{VII.16})$$

Als Beispiel betrachten wir ein im Ruhesystem rein elektrisches Feld \mathbf{E}_0 . Dann ist im bewegten System

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma \mathbf{E}_{0\perp} \\ \mathbf{B}' &= -\gamma \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{0\perp} = -\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}', \end{aligned} \quad (\text{VII.17})$$

wie bereits früher gesehen. Alternativ kann man auch das Viererpotential transformieren:

$$\begin{aligned} A'^0 &= \gamma(A^0 - \beta A^1) \\ A'^1 &= \gamma(A^1 - \beta A^0) \\ A'^2 &= A^2 \\ A'^3 &= A^3, \end{aligned} \quad (\text{VII.18})$$

so daß für die räumlichen Komponenten (d. h. für \mathbf{A})

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_{\parallel} &= \gamma(\mathbf{A}_{\parallel} - \beta A^0) \\ \mathbf{A}'_{\perp} &= \mathbf{A}_{\perp}. \end{aligned} \quad (\text{VII.19})$$

Ein Anwendungsbeispiel sind die Potentiale A^0 und \mathbf{A} eines (beliebig schnell) bewegten Elektrons. Im Ruhesystem haben wir

$$A^0 = \frac{e}{r}, \quad \mathbf{A} = 0. \quad (\text{VII.20})$$

In einem System, in dem sich das Elektron mit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$ bewegt (das bedeutet $\boldsymbol{\beta} \rightarrow -\boldsymbol{\beta}$ in obiger Formel) ist dann

$$\begin{aligned} A'^0(x') &= \gamma A^0(x) \\ \mathbf{A}'_{\parallel}(x') &= \mathbf{A}'_{\parallel}(x') = \gamma \boldsymbol{\beta} A^0 \end{aligned} \quad (\text{VII.21})$$

mit

$$\begin{aligned}x^1 &= \gamma(x'^1 - \beta x'^0) \\x^2 &= x'^2 \\x^3 &= x'^3.\end{aligned}\tag{VII.22}$$

Man erhält für $ct' = x'^0 = 0$ die Äquipotentialflächen aus

$$A'^0(\mathbf{x}') = \frac{\gamma e}{r}\tag{VII.23}$$

mit

$$r = \sqrt{\gamma^2(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2},\tag{VII.24}$$

so daß

$$A'^0 = \frac{e}{\sqrt{(x'^1)^2 + (1 - \beta^2)[(x'^2)^2 + (x'^3)^2]}}.\tag{VII.25}$$

Die Äquipotentialflächen $A^0 = \text{const.}$ sind daher Ellipsoide, abgeplattet in Richtung der Geschwindigkeit. Das Verhältnis der Achsen ist

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \beta^2}.\tag{VII.26}$$

Abbildung

VII.3 Viererstromdichte und Maxwell-Gleichungen

Wir betrachten zunächst die homogenen Maxwell-Gleichungen. Dazu führen wir den **dualen Feldstärketensor** $\tilde{F}^{\mu\nu}$ ein:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}.\tag{VII.27}$$

Offenbar ist $\tilde{F}^{\mu\nu}$ antisymmetrisch,

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = -\tilde{F}^{\nu\mu}.\tag{VII.28}$$

Die Komponenten von $\tilde{F}^{\mu\nu}$ erhält man durch explizite Rechnung (s. Übungen), z. B.

$$\tilde{F}^{01} = \frac{1}{2}(\epsilon^{0123} F_{23} + \epsilon^{0132} F_{32}).\tag{VII.29}$$

Man findet¹

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{VII.30}$$

¹Als Merkhilfe: dies erhält man aus $(F^{\mu\nu})$ durch $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$.

Wir haben also insbesondere

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{kl} &= \epsilon^{klm} E_m \\ \tilde{F}^{k0} &= B_k.\end{aligned}\tag{VII.31}$$

Wir sehen direkt, daß

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma \\ &= 0,\end{aligned}\tag{VII.32}$$

da in der zweiten Zeile der erste Faktor antisymmetrisch in ρ, σ ist, der zweite dagegen symmetrisch. Die Gleichung

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0\tag{VII.33}$$

ist gleichbedeutend mit den homogenen Maxwell-Gleichungen, wie man leicht überprüft (s. Übungen). Alternativ kann man für die homogenen Maxwell-Gleichungen schreiben

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} = 0\tag{VII.34}$$

was man aus (VII.33) mit (VII.27) erhält, bzw.

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0\tag{VII.35}$$

für alle Kombinationen von μ, ρ, σ .

Für die inhomogenen Maxwell-Gleichungen betrachten wir die 4-Divergenz von $F^{\mu\nu}$. In Lorenz-Eichung ($\partial_\mu A^\mu = 0$) finden wir

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \underbrace{\partial^\nu \partial_\mu A^\mu}_{=0} = \square A^\nu.\tag{VII.36}$$

Die rechte Seite ist per Konstruktion ein 4-Vektor, da $F^{\mu\nu}$ ein Tensor 2. Stufe und $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ ein Skalar unter Lorentz-Transformationen ist. In Komponenten haben wir (vgl. (V.37) und (V.39))

$$\square A^0 = \square \varphi = 4\pi\rho = \frac{4\pi}{c} (c\rho)\tag{VII.37}$$

$$(\square A^k) = \square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},\tag{VII.38}$$

so daß

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}.\tag{VII.39}$$

Wir definieren daher den **Viererstromvektor**

$$(j^\nu) = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix},\tag{VII.40}$$

mit dem wir die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form schreiben können als

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu\tag{VII.41}$$

Dies ist offenbar unabhängig von der Wahl einer Eichung, da hierin die Potentiale nicht mehr enthalten sind.

Unmittelbare Folge der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$ ist (da $\partial_\nu\partial_\mu$ symmetrisch in ν und μ ist)

$$\partial_\nu j^\nu = \frac{c}{4\pi} \partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{VII.42})$$

d. h.

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_0 j^0 + \partial_l j^l = \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (\text{VII.43})$$

Also erhalten wir die Kontinuitätsgleichung in kovarianter Form als

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \quad (\text{VII.44})$$

Allgemein spricht man bei einem Viererstrom, der diese Gleichung erfüllt, von einem **erhaltenen Strom**.

Um die Vierervektor-Eigenschaft von j^ν genauer zu untersuchen, betrachten wir eine Ladungs- und Stromverteilung, für die in einem System I $\mathbf{j} = 0$ gilt, d. h. in diesem System ist

$$j^0(x) = c\rho_{(0)}, \quad j^k(x) = 0. \quad (\text{VII.45})$$

In einem mit Geschwindigkeit \mathbf{v} in 1-Richtung bewegten System I' gilt dann

$$\begin{aligned} \rho' &= \gamma\rho_{(0)} = \frac{\rho_{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ j'^1 &= -\gamma\frac{v}{c}j^0 = -\frac{v\rho_{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -v\rho' \\ j'^2 &= j'^3 = 0. \end{aligned} \quad (\text{VII.46})$$

Die Ladungsdichte ist also in I' um den Faktor γ erhöht. Die gesamte Ladung in einem Volumen V ist aber *unverändert*:

$$Q = \int_V \rho(x) d^3x = \frac{1}{c} \int_V j^0(x) d^3x \quad (\text{VII.47})$$

ist lorentzinvariant, denn das Volumenelement transformiert sich wegen der Lorentz-Kontraktion gemäß

$$d^3x' = \frac{1}{\gamma} d^3x. \quad (\text{VII.48})$$

■ Allgemein gilt: das Raumintegral über die 0-Komponente eines erhaltenen Stromes ist eine Erhaltungsgröße und lorentzinvariant.

Da j^μ ein 4-Vektor und \square ein Skalar unter Lorentz-Transformationen, so folgt aus

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad (\text{VII.49})$$

daß A^ν tatsächlich ein 4-Vektor ist, wie wir anfangs angenommen hatten.

Man beachte, daß die hier in kovarianter Form gefundenen Maxwell-Gleichungen, die Kontinuitätsgleichung und die Lorenz-Eichung in *jedem* Bezugssystem gelten. Sie sind in dieser Form kovariant, haben also in jedem Bezugssystem dieselbe Form.

VII.4 Invarianten des elektromagnetischen Feldes

Die beiden Größen

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (\text{VII.50})$$

und

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{VII.51})$$

sind per Konstruktion Invarianten unter Lorentz-Transformationen (und werden wegen dieser Konstruktion als *invariante Spuren* bezeichnet).

Daraus folgt z. B. (siehe auch Übungen)

- Ist in einem Inertialsystem $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$, so ist es in jedem so. Analoges gilt für $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ und $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$.
- Ist in einem Inertialsystem der Winkel $\angle(\mathbf{E}, \mathbf{B}) > \pi/2$, so ist es in allen der Fall. Analoges gilt für $\angle(\mathbf{E}, \mathbf{B}) < \pi/2$ und $\angle(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \pi/2$.
- Ist in einem Inertialsystem $\mathbf{B} = 0$ (oder $\mathbf{E} = 0$), so ist in allen Inertialsystemen $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Eine Umkehrung dieses Satzes gilt nur, falls $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$: Ist $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, so läßt sich für $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$ ein Inertialsystem finden, im dem $\begin{cases} \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{B} = 0 \end{cases}$ ist.

VII.5 Transformation ebener elektromagnetischer Wellen und Doppler-Effekt

Wir betrachten eine ebene elektromagnetische Welle mit elektrischem Feld

$$\mathbf{E} = \varepsilon e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad \text{mit } \mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (\text{VII.52})$$

Die Phase

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t \quad (\text{VII.53})$$

der Welle ist ein Skalar und invariant unter Lorentz-Transformationen. Wir schreiben

$$(k^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}, \quad (\text{VII.54})$$

so daß

$$\mathbf{E} = \varepsilon e^{-ik_\mu x^\mu} = \varepsilon e^{-ik \cdot x}. \quad (\text{VII.55})$$

Wegen

$$k^\mu = \partial^\mu(k \cdot x) = \partial^\mu(k^\nu x_\nu) \quad (\text{VII.56})$$

ist k^μ ein 4-Vektor. Die Relation $\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ wird zu

$$k^2 = k^\mu k_\mu = 0 \quad (\text{VII.57})$$

und es ist

$$\partial_\mu e^{-ik \cdot x} = -ik_\mu e^{-ik \cdot x}. \quad (\text{VII.58})$$

Das Produkt $k \cdot x$ ist invariant unter Lorentz-Transformationen, die Frequenz ω und der Wellenzahlvektor \mathbf{k} ändern sich aber unter solchen Transformationen gemäß $k'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} k^{\nu}$. Für einen Boost in x -Richtung mit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$ ist z. B.

$$k'^0 = \gamma(k^0 - \beta \cdot \mathbf{k}), \quad k'^1 = \gamma(k^1 - \beta k^0), \quad k'^2 = k^2, \quad k'^3 = k^3, \quad (\text{VII.59})$$

und wegen $k'^2 = k^2 = 0$ ist

$$k^0 = |\mathbf{k}|, \quad k'^0 = |\mathbf{k}'|. \quad (\text{VII.60})$$

Daher ist mit $\theta = \angle(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{k}) = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{k})$

$$k'^0 = \gamma(1 - \beta \cos \theta) k^0 \quad (\text{VII.61})$$

oder

$$\boxed{\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta)} \quad (\text{VII.62})$$

Diese Frequenzverschiebung bezeichnet man als den **Doppler-Effekt**.

Wir wollen zwei Spezialfälle des Doppler-Effekts betrachten, in denen die Transformation in Richtung des Wellenvektors bzw. transversal dazu ist.

- Für $\theta = 0, \pi$ finden wir den **longitudinalen** Doppler-Effekt:

$$\omega' = \gamma \omega (1 \mp \beta) = \begin{cases} \omega \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \\ \omega \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \end{cases} \quad (\text{VII.63})$$

Für kleine $\beta = v/c \ll 1$ können wir dies entwickeln und finden

$$\omega' \simeq \omega (1 \mp \beta) \quad (\text{VII.64})$$

wie bei der Galilei-Transformation.

- Für $\theta = \frac{\pi}{2}$ finden wir den **transversalen** Doppler-Effekt:

$$\omega' = \gamma \omega \quad (\text{VII.65})$$

woraus wir für kleine $\beta = v/c \ll 1$ erhalten

$$\omega' \simeq \omega \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right). \quad (\text{VII.66})$$

Der transversale Doppler-Effekt ist (auch bei kleinen Geschwindigkeiten) ein relativistischer Effekt, der keine Analogie in der nicht-relativistischen Physik hat. Dieser Effekt ist bei kleinen Geschwindigkeiten sehr klein, wie wir an der quadratischen Abhängigkeit von β sehen. Er wurde aber experimentell beobachtet.

Wenden wir uns wieder dem allgemeinen Fall zu und wählen das Koordinatensystem so, daß der Wellenzahlvektor in der x^1 - x^2 -Ebene liegt. Dann haben wir für die beiden Winkel $\theta = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{k})$, $\theta' = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{k}')$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{k_2}{|\mathbf{k}|} = \frac{ck_2}{\omega} \\ \sin \theta' &= \frac{k'_2}{|\mathbf{k}'|} = \frac{ck_2}{\omega'} \end{aligned} \quad (\text{VII.67})$$

und damit

$$\sin \theta' = \frac{\omega}{\omega'} \sin \theta \quad (\text{VII.68})$$

bzw. mittels der Formel (VII.62) für den Doppler-Effekt

$$\boxed{\sin \theta' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \sin \theta} \quad (\text{VII.69})$$

Diesen Effekt der Bewegung auf die Richtung der Welle bezeichnet man als **Aberration**.

Abbildung

Für $\theta = \pi/2$ und $\beta \ll 1$ finden wir

$$\begin{aligned} \sin \theta' &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta' \right) \simeq \sqrt{1 - \beta^2} \\ \implies \frac{\pi}{2} - \theta' &\simeq \frac{v}{c}. \end{aligned} \quad (\text{VII.70})$$

Dieser Effekt ist aus der Astronomie bekannt, wo die Aberration des Sternenlichts eine Rolle spielt. Ist das Fernglas während des Lichteinfalls bewegt, muß es schräg gehalten werden.

Abbildung

Für den entsprechenden *Vorhaltewinkel* α gilt

$$\tan \alpha \simeq \frac{v}{c}, \quad (\text{VII.71})$$

und man findet experimentell typischerweise $\alpha_{\text{exp}} \simeq 10^{-4}$, was $v = 30\text{km/s}$ und damit der Geschwindigkeit der Erde auf der Bahn um die Sonne entspricht.

Für $\beta \leq 1$ ergibt die Formel (VII.69) den folgenden Zusammenhang zwischen θ und θ' :

Abbildung

Es wird also ein kleiner Winkelbereich im System I auf einen großen Winkelbereich im System I' abgebildet.

Abbildung

Emittiert also ein in I' ruhendes System elektromagnetische Wellen isotrop, so erscheint in I diese Strahlung fast vollständig in Vorwärtsrichtung. Für die Intensitätsverteilung eines Hertzschen Dipols bei hoher Geschwindigkeit findet man z. B. folgendes Bild:

Abbildung

Kapitel VIII

Relativistische Mechanik

Wir wollen nun sehen, wie die klassische Mechanik durch die relativistische Struktur der Raumzeit zur relativistischen Mechanik modifiziert werden muß. Natürlich erwarten wir, daß sich bei kleinen Geschwindigkeiten die klassische Mechanik als Grenzfall der relativistischen Mechanik ergibt.

VIII.1 Eigenzeit und Vierergeschwindigkeit

Die Weltlinie eines Teilchens der Masse m wird durch eine Kurve im Minkowski-Raum beschrieben, die man parametrisieren kann:

$$x^\mu = x^\mu(\lambda) \quad \text{bzw.} \quad x = x(\lambda). \quad (\text{VIII.1})$$

Besonders nützlich ist es, den Parameter so zu wählen, daß er invariant unter Lorentz-Transformationen ist.

Abbildung

Im System I hat das Teilchen die momentane Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$, ändert also seinen Ort um $d\mathbf{x} = \mathbf{v}(t) dt$. Damit ist das infinitesimale invariante Linienelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - |d\mathbf{x}|^2 = c^2 dt^2(1 - \beta^2). \quad (\text{VIII.2})$$

Im sogenannten momentan begleitenden Inertialsystem I', in dem das Teilchen momentan in Ruhe ist, gilt

$$\begin{aligned} dt' &=: d\tau, & d\mathbf{x}' &= 0 \\ \implies ds &= c d\tau, \end{aligned} \quad (\text{VIII.3})$$

und $d\tau$ ist daher Lorentz-invariant (da ds invariant ist) mit

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2(t)} = \frac{dt}{\gamma(t)} < dt, \quad (\text{VIII.4})$$

und

$$\tau = \int_A^B d\tau = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \beta^2(t)} \quad (\text{VIII.5})$$

mit zwei Punkten A und B auf der Weltlinie des Teilchens. τ heißt **Eigenzeit** und kann als die Zeit interpretiert werden, die im System des Teilchens vergeht. Die Benutzung der Eigenzeit τ als Weltlinienparameter stellt sich als besonders nützlich heraus. (In der Mathematik nennt man die Wahl dieses Parameters die *Parametrisierung nach der Bogenlänge*.) Die im System I vergehende Zeit ist

$$t_2 - t_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma(\tau) d\tau. \quad (\text{VIII.6})$$

Man definiert die **Vierergeschwindigkeit**

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (\text{VIII.7})$$

so daß

$$u^2 = u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - \mathbf{v}^2) = c^2 \quad (\text{VIII.8})$$

zeitartig ist.¹ Weiter definiert man die **Viererbeschleunigung**

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{du^\mu}{dt}. \quad (\text{VIII.9})$$

Durch Differenzieren von $u^2 = c^2$ nach τ erhalten wir

$$u^\mu a_\mu = 0. \quad (\text{VIII.10})$$

Die Vierergeschwindigkeit und die Viererbeschleunigung stehen also immer senkrecht aufeinander. (Beide sind Vektoren im 4-dimensionalen Minkowski-Raum.)

VIII.2 Energie-Impuls-Beziehung, Bewegungsgleichung

Wir erinnern uns an die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), \quad (\text{VIII.11})$$

die wir ausdrücken können als

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{f} d^3x \quad (\text{VIII.12})$$

mit der Kraftdichte

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (\text{VIII.13})$$

Die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit ist

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt, \quad (\text{VIII.14})$$

¹Man beachte, daß $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ ohne den Faktor γ nicht Teil eines Vierervektors sein kann, da t kein Skalar unter Lorentz-Transformationen ist.

da wegen $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ das magnetische Feld keine Arbeit leistet (siehe auch Übungen). Für eine Ladungs- und Stromverteilung im Volumen V haben wir daher

$$dW = \left(\int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3x \right) dt \quad (\text{VIII.15})$$

und daher die Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3x. \quad (\text{VIII.16})$$

Betrachte nun die Größe

$$f^\mu := \frac{1}{c} j_\nu F^{\mu\nu}, \quad (\text{VIII.17})$$

die per Konstruktion ein 4-Vektor ist. Explizit ist für die räumlichen Komponenten

$$f^1 = \rho E_1 + \frac{1}{c} (j_2 B_3 - j_3 B_2) \quad (\text{VIII.18})$$

usw., also gerade die Lorentzkraftdichte. Für $\mu = 0$ ist aber

$$f^0 = \frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{VIII.19})$$

gerade die Leistungsdichte. f^μ faßt also die Kraft- und die Leistungsdichte zu einem 4-Vektor zusammen,

$$(f^\mu) = \begin{pmatrix} f^0 \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}. \quad (\text{VIII.20})$$

Wir betrachten jetzt die Integrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} dt d^3x = \frac{1}{c} \int_{t=t_1}^{t=t_2} \mathbf{f} d^4x \quad (\text{VIII.21})$$

und

$$\frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dW}{dt} dt = \frac{1}{c} \int_{t=t_1}^{t=t_2} f^0 d^4x, \quad (\text{VIII.22})$$

worin das Volumenelement der 4-dimensionalen Raum-Zeit

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt d^3x \quad (\text{VIII.23})$$

ist und wir nur die Grenzen der Zeit- bzw. x^0 -Integration angeben, während die d^3x -Integration über den ganzen Raum ausgeführt wird. Die Integraloperation

$$\int \dots d^4x \quad (\text{VIII.24})$$

ist invariant unter Lorentztransformationen Λ , denn

$$d^4x' = (\det \Lambda) d^4x = \begin{cases} +d^4x & \text{f. eigentliche L.-Transf.} \\ -d^4x & \text{f. uneigentliche L.-Transf.} \end{cases} \quad (\text{VIII.25})$$

Für uneigentliche Lorentz-Transformationen sind aber gleichzeitig noch die Integralgrenzen zu vertauschen, so daß sich insgesamt auch für diese die Invarianz ergibt.

Wir wenden nun obige Integrale für die Kraft auf ein Teilchen an. Dabei beachten wir das 2. Newtonsche Axiom

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (\text{VIII.26})$$

sowie die Gleichheit der vom Feld geleisteten Arbeit und der Zunahme der Teilchenenergie

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}. \quad (\text{VIII.27})$$

Damit erhalten wir

$$\left(\frac{1}{c} \int_1^2 f^\mu d^4x \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}(E_2 - E_1) \\ \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{VIII.28})$$

Die linke Seite ist als 4-dimensionales Integral über einen 4-Vektor wieder ein 4-Vektor. Daher muß auch die rechte Seite ein 4-Vektor sein. Dies ist erfüllt, wenn der **Energie-Impuls-Vektor** oder **Viererimpuls**

$$(p^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}E \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.29})$$

ein 4-Vektor ist.²

Wir finden dann, daß

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = \lambda \quad (\text{VIII.30})$$

eine Lorentz-Invariante ist. Im Ruhesystem des Teilchens ($\mathbf{p} = 0$) haben wir

$$\sqrt{\lambda} = \frac{E_0}{c}, \quad (\text{VIII.31})$$

worin E_0 die **Ruheenergie** des Teilchens ist. Die Energie eines bewegten Teilchens ist

$$E = \sqrt{E_0^2 + c^2 \mathbf{p}^2}, \quad (\text{VIII.32})$$

woraus wir für kleine Impulse \mathbf{p} erhalten

$$E = E_0 \sqrt{1 + \frac{c^2 \mathbf{p}^2}{E_0^2}} \simeq E_0 + \frac{c^2 \mathbf{p}^2}{2E_0}. \quad (\text{VIII.33})$$

Wir vergleichen dies mit der kinetischen Energie der Newtonschen Mechanik

$$T = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (\text{VIII.34})$$

die bei kleinen Impulsen eine korrekte Beschreibung der Teilchenenergie liefert. Übereinstimmung mit dem zweiten Term in (VIII.33) erfordert

$$\boxed{E_0 = mc^2} \quad (\text{VIII.35})$$

²Strenggenommen ist hier nur erforderlich, daß die *Differenzen* von Energien und Impulsen zusammen einen 4-Vektor bilden. Es ist aber sinnvoll und konsistent, dies auch für den Vektor in (VIII.29) anzunehmen.

für die Ruheenergie des Teilchens. Man bezeichnet m daher auch als **Ruhemasse**. Jeder Masse wird durch diese Beziehung eine Energie zugeordnet. In der klassischen Mechanik alleine ist die Teilchenzahl erhalten, so daß die Ruheenergien für physikalische Prozesse keine Rolle spielen und in der Wahl des Nullpunkts der Energie absorbiert werden können. In der relativistischen Mechanik ist die Ruheenergie dagegen von großer Bedeutung.

Wegen (VIII.30) und (VIII.31) haben wir also³

$$p^2 = p_\mu p^\mu = (mc)^2 \quad (\text{VIII.37})$$

und

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2}. \quad (\text{VIII.38})$$

Weil p^2 eine Invariante ist, bezeichnet man m aufgrund von (VIII.37) auch oft als **invariante Masse**.

Für masselose Teilchen (z.B. für Photonen) oder für Teilchen im ultrarelativistischen Grenzfall $|\mathbf{p}| \gg mc$ ist

$$E = c |\mathbf{p}|. \quad (\text{VIII.39})$$

Tragen wir Energie und Impuls in einem 4-dimensionalen $(E/c, \mathbf{p})$ -Raum auf, so bestimmt

$$E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 = m^2 c^4 \quad (\text{VIII.40})$$

ein Hyperboloid (bzw. eine Schale davon), die sogenannte **Massenschale**.

Abbildung

Die Abhängigkeit von E und \mathbf{p} von der Geschwindigkeit erhält man durch Anwendung eines Lorentz-Boost auf den 4-Vektor im Ruhesystem,

$$\begin{pmatrix} p_{(0)}^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{VIII.41})$$

als

$$E = c \gamma p_{(0)}^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{VIII.42})$$

d. h.

$$E = \gamma mc^2 \quad (\text{VIII.43})$$

und

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{VIII.44})$$

³In der Teilchenphysik benutzt man oft sogenannte *natürliche Einheiten*, in denen man $c = 1$ setzt, so daß diese Gleichungen die besonders einfache Form

$$\begin{aligned} p^2 &= m^2 \\ E &= \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.36})$$

erhalten.

d. h.

$$\boxed{\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}} \quad (\text{VIII.45})$$

oder

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v} \quad (\text{VIII.46})$$

oder

$$\mathbf{v} = c^2 \frac{\mathbf{p}}{E}. \quad (\text{VIII.47})$$

Damit kann der Viererimpuls durch die Vierergeschwindigkeit ausgedrückt werden als

$$(p^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma m c \\ \gamma m \mathbf{v} \end{pmatrix} = m(u^\mu). \quad (\text{VIII.48})$$

Man bezeichnete früher γm oft als 'geschwindigkeitsabhängige Masse'. Diese Bezeichnung hat sich in vielen Zusammenhängen als sehr irreführend erwiesen und wird nicht mehr benutzt. Man spricht nur noch von der Ruhemasse (oder invarianten Masse) m .

Aus (VIII.47) erhalten wir

$$|\mathbf{v}| = c \frac{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}{E} < c \quad \text{falls } m > 0, \quad (\text{VIII.49})$$

so daß

$$\lim_{E \rightarrow \infty} |\mathbf{v}| = c. \quad (\text{VIII.50})$$

Während in der klassischen Mechanik die Geschwindigkeit beliebig groß werden kann, ist in der speziellen Relativitätstheorie die Geschwindigkeit eines Teilchens durch die Lichtgeschwindigkeit begrenzt. Ein masseloses Teilchen bewegt sich dagegen immer mit Lichtgeschwindigkeit.

Wie welthistorische Bedeutung der speziellen Relativitätstheorie beruht nicht so sehr auf der Formel $E_0 = mc^2$, wie oft behauptet wird. Entscheidend ist vielmehr daß – anders als in der klassischen Mechanik – die kinetische Energie und die Masse nicht mehr separate Erhaltungsgrößen sind. Erst dadurch wird erklärbar, daß ein Teilchen in Ruhe zerfallen kann und dabei seine Ruheenergie (zum Teil oder ganz) in kinetische Energie der Zerfallsprodukte umgewandelt werden kann. Dadurch werden verschiedenste Kernreaktionen möglich, und sogar die komplette Umwandlung von Ruheenergie in reine Strahlungsenergie zum Beispiel in der Vernichtung eines Elektrons und eines Positrons in zwei Photonen, $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$.

Die Bewegungsgleichung des Teilchens erhalten wir aus der Zeitableitung der Integrale (VIII.28) nach der oberen zeitlichen Integralgrenze t_2 als

$$\boxed{\int f^\mu d^3x = \frac{d}{dt} p^\mu} \quad (\text{VIII.51})$$

Für die räumlichen Komponenten ergibt dies gerade die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) d^3x = \frac{d}{dt} (\gamma m \mathbf{v}). \quad (\text{VIII.52})$$

Eine ganz analoge Gleichung gilt natürlich auch für andere Kräfte, die auf das Teilchen wirken.

Für die kovariante Formulierung sollte die Kraft Teil eines 4-Vektors sein, was $\int f^\mu d^3x$ offenbar nicht ist. Wir definieren daher die **Viererkräft** oder **Minkowski-Kraft**

$$F^\mu := \gamma \int f^\mu d^3x, \quad (\text{VIII.53})$$

was für die Lorentz-Kraft bedeutet

$$F^\mu = \gamma \int j_\nu F^{\mu\nu} d^3x. \quad (\text{VIII.54})$$

Für ein Punktteilchen der Ladung q ist also

$$F^\mu = \frac{q}{c} u_\nu F^{\mu\nu}, \quad (\text{VIII.55})$$

was für die räumlichen Komponenten gerade ergibt

$$F^k = \left[\gamma q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \right]^k. \quad (\text{VIII.56})$$

Aus $p^\mu = mu^\mu$ folgt

$$\begin{aligned} \gamma \frac{dp^\mu}{dt} &= \frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{du^\mu}{d\tau} = ma^\mu \\ &= \gamma \int f^\mu d^3x. \end{aligned} \quad (\text{VIII.57})$$

Für ein Punktteilchen ist dies gleich $(q/c)u_\nu F^{\mu\nu} = F^\mu$, so daß in diesem Fall

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} p^\mu = m \frac{d}{d\tau} u^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu} \quad (\text{VIII.58})$$

und wegen $u_\mu a^\mu = 0$ folgt

$$u_\mu F^\mu = m u_\mu a^\mu = 0. \quad (\text{VIII.59})$$

VIII.3 Lagrange- und Hamiltonfunktion

VIII.3.a Freies Teilchen

Im Lagrange-Formalismus betrachtet man die **Wirkung**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (\text{VIII.60})$$

mit der Lagrangefunktion L , die nur von den Koordinaten, ihren zeitlichen Ableitungen und der Zeit abhängt, $L = L(q, \dot{q}, t)$. Die Bewegungsgleichung erhält man aus dem Verschwinden der Variation der Wirkung bei festgehaltenen Endpunkten,

$$\delta S = 0 \quad \text{mit} \quad \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (\text{VIII.61})$$

Dies ist äquivalent zur Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (\text{VIII.62})$$

mit dem **kanonischen Impuls**

$$P_i = p_{\text{kan } i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (\text{VIII.63})$$

Diese Formulierung ist offenbar nicht manifest invariant unter Lorentztransformationen, wie es für die relativistische Beschreibung wünschenswert wäre. In der relativistischen Mechanik sollte die physikalisch konsistente Beschreibung zu einer Poincaré-invarianten Bewegungsgleichung führen, da sonst die Weltlinie des Teilchens vom Beobachter abhängig wäre. Die Wirkung sollte daher insbesondere ein Skalar unter Lorentz-Transformationen sein.⁴

Wir betrachten zunächst ein freies Teilchen. Nach obigen Überlegungen sollte die Wirkung also für jede gegebene Weltlinie \mathcal{P} für alle Beobachter den gleichen Wert haben.

Abbildung

Dazu bietet es sich an, die Wirkung durch die Eigenzeit auszudrücken mit dem Ansatz

$$S[(x(\tau))] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, u) d\tau \quad (\text{VIII.64})$$

mit den (Raum-Zeit-) 4-Vektor (x^μ) und der 4-Geschwindigkeit (u^μ) . Man kann aus der Poincaré-Invarianz folgern, daß hierbei die Funktion $f(x, u)$ eine Konstante sein muß⁵, so daß

$$S[(x(\tau))] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \text{const.} d\tau. \quad (\text{VIII.65})$$

Damit S die Dimension einer Wirkung hat, muß dann gelten

$$[\text{const.}] = \frac{[\text{Wirkung}]}{[\text{Zeit}]}. \quad (\text{VIII.66})$$

Für ein Teilchen der Masse m ist die einzige Möglichkeit, eine Konstante dieser Dimension zu konstruieren, der Ausdruck mc^2 . Damit haben wir

$$S = -mc^2 \int_{\mathcal{P}} d\tau = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = -mc \int_{\mathcal{P}} ds \quad (\text{VIII.67})$$

worin wir in der letzten Gleichung das infinitesimale Linienelement aus (VIII.3) benutzt haben. Das Minuszeichen ist gewählt, damit das gesuchte Extremum der Wirkung ein Minimum ist.

Es ist eine interessante Beobachtung, daß das letzte Integral in (VIII.67) gerade die 4-dimensionale Länge der Weltlinie ist.⁶ Das Minimum der Wirkung wird damit erreicht, wenn

⁴Es ist in einigen Fällen möglich, daß eine nicht invariante Wirkung zu einer invarianten Bewegungsgleichung führt. Diese Komplikation spielt aber im Zusammenhang der relativistischen Mechanik von Punktteilchen keine Rolle.

⁵Aus der Translationsinvarianz folgt, daß f von x unabhängig ist. Aus der Invarianz unter Lorentz-Boosts folgt, daß f weiter nur vom Quadrat der 4-Geschwindigkeit abhängen kann, also wegen $u^2 = c^2$ nur von der Lichtgeschwindigkeit.

⁶Um die Länge einer gegebenen Kurve zu bestimmen, wird man diese im allgemeinen parametrisieren, was auf verschiedene Arten geschehen kann. Die obige Wirkung ist aber invariant unter einer Reparametrisierung der Kurve, wie man leicht zeigen kann.

diese 4-dimensionale Länge *maximal* ist. Dies liegt an der Metrik der 4-dimensionalen Raumzeit: Würde das Teilchen sich durch eine Zickzack-Bewegung, die aus lichtartigen Segmenten ($ds^2 = 0$) zusammengesetzt ist, von Punkt 1 nach 2 bewegen, wäre die entsprechende 4-dimensionale Weglänge sogar gleich Null. Die *maximale* 4-dimensionale Weglänge entspricht einer *minimalen* 3-dimensionalen Weglänge, wie wir sie für ein freies Teilchen erwarten.

Wegen $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ können wir auch schreiben

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} dt. \quad (\text{VIII.68})$$

Hieraus lesen wir die Lagrangefunktion ab,

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{VIII.69})$$

Im nicht-relativistischen Grenzfall, $v \ll c$ erhalten wir

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (\text{VIII.70})$$

und damit

$$S \simeq \text{const} + \int \frac{mv^2}{2} dt \quad (\text{VIII.71})$$

und damit die erwartete nicht-relativistische Lagrangefunktion

$$L_{\text{nicht-rel}} = \frac{mv^2}{2}. \quad (\text{VIII.72})$$

Zurückkehrend zum Fall beliebiger Geschwindigkeit, erhalten wir den kanonischen Impuls

$$p_{\text{kan } i} = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mv_i \quad (\text{VIII.73})$$

oder

$$\mathbf{p}_{\text{kan.}} = \gamma m \mathbf{v} \quad (\text{VIII.74})$$

und die Hamilton-Funktion

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \gamma mc^2 = E \quad (\text{VIII.75})$$

wie erwartet.

Nach kurzer Rechnung findet man mittels der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0 \quad (\text{VIII.76})$$

oder

$$\frac{d}{dt} (\gamma m \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{VIII.77})$$

oder

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (\text{VIII.78})$$

VIII.3.b Teilchen im elektromagnetischen Feld

Wir betrachten nun ein Teilchen der Masse m und der Ladung q im elektromagnetischen Feld. Als Ansatz für die Wirkung schreiben wir

$$S = S_0 + S_{\text{int}}, \quad (\text{VIII.79})$$

worin S_0 die freie Wirkung (VIII.67) ist. S_{int} steht für den Teil der Wirkung, der die Wechselwirkung mit dem Feld beschreibt.

Auch hier soll S_{int} wieder Poincaré-invariant sein. Darüberhinaus soll dieser Term das Feld entlang der Weltlinie des Teilchens und die Geschwindigkeit u^μ involvieren, damit aus diesem Term die rechte Seite der Bewegungsgleichung (VIII.58) resultieren kann. Da (u^μ) ein 4-Vektor ist, müssen wir diesen mit einem weiteren 4-Vektor kontrahieren, um einen Skalar unter Lorentz-Transformationen zu erhalten. Dazu bietet sich als natürlicher Kandidat das Viererpotential A_μ an. (Die elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} selbst sind nicht Teil von Vierervektoren und können daher hierfür nicht verwendet werden.) Wir behaupten daher, daß die richtige Wahl für S_{int} ist

$$S_{\text{int}} = \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} A_\mu(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau) d\tau = \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} A_\mu(x) dx^\mu. \quad (\text{VIII.80})$$

Damit ist die gesamte Wirkung

$$S = -mc^2 \int_{\mathcal{P}} d\tau + \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} A_\mu(x) dx^\mu \quad (\text{VIII.81})$$

Da S_{int} das Viererpotential enthält, ist dieser Term allerdings nicht eichinvariant. Eine Eichtransformation $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \chi$ erzeugt daher einen zusätzlichen Term

$$\frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} \partial_\mu \chi(x) dx^\mu = \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} \frac{d\chi}{dx^\mu} dx^\mu = \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} d\chi = \frac{q}{c} (\chi_2 - \chi_1), \quad (\text{VIII.82})$$

der nur von den Werten der Funktion χ an den Endpunkten abhängt. Bei einer Variation der Wirkung, die diese Endpunkte festhält, ändert sich der zusätzliche Term nicht und trägt daher nicht zur Bewegungsgleichung bei.⁷

Die Wirkung können wir auch durch das Vektorpotential \mathbf{A} und das skalare Potential φ ausdrücken:

$$S = \int_{\mathcal{P}} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\varphi \right) dt \quad (\text{VIII.84})$$

und haben damit die Lagrangefunktion

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\varphi \quad (\text{VIII.85})$$

⁷Der zusätzliche Term in der Lagrangefunktion ist eine totale Zeitableitung,

$$\int_{\mathcal{P}} d\chi = \int_{\mathcal{P}} \frac{d\chi}{dt} dt. \quad (\text{VIII.83})$$

Die aus der Lagrangefunktion resultierende Bewegungsgleichung ist (siehe Übungen)

$$\frac{d}{d\tau}(mu^\mu) = \frac{q}{c}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)u_\nu = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu \quad (\text{VIII.86})$$

wie erwartet. Die Bewegungsgleichung involviert wieder nur die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} und ist damit klarerweise eichinvariant.

Die Komponenten des kanonischen Impulses sind

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} \quad (\text{VIII.87})$$

so daß

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_{\text{kan}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}\mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{q}{c}\mathbf{A}, \quad (\text{VIII.88})$$

worin wieder \mathbf{p} der kinetische Impuls ist. Die Hamiltonfunktion ist dann

$$H = v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi. \quad (\text{VIII.89})$$

Um dies durch den kanonischen Impuls \mathbf{P} auszudrücken, beobachten wir, daß nach (VIII.85) und (VIII.89) $(H - q\varphi)$ zu $(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A})$ in derselben Relation steht wie im Fall ohne Feld. Daraus ergibt sich

$$\left(\frac{H - q\varphi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 \quad (\text{VIII.90})$$

bzw.

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2} + q\varphi \quad (\text{VIII.91})$$

wie man auch explizit leicht überprüft.

Im nichtrelativistischen Grenzfall $v \ll c$ finden wir, wenn wir jeweils die Ruheenergie $E_0 = mc^2$ abziehen, die Lagrangefunktion

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\varphi \quad (\text{VIII.92})$$

und mit

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \quad (\text{VIII.93})$$

die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + q\varphi \quad (\text{VIII.94})$$

Diese ist auch in der Quantenmechanik von sehr großer Bedeutung.

Kapitel IX

Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik

IX.1 Lagrange-Formalismus für Felder

Im aus der klassischen Mechanik der Punktteilchen bekannten Formalismus wird eine abzählbare Anzahl von Freiheitsgraden behandelt. Felder, z. B. das elektromagnetische Feld, haben aber überabzählbar viele Freiheitsgrade, im Falle der Elektrodynamik die Komponenten E_i und B_i der Felder (oder die Potentiale: φ und die Komponenten A_i) an jedem Raumpunkt.

Kapitel X

Elektrodynamik in Materie

Die bisher diskutierten Maxwell-Gleichungen gelten immer, und insbesondere natürlich in materiellen Medien. Dabei tragen die Ladungen und Ströme in den Atomen und/oder Molekülen zu ρ und \mathbf{j} bei.

Die Beschreibung von allen einzelnen Ladungen und Strömen ist in materiellen Medien aber weder technisch möglich noch wünschenswert. Stattdessen interessieren und in Materie bei einer makroskopischen Betrachtung eher gemittelte Eigenschaften der Materie. Die Mittelung sollte dabei über Raumbereiche stattfinden, die groß gegen die atomaren Skalen aber hinreichend klein gegen die makroskopischen Dimensionen sind. Dann erhält man makroskopisch wieder Größen, die man als kontinuierlich veränderlich ansehen kann.

Wir werden im folgenden der Einfachheit halber immer ruhende Materie betrachten.

X.1 Materie im statischen elektrischen Feld

X.1.a Polarisation und dielektrische Verschiebung

Materie besteht aus Atomen und Molekülen. Diese können verschiedene Eigenschaften haben.

- Manche Moleküle haben ein permanentes elektrisches Dipolmoment, z. B. H_2O .

Abbildung

Im allgemeinen sind die Moleküle aber durch thermische Bewegung in ungeordnet in verschiedenen Richtung orientiert. Bei einem angelegten elektrischen Feld tritt aber eine Ausrichtung gegen die thermische Bewegung ein. Die Materie wird durch das Feld **polarisiert**.

- Bei Molekülen ohne permanentes Dipolmoment kann ein elektrisches Feld im allgemeinen ein Dipolmoment induzieren durch die Deformation der Elektronenhülle. Es kommt dann zu einer relativen Verschiebung der Elektronen gegen die Kerne.

Materialien mit solchen Eigenschaften nennt man **Dielektrika**. Wir betrachten deren Verhalten zunächst in elektrostatischen Feldern.

In der makroskopischen Beschreibung ersetzen wir die Verteilung der permanenten oder induzierten Dipole durch eine kontinuierliche Dipoldichte

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\overline{\Delta V}} \sum_{\substack{\text{Dipole} \\ \text{in } \overline{\Delta V}}} \mathbf{p}_i, \quad (\text{X.1})$$

worin \mathbf{p}_j die (permanenten oder induzierten) Dipolmomente der einzelnen Dipole sind und $\overline{\Delta V}$ das Mittelungsvolumen.¹ Daher ist $\mathbf{P}(\mathbf{x})\overline{\Delta V}$ das Dipolmoment des Volumens $\overline{\Delta V}$ um den Punkt \mathbf{x} . Der Vektor \mathbf{P} heißt **dielektrische Polarisation**. Durch die dielektrische Polarisation werden an der Oberfläche jedes gegebenen Volumens Ladungen induziert.

Abbildung

Wir bezeichnen mit ρ_P die Ladungsverteilung durch diese Polarisationsladungen.

Das Potential eines Dipols ist $\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3}$. Für eine kontinuierliche Dipoldichte \mathbf{P} erhält man das durch die Polarisation hervorgerufene Potential

$$\begin{aligned} \varphi_P(\mathbf{x}) &= \int d^3x' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= - \int d^3x' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \operatorname{grad}_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= -\operatorname{div}_x \int d^3x' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned} \quad (\text{X.4})$$

¹Ein besseres Verfahren zur Mittelung ist die Integration mit einer Mittelungsfunktion, z. B.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma^3} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma^2}\right), \quad \int f(\mathbf{x}) d^3x = 1, \quad (\text{X.2})$$

durch

$$\langle A \rangle(\mathbf{x}, t) = \int A(\mathbf{x}', t) f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3x'. \quad (\text{X.3})$$

Wir werden hier aber die Mittelung nicht explizit ausführen, so daß diese Frage für uns nicht von großem Belang ist.

Weiter ist nach der Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned}
 \rho_P(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \Delta \varphi_P(\mathbf{x}) \\
 &= -\frac{1}{4\pi} (-1) \Delta \operatorname{div} \int d^3x' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\
 (\Delta \operatorname{div} = \operatorname{div} \Delta) &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \int d^3x' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \underbrace{\Delta_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}_{=-4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\
 &= -\operatorname{div} \int d^3x' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
 &= -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}),
 \end{aligned} \tag{X.5}$$

d. h.

$$\boxed{\rho_P(\mathbf{x}) = -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x})} \tag{X.6}$$

Zusätzlich kann es noch äußere Ladungen geben (die z. B. der Experimentator frei wählen kann). Deren Ladungsdichte bezeichnen wir mit ρ_f (der Index f steht für 'frei beweglich'). Die gesamte Ladungsdichte ρ ist dann

$$\begin{aligned}
 \rho(\mathbf{x}) &= \rho_f(\mathbf{x}) + \rho_P(\mathbf{x}) \\
 &= \rho_f(\mathbf{x}) - \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}).
 \end{aligned} \tag{X.7}$$

Aus der Maxwell-Gleichung ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= 4\pi\rho(\mathbf{x}) \\
 &= 4\pi\rho_f(\mathbf{x}) - 4\pi\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}).
 \end{aligned} \tag{X.8}$$

Definieren wir die **dielektrische Verschiebung**

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{x}), \tag{X.9}$$

so finden wir

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}) = 4\pi\rho_f(\mathbf{x})} \tag{X.10}$$

bzw. in integraler Form

$$\int_{\partial V} \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{f} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}) d^3x = \int_V 4\pi\rho_f d^3x. \tag{X.11}$$

Damit sind die **makroskopischen Gleichungen der Elektrostatik**

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_f} \tag{X.12}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0} \tag{X.13}$$

Natürlich ist die dielektrische Polarisation \mathbf{P} eine Funktion der Feldstärke \mathbf{E} . Für viele Substanzen gilt für nicht zu große \mathbf{E} die Proportionalität

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{x}) \tag{X.14}$$

mit der **dielektrischen Suszeptibilität** χ_e . Damit ist

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}) \tag{X.15}$$

mit der (**relativen**) **Dielektrizitätskonstante**

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e. \tag{X.16}$$

Im Vakuum ist $\epsilon = 1$ und damit $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x})$. Für anisotrope Medien sind χ_e und ϵ Tensoren, für isotrope Medien dagegen Skalare. Wir werden meist homogene Medien annehmen, in denen ϵ nicht vom Ort abhängt.

■ Man beachte, daß $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ eine Näherung ist.

Zum Beispiel gilt in Ferroelektrika $\mathbf{P} \neq 0$ schon bei $\mathbf{E} = 0$.

Typische Werte für die Dielektrizitätskonstanten von Materialien sind:

	ϵ
Luft	1.0006
Glas	5 - 8
H ₂ O (flüssig)	81

X.1.b Ladung im Dielektrikum

Für eine Punktladung im homogenen Dielektrikum erhält man

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = 4\pi q \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \tag{X.17}$$

und daraus

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} q \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}. \tag{X.18}$$

Die elektrische Feldstärke ist also durch das polarisierbare Medium um einen Faktor $1/\epsilon$ gegenüber dem Vakuum reduziert. Der physikalische Effekt hierbei ist die Abschirmung der Ladung durch die Polarisation des Mediums.

Abbildung

X.1.c Kraft auf dielektrischen Körper im elektrischen Feld

Wir betrachten einen dielektrischen Körper vom Volumen V in einem elektrischen Feld \mathbf{E} . Die Dipoldichte beträgt dann $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$. Falls \mathbf{E} nur schwach veränderlich innerhalb V ist, haben wir $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 = \text{const.}$. Der induzierte Dipol des Körpers ist dann

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}_0 V = \frac{1}{4\pi} (\epsilon - 1) \mathbf{E} V. \tag{X.19}$$

Damit ist die Kraft auf den Körper

$$\mathbf{K} = (\mathbf{p} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} (\epsilon - 1) (\mathbf{E} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{E} V. \tag{X.20}$$

Es wirkt also eine Kraft auf den Körper, falls \mathbf{E} inhomogen ist. Der dielektrische Körper wird dann in das Feld hineingezogen.

X.1.d Grenzflächen von Dielektrika

An Grenzflächen zweier Dielektrika ist die Tangentialkomponente von \mathbf{E} stetig. Um dies zu sehen, betrachte wir eine Kurve \mathcal{C} , die auf beiden Seiten eines kleinen Stücks der Grenzfläche verläuft.

Abbildung

Wir wollen die Ausdehnung d klein machen, $d \rightarrow 0$, so daß nur die Tangentialkomponenten von \mathbf{E} zum Integral entlang der Kurve beitragen. Wir finden dann für hinreichend kleines l (damit \mathbf{E} entlang der senkrechten Integrationswege als konstant angenommen werden kann)

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \left(E_{\text{tang}}^{(1)} - E_{\text{tang}}^{(2)} \right) l + d(\dots) = \int_{\mathcal{F}} \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 0, \quad (\text{X.21})$$

da in der Elektrostatik $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Der Term proportional zu d verschwindet für die Wahl $d \rightarrow 0$, so daß

$$\boxed{E_{\text{tang}}^{(1)} = E_{\text{tang}}^{(2)}} \quad (\text{X.22})$$

Dieselbe Beziehung gilt auch im nicht-statischen Fall, z. B. bei elektromagnetischen Wellen an der Grenzfläche. Wenn nämlich $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, so ergibt das Flächenintegral in (X.21)

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial t} l d, \quad (\text{X.23})$$

was im Grenzwert $d \rightarrow 0$ ebenfalls verschwindet, da die zeitliche Ableitung von \mathbf{B} endlich bleibt.

Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente von \mathbf{E} an Grenzflächen folgt unmittelbar, daß die Tangentialkomponente von \mathbf{D} an Grenzflächen nicht stetig ist. Vielmehr gilt

$$\boxed{\frac{1}{\epsilon_1} D_{\text{tang}}^{(1)} = \frac{1}{\epsilon_2} D_{\text{tang}}^{(2)}} \quad (\text{X.24})$$

Weiter finden wir, daß die Normalkomponenten von \mathbf{D} stetig an Grenzflächen ist, falls sich keine freien Ladungen auf der Grenzfläche befinden. Dazu legen wir ein kleines zylindrisches Integrationsvolumen (eine sogenannte 'Gaußsche Dose') der Höhe d mit Radius R an die Grenzfläche.

Abbildung

Wir finden

$$0 = \int_V d^3x \operatorname{div} \mathbf{D} = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f}, \quad (\text{X.25})$$

da keine freien Ladungsträger auf der Grenzfläche sind. (Sonst wäre dieses Integral gleich $4\pi(\pi R^2)\sigma_f$ mit der Flächenladungsdichte σ_f der freien Ladungen an der Grenzfläche.) Für $d \rightarrow 0$ tragen nur die Normalkomponenten von \mathbf{D} zum Flächenintegral bei:

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = \pi R^2 \left(D_n^{(2)} - D_n^{(1)} \right), \quad (\text{X.26})$$

und daher haben wir

$$\boxed{D_n^{(1)} = D_n^{(2)}} \quad (\text{X.27})$$

Hieraus folgt, daß die Normalkomponente von \mathbf{E} nicht stetig ist, sondern

$$\boxed{\epsilon_1 E_n^{(1)} = \epsilon_2 E_n^{(2)}} \quad (\text{X.28})$$

Damit ergibt sich an einer Grenzfläche folgendes Bild, wenn $\epsilon_1 < \epsilon_2$:

Abbildung

Man erhält aus der Stetigkeit von E_{tang}

$$\left| \mathbf{E}^{(1)} \right| \sin \alpha_1 = \left| \mathbf{E}^{(2)} \right| \sin \alpha_2, \quad (\text{X.29})$$

und aus der Stetigkeit von D_n

$$\left| \mathbf{D}^{(1)} \right| \cos \alpha_1 = \left| \mathbf{D}^{(2)} \right| \cos \alpha_2, \quad (\text{X.30})$$

und aus deren Verhältnis, da $\mathbf{D}^{(i)} = \epsilon_i \mathbf{E}^{(i)}$ für $i = 1, 2$,

$$\frac{\tan \alpha_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \alpha_2}{\epsilon_2}. \quad (\text{X.31})$$

Man beachte, daß \mathbf{D} an Grenzflächen quellenfrei ist, denn nur freibewegliche Ladungen sind Quellen für \mathbf{D} . Quellen für \mathbf{E} sind dagegen *alle* Ladungen, insbesondere auch durch die Polarisation induzierte Ladungen an der Grenzschicht.

Die Feldlinien werden beim Eintritt in ein Medium mit größerem ϵ von der Normalen weg 'gebrochen'. (Beachte, daß dies gerade entgegengesetzt zum Verhalten bei der Lichtbrechung ist.) Da an der Grenzfläche Polarisationsladungen sind, also Quellen für \mathbf{E} , ändert sich die Dichte der Feldlinien von \mathbf{E} an der Grenzfläche. Die Dichte der Feldlinien von \mathbf{D} bleibt dagegen an der Grenzfläche unverändert.

Abbildung

X.2 Materie im statischen magnetischen Feld

X.2.a Magnetisierung und magnetische Feldstärke

In vielen Stoffen entsteht in einem magnetischen Feld eine magnetische Dipolverteilung – ganz analog zur dielektrischen Polarisierung.

Die Dipolverteilung wird durch die Dipoldichte $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ beschrieben, die man **Magnetisierung** nennt. Analog zur dielektrischen Polarisierung ist sie durch eine Mittelung über kleine Volumina definiert,

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\overline{\Delta V}} \sum_{\substack{\text{Dipole} \\ \text{in } \overline{\Delta V}}} \mathbf{m}_i \quad (\text{X.32})$$

mit dem Mittelungsvolumen $\overline{\Delta V}$. Dann ist $\mathbf{M}(\mathbf{x})\overline{\Delta V}$ das magnetische Dipolmoment des Volumens $\overline{\Delta V}$ um den Punkt \mathbf{x} .

Es gibt im wesentlichen die folgenden Klassen von Materialien:

- Bei **paramagnetischen** Stoffen stellen die Moleküle kleine magnetische Dipole dar, die ohne äußeres Magnetfeld infolge thermischer Bewegung regellos orientiert sind. Bei Anlegen eines äußeren Feldes werden die Dipole entgegen der thermischen Bewegung bevorzugt in Feldrichtung orientiert, so daß $\mathbf{M} \parallel \mathbf{B}$.
- Bei **diamagnetischen** Stoffen haben die Moleküle kein permanentes Dipolmoment. Bei Anlegen eines Magnetfeldes entstehen Induktionsströme, die zu *induzierten* magnetischen Dipolmomenten führen.
- Eine separate Klasse sind **Ferromagneten**, bei denen auch *ohne* äußeres Magnetfeld eine Magnetisierung vorliegt.

In allen Fällen sind 'innere Ströme' die Ursache der Magnetisierung. Die ursprüngliche Ampèresche Hypothese der 'Molekularströme' ist allerdings nicht ganz richtig, da auch die Spins (und damit quantenmechanische Effekte) zur Magnetisierung beitragen.

Wir teilen die Stromdichte in Materie auf in die **Magnetisierungstromdichte** \mathbf{j}_M und die **freibewegliche Stromdichte** \mathbf{j}_f , die die äußeren Ströme darstellt,

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{x}) + \mathbf{j}_M(\mathbf{x}). \quad (\text{X.33})$$

Das Vektorpotential eines magnetischen Dipols ist

$$\mathbf{A}_{\text{Dip}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3}. \quad (\text{X.34})$$

Also ist für eine kontinuierliche Dipoldichte $\mathbf{M}(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_M(\mathbf{x}) &= \int d^3x' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= \int d^3x' \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \text{grad}_{x'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ \text{part. Int.} &= \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \text{rot}_{x'} \mathbf{M}(\mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (\text{X.35})$$

Das Vektorpotential für den gesamten Strom \mathbf{j} , also für \mathbf{j}_f zusammen mit \mathbf{M} ist

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \mathbf{A}_{\mathbf{j}_f} + \mathbf{A}_M \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \operatorname{rot}_{x'} \mathbf{M}(\mathbf{x}') \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} [\mathbf{j}_f(\mathbf{x}') + c \operatorname{rot}_{x'} \mathbf{M}(\mathbf{x}')] \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{j}(\mathbf{x}'),
 \end{aligned} \tag{X.36}$$

worin die letzte Zeile das bekannte Vektorpotential für den gesamten Strom \mathbf{j} ist. Durch Vergleich der letzten beiden Zeilen finden wir, daß

$$\mathbf{j}_M(\mathbf{x}) = c \operatorname{rot}_{x'} \mathbf{M}(\mathbf{x}'). \tag{X.37}$$

Einsetzen in die Maxwell-Gleichung für $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ ergibt

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f(\mathbf{x}) + 4\pi \operatorname{rot}_{x'} \mathbf{M}(\mathbf{x}). \tag{X.38}$$

Wir definieren daher die **magnetische Feldstärke** $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ als

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) - 4\pi \mathbf{M}(\mathbf{x}) \tag{X.39}$$

und erhalten damit die **makroskopischen Gleichungen der Magnetostatik**

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f \tag{X.40}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{X.41}$$

Die zweite dieser Gleichungen, die die Abwesenheit von magnetischen Monopolen besagt, gilt natürlich unverändert weiter.

Die Magnetisierung ist eine Funktion von \mathbf{B} . Im allgemeinen ist diese Abhängigkeit kompliziert, sie hängt bei manchen Stoffen sogar von den Umständen in der Vergangenheit ab (z. B. bei Ferromagneten, wo der Effekt der Hysterese auftritt). Weil \mathbf{M} die Relation zwischen \mathbf{H} und \mathbf{B} bestimmt, gilt dies im allgemeinen auch für \mathbf{H} .

Für viele Stoffe gilt bei nicht zu großen Feldstärken näherungsweise die Proportionalität

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \tag{X.42}$$

mit der **relativen Permeabilität** μ . Damit ist

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} - \mathbf{H}) = \frac{1}{4\pi} (\mu - 1) \mathbf{H} =: \chi_m \mathbf{H}. \tag{X.43}$$

Man bezeichnet χ_m als **magnetische Suszeptibilität**. Es gilt

$$\mu = 1 + 4\pi \chi_m. \tag{X.44}$$

Im Vakuum gilt $\mu = 1$ und $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. Es ist

$$\begin{aligned}
 \chi_m > 0 & \quad \text{für paramagnetische Stoffe} \\
 \chi_m < 0 & \quad \text{für diamagnetische Stoffe}
 \end{aligned} \tag{X.45}$$

Typische Werte sind z. B.

	χ_m
Wasserstoff	$-0.20 \cdot 10^{-9}$
Wasser	$-0.72 \cdot 10^{-6}$
Sauerstoff	$+0.14 \cdot 10^{-6}$

In Abwesenheit von freien Ladungen und freien Strömen weisen die makroskopischen Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik eine gewisse Symmetrie auf. Es besteht nämlich eine (mathematische) Analogie zwischen \mathbf{E} und \mathbf{H} , \mathbf{D} und \mathbf{B} , sowie zwischen ϵ und μ . (Diese wird auch von der unglücklichen Wahl des Namens 'Feldstärke' für \mathbf{H} reflektiert.) Es ist jedoch zu beachten, daß die physikalische Analogie zwischen den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} , zwischen \mathbf{D} und \mathbf{H} , sowie zwischen ϵ und $1/\mu$ besteht. Es sind nämlich die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} , die sich jeweils aus allen mikroskopischen Ladungen bzw. alle mikroskopischen Strömen ergeben. In \mathbf{D} und \mathbf{H} sind dagegen die Polarisationsladungen bzw. Magnetisierungsströme implizit berücksichtigt.

X.2.b Magnetische Felder an Grenzflächen

Analog zu den Betrachtungen des Verhaltens von \mathbf{E} und \mathbf{D} an Grenzflächen von Dielektrika kann man das Verhalten von \mathbf{B} und \mathbf{H} an Grenzflächen zwischen Materialien verschiedener Permeabilitäten untersuchen (siehe Übungen).

Man findet, daß an Grenzflächen von Materialien mit verschiedenen Permeabilitäten:

- Die Normalkomponenten von \mathbf{B} stetig sind,

$$\boxed{B_n^{(1)} = B_n^{(2)}} \quad (\text{X.46})$$

und damit die Normalkomponenten von \mathbf{H} unstetig,

$$\boxed{\mu_1 H_n^{(1)} = \mu_2 H_n^{(2)}} \quad (\text{X.47})$$

- In Abwesenheit von Leitungsströmen sind die Tangentialkomponenten von \mathbf{H} an der Grenzfläche stetig,

$$\boxed{H_{\text{tang}}^{(1)} = H_{\text{tang}}^{(2)}} \quad (\text{X.48})$$

und damit die Tangentialkomponenten von \mathbf{B} unstetig,

$$\boxed{\frac{1}{\mu_1} B_{\text{tang}}^{(1)} = \frac{1}{\mu_2} B_{\text{tang}}^{(2)}} \quad (\text{X.49})$$

Beim Übergang von einem Medium mit Permeabilität μ_1 zu einem mit μ_2 werden bei $\mu_1 < \mu_2$ die Feldlinien von der Normalen weg 'gebrochen'.

Abbildung

X.2.c Ferromagnetismus

Bei ferromagnetischen Materialien treten typische Suszeptibilitäten von $\chi_m \simeq 10^3$ auf. Die Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ hängt von der Vorgeschichte des Materials ab, was sich im Phänomen der **Hysterese** manifestiert. Bei großen magnetischen Feldstärken tritt typischerweise eine Sättigung der Magnetisierung auf.

Abbildung

Die vollständige Erklärung des Ferromagnetismus kann erst im Rahmen der Quantenmechanik gegeben werden, da hier die Ausrichtung der Spins im Material eine entscheidende Rolle spielt. Der Spin ist aber ein reiner Quanteneffekt.

X.3 Elektrische Leiter

In elektrischen Leitern bewirkt ein elektrisches Feld einen Strom in Richtung des Feldes. In vielen Leitern – sogenannten **Ohmschen Leitern** – ist die Stromdichte dem Feld proportional. Dann gilt das **Ohmsche Gesetz**

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}), \quad (\text{X.50})$$

worin σ die **elektrische Leitfähigkeit** ist, die vom Material abhängt. Ihr Kehrwert

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma(\mathbf{x})} \quad (\text{X.51})$$

heißt **spezifischer elektrischer Widerstand**. Für $\sigma \rightarrow 0$ erhält man einen **Isolator**, d. h. $\mathbf{j} = 0$; für $\sigma \rightarrow \infty$ einen **idealen Leiter**, d. h. $\mathbf{E} = 0$.

Das 'normale' Ohmsche Gesetz erhält man z. B. für einen homogenen Leiter (d. h. $\sigma(\mathbf{x}) = \text{const.}$) der Länge l mit konstantem Querschnitt F

Abbildung

als

$$I = |\mathbf{j}|F = \sigma|\mathbf{E}|F = \frac{\sigma F}{l} U = \frac{1}{R} U \quad (\text{X.52})$$

mit dem elektrischen Widerstand

$$R = \frac{l}{\sigma F}. \quad (\text{X.53})$$

Während σ eine Materialkonstante ist, hängt R von der Geometrie des Leiters ab. Die Leistung im Leiter ist

$$P = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x, \quad (\text{X.54})$$

d. h. für den obigen Fall (wobei wir den Weg \mathcal{C} entlang des Leiters legen)

$$P = I \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = IU = RI^2 = \frac{U^2}{R}. \quad (\text{X.55})$$

Im Inneren von Leitern sind Ladungsverteilungen aus freibeweglichen Ladungsträgern instabil und zerfallen in sehr kurzer Zeit, abhängig von der Leitfähigkeit (siehe Übungen). Bei Metallen liegt in Zerfallszeit im Bereich von 10^{-18} sec.

Im allgemeinen hängt die Leitfähigkeit σ von der Frequenz des Feldes ab, was bei elektromagnetischen Wellen sehr wichtig wird. Bei der Fourier-Zerlegung von $\mathbf{E}(t)$ und $\mathbf{j}(t)$,

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \mathbf{E}(\omega) d\omega \quad (\text{X.56})$$

$$\mathbf{j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \mathbf{j}(\omega) d\omega \quad (\text{X.57})$$

wird das Ohmsche Gesetz im Fourierraum

$$\mathbf{j}(\omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\omega). \quad (\text{X.58})$$

Dabei bezeichnet $\sigma(\omega)$ die Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit, nicht die Fouriertransformation.²

Wesentliche Eigenschaften von $\sigma(\omega)$ kann man im einfachen **Drude-Modell** der elektrischen Leitung verstehen, das wir hier für stationäre Ströme betrachten. Dabei werden die freien Ladungsträger im Leiter durch das Feld \mathbf{E} beschleunigt, stoßen aber im Mittel nach einer typischen Zeit τ , der sogenannten Relaxationszeit, mit einem Atom zusammen und werden dadurch abgebremst. Die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger hat dann im Mittel einen solchen Verlauf:

Abbildung

Es kann sich dann ein stationärer Strom einstellen, und der spezifische Widerstand bzw. der ihm entsprechende Energieverlust wird durch die Stöße verursacht. Man findet, daß in diesem Modell die (stationäre) Leitfähigkeit σ_0 gegeben ist durch

$$\sigma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{m}, \quad (\text{X.59})$$

wobei n_0 die Dichte freier Ladungsträger, e ihre Ladung, und m ihre Masse ist. Für Kupfer schätzt man z. B. ab, daß $\tau \simeq 10^{-14}$ sec.

Aus diesem einfachen Modell kann man schon qualitativ das Verhalten von σ als Funktion der Frequenz des elektrischen Feldes erschließen: Bei hohen Frequenzen ändern die Ladungsträger schnell ihre Richtung. Falls $\omega \gg 1/\tau$, geschieht dies typischerweise, bevor es zu einem Stoß kommt. Daher wird bei hohen Frequenzen der Leiter für elektromagnetische Wellen transparent. Wir finden also:

²Dies ist eine in diesem Kontext vielleicht verwirrende, aber übliche Notation.

- $\omega \ll \frac{1}{\tau}$: Dämpfung durch Stöße, Absorption für niedrige Frequenzen
- $\omega \gg \frac{1}{\tau}$: weniger Stöße und daher keine Dämpfung, Transparenz für hohe Frequenzen

X.4 Maxwell-Gleichungen in Materie

Wir wollen auch die Maxwell-Gleichungen so schreiben, daß die mikroskopischen Eigenschaften durch gemittelte Größen ersetzt werden, nämlich mit Hilfe der oben eingeführten Felder \mathbf{D} und \mathbf{H} .

Dazu zerlegen wir die Ladungsdichte gemäß

$$\rho = \rho_f + \rho_P, \quad (\text{X.60})$$

worin ρ_f die Dichte freibeweglicher Ladungen und ρ_P die Dichte der Polarisationsladungen bezeichnet. Die Stromdichte \mathbf{j} zerlegen wir gemäß

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M. \quad (\text{X.61})$$

Darin ist \mathbf{j}_f die freibewegliche Stromdichte und \mathbf{j}_M die Magnetisierungsstromdichte. Zusätzlich haben wir die **Polarisierungsstromdichte** \mathbf{j}_P , denn beim Vorgang der Polarisierung kommt es zu einem Strom, da Ladungen in den Molekülen gegeneinander verschoben werden. (Für statische Felder brauchen wir \mathbf{j}_P offenbar nicht.) Bei ruhender Materie, die wir hier immer annehmen, ist

$$\mathbf{P} \Delta \bar{V} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i q_i \mathbf{a}_i \quad (\text{X.62})$$

für Dipole \mathbf{p}_i aus Ladungen $\pm q_i$ im Abstand \mathbf{a}_i , und

$$\mathbf{j}_P \Delta \bar{V} = \sum_i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p}_i = \sum_i q_i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{a}_i. \quad (\text{X.63})$$

Daher gilt

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}. \quad (\text{X.64})$$

Wir hatten weiter

$$\mathbf{j}_M = c \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (\text{X.65})$$

Es gelten die Kontinuitätsgleichungen

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_f = 0, \quad (\text{X.66})$$

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_P = 0, \quad (\text{X.67})$$

und es ist wegen (X.65)

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_M = 0. \quad (\text{X.68})$$

Einsetzen obiger Relationen in die Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (\text{X.69})$$

ergibt

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j}_f + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} \right), \quad (\text{X.70})$$

woraus wir erhalten

$$\operatorname{rot} \underbrace{(\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M})}_{=\mathbf{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P})}_{=\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f. \quad (\text{X.71})$$

Damit haben wir

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f. \quad (\text{X.72})$$

Weiter folgt, wie gehabt, aus $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_f. \quad (\text{X.73})$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen bleiben in Materie unverändert. Damit haben wir also die folgenden **Maxwell-Gleichungen in Materie** oder **makroskopischen Maxwell-Gleichungen** gefunden:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_f \quad (\text{X.74})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{X.75})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{X.76})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{X.77})$$

Sie gelten für *ruhende* Materie.

Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen werden ergänzt durch Materialgleichungen, z. B. für viele Materialien durch die linearen Gleichungen $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ und das Ohmsche Gesetz $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ für elektrische Leiter.

X.5 Elektromagnetische Wellen in Materie

Wir wollen hier homogene, isotrope Medien betrachten, die durch ϵ , μ und σ charakterisiert sind. Es seien keine äußeren Ladungen vorhanden, $\rho_f = 0$.

X.5.a Telegraphengleichung

Aus den makroskopischen Maxwell-Gleichungen und den linearen Materialgleichungen $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E}$ kann man die **Telegraphengleichung** herleiten (siehe Übungen):

$$\left(\Delta - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 0 \quad (\text{X.78})$$

$$\left(\Delta - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{X.79})$$

Dabei handelt es sich um Wellengleichungen mit einem Dämpfungsterm. Durch diesen Term, der linear in der Zeitableitung ist, wird die Zeitumkehrinvarianz verletzt. Er führt bei leitenden Medien zu einem Energieverlust der Welle.

Natürlich kann man auch hier wieder Wellengleichungen für die Potentiale φ und \mathbf{A} herleiten statt direkt für die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} .

Die Telegraphengleichungen lassen sich durch ebene Wellen lösen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß im allgemeinen ϵ , μ und σ von der Frequenz abhängen, d. h. $\epsilon = \epsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$, $\sigma = \sigma(\omega)$.

X.5.b Elektromagnetische Wellen in Isolatoren

In ungeladenen Isolatoren ($\rho_f = 0$) haben wir $\sigma = 0$ und wir erhalten aus den Telegraphengleichungen die ungedämpften Wellengleichungen

$$\left(\Delta - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = 0 \quad (\text{X.80})$$

$$\left(\Delta - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{B} = 0. \quad (\text{X.81})$$

Diese können wir durch eben Wellen lösen,³

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}. \quad (\text{X.82})$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt die Bedingung

$$|\mathbf{k}| = k = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (\text{X.83})$$

Es tritt jetzt statt c die Phasengeschwindigkeit

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \quad (\text{X.84})$$

auf. Wir bezeichnen

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (\text{X.85})$$

als **optischen Brechungsindex** des Mediums. In den meisten Medien ist $\mu \simeq 1$, so daß dann $n \simeq \sqrt{\epsilon}$.

Wir finden also, daß in einem Dielektrikum die Phasengeschwindigkeit der ebenen elektromagnetischen Wellen gemäß

$$v_{\text{Ph}} = \frac{c}{n} \quad (\text{X.86})$$

verändert ist. Die Wellenlänge hängt mit derjenigen im Vakuum, λ_0 , zusammen gemäß

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}. \quad (\text{X.87})$$

Die Wellen sind wie im Vakuum transversal, d. h.

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{X.88})$$

und $(\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ bilden ein rechtshändiges System. \mathbf{E} und \mathbf{B} haben aber im Medium verschiedene Beträge,

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{\epsilon\mu} |\mathbf{E}|, \quad (\text{X.89})$$

wie man aus der Maxwell-Gleichung (X.76) herleitet.

Aus den Stetigkeitsbedingungen der transversalen bzw. normalen Komponenten der Felder \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} leitet man für ebene Wellen die bekannten Gesetze der optischen Brechung und Reflexion an Grenzflächen zwischen verschiedenen Dielektrika her (siehe Übungen).

³ $\boldsymbol{\epsilon}$ ist hier natürlich der Polarisationsvektor und hat nichts mit der Dielektrizitätskonstante ϵ zu tun.

X.5.c Dispersion

In der Relation $\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu$ sind im allgemeinen ϵ und μ Funktionen von ω , also $\epsilon = \epsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$. (Ein wichtiges Beispiel ist komplexwertiges ϵ , siehe unten.) Allgemein bezeichnet man den Zusammenhang⁴ zwischen ω und \mathbf{k} ,

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) = \omega(k) \quad (\text{X.90})$$

als **Dispersionsrelation**. (Die letzte Gleichung gilt für isotrope Medien.) Wenn $\epsilon = \epsilon(\omega)$ nicht konstant ist, spricht man von einem **dispersiven Medium**. (Da meistens $\mu \simeq 1$, spielt dabei μ keine Rolle.)

Wir betrachten nun der Einfachheit halber Wellen in einer Dimension. Die allgemeine Lösung der Wellengleichung erhält man durch Überlagerung ebener Wellen,

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]}, \quad (\text{X.91})$$

was man als **Wellenpaket** bezeichnet. Sei nun $A(k)$ um $k = k_0$ zentriert:

Abbildung

Man kann $\omega(k)$ um k_0 entwickeln:

$$\begin{aligned} \omega(k) &= \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} + \dots \\ &=: \omega_0 + (k - k_0)v_g + \dots, \end{aligned} \quad (\text{X.92})$$

wobei

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} \quad (\text{X.93})$$

Gruppengeschwindigkeit heißt. Mit dieser linearen Näherung (X.92) erhalten wir für das Wellenpaket

$$\begin{aligned} u(x, t) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk A(k) e^{i[kx - \omega_0 t - (k - k_0)v_g t]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\omega_0 - k_0 v_g)t} \int dk A(k) e^{ik(x - v_g t)} \end{aligned} \quad (\text{X.94})$$

und damit für die Intensität der Welle

$$|u(x, t)|^2 = |u(x - v_g t)|^2, \quad (\text{X.95})$$

d. h. der Puls (die 'Wellengruppe') bewegt sich mit Geschwindigkeit v_g fort. In der linearen Näherung für $\omega(k)$ ändert der Puls seine Form nicht.

⁴Falls sich ω nicht als eindeutige Funktion von \mathbf{k} schreiben läßt, hat man noch allgemeiner die Dispersionsrelation $f(\omega, \mathbf{k}) = 0$ mit einer Funktion f , die vom Medium abhängt.

Wenn mit der Dichte der Welle Energie assoziiert ist, wird auch diese mit der Gruppengeschwindigkeit transportiert. Die Gruppengeschwindigkeit – und *nicht* die Phasengeschwindigkeit – ist daher diejenige Geschwindigkeit, mit der Energie und Information übertragen werden.

Für Lichtwellen ist

$$\omega(k) = \frac{ck}{n(k)}. \quad (\text{X.96})$$

Die Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(k)} \quad (\text{X.97})$$

ist im allgemeinen von der Gruppengeschwindigkeit verschieden! Der Fall $v_{\text{Ph}} > c$ (d. h. $n < 1$) tritt in realen Medien durchaus auf, z. B. in Wasser bei einer Frequenz von $\nu \simeq 10^{16}$ Hz.

In typischen Medien steigt in den meisten Frequenzbereichen der Brechungsindex mit der Frequenz an,

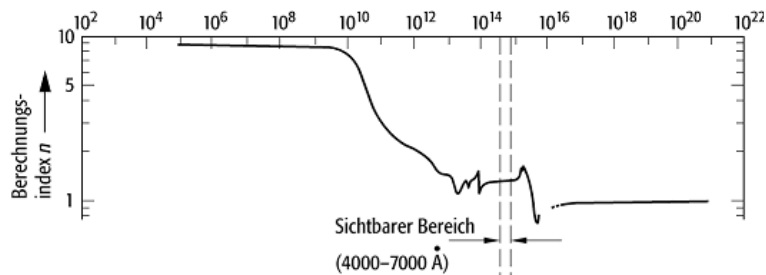
$$\frac{dn}{d\omega} > 0 \quad \text{'normale Dispersion'}. \quad (\text{X.98})$$

Es gibt aber auch (vor allem in der Nähe von Resonanzen, wo starke Absorption auftritt) den Fall anomaler Dispersion,

$$\frac{dn}{d\omega} < 0 \quad \text{'anomale Dispersion'}. \quad (\text{X.99})$$

Meist benutzt man diese Begriffe für den sichtbaren Teil des elektromagnetischen Spektrums.

Als Beispiel für die Vielfalt der Phänomene, die beim Brechungsindex auftreten können, zeigen wir die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Frequenz $\nu = \omega/(2\pi)$ für Wasser:



Bei geringer Frequenz ist wie im statischen Fall $\epsilon = 81$ und $n = 9$. Im sichtbaren Bereich ist $n \simeq 1.3$.

Es gibt Materialien, in denen in bestimmten Bereichen (insbesondere nahe Resonanzen) $v_g > c$. Allerdings ist dann die Taylor-Entwicklung (X.92) keine gute Näherung, und obige Definition von v_g ist nicht sinnvoll. Man kann ganz allgemein zeigen (z. B. unter Verwendung der notwendigen analytischen Eigenschaften von $A(\omega)$ in der komplexen ω -Ebene), daß Signalübertragung in dispersiven Medien *nie* mit Geschwindigkeiten größer als c erfolgen kann.

Geht man über die lineare Näherung in (X.92) hinaus, wird v_g die Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Wellenpakets. Für eine nichtlineare Dispersionsrelation, die in den meisten Medien vorliegt, verbreitert sich dann das Wellenpaket während der Propagation: es dispergiert.

Abbildung

Ein ähnlicher Effekt ist in der Quantenmechanik sehr wichtig.

X.5.d Elektromagnetische Wellen in Leitern

In Leitern ist $\sigma \neq 0$, und damit ist der Dämpfungsterm in den Telegraphengleichungen

$$\left(\Delta - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 0 \quad (\text{X.100})$$

$$\left(\Delta - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{X.101})$$

hier relevant. Die Gleichungen können wieder durch ebene Wellen gelöst werden, z. B. für \mathbf{E} (für \mathbf{B} findet man eine analoge Lösung)

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}. \quad (\text{X.102})$$

Einsetzen in die Telegraphengleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \left[-\mathbf{k}^2 - \frac{\epsilon\mu}{c^2} (-i\omega)^2 - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma (-i\omega) \right] \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{k}^2 - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \omega^2 - i \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma\omega &= 0, \end{aligned} \quad (\text{X.103})$$

und damit

$$\mathbf{k}^2 = \left(\epsilon\mu + i \frac{4\pi\mu\sigma}{\omega} \right) \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (\text{X.104})$$

Man bezeichnet naheliegenderweise

$$n = \sqrt{\epsilon\mu + i \frac{4\pi\mu\sigma}{\omega}} \quad (\text{X.105})$$

als **verallgemeinerten Brechungsindex** und schreibt dessen Real- und Imaginärteil als

$$n = n_{\text{R}} + i n_{\text{I}}. \quad (\text{X.106})$$

Der verallgemeinerte Brechungsindex ist eine Funktion der Frequenz, $n = n(\omega)$, denn ϵ , μ und σ hängen von ω ab.

Für die meisten Materialien ist $\mu \simeq 1$, so daß wir nähern können

$$n = \sqrt{\epsilon\mu - \frac{4\pi\sigma}{i\omega}}. \quad (\text{X.107})$$

Man kann nun die bekannten Ergebnisse für Isolatoren verwenden, indem man in diesen ϵ durch eine **komplexe Dielektrizitätskonstante** ersetzt:

$$\epsilon \longrightarrow \epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{i\omega}, \quad (\text{X.108})$$

worin $\sigma = \sigma(\omega)$. Damit ist

$$n = \sqrt{\epsilon(\omega)}. \quad (\text{X.109})$$

Mit $k = n\frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c}(n_{\text{R}} + in_{\text{I}})$ wird, wenn wir \mathbf{k} in z -Richtung wählen,

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon} e^{i(kz - \omega t)} = \boldsymbol{\epsilon} e^{[\frac{\omega}{c}(n_{\text{R}} + in_{\text{I}})z - \omega t]} = \boldsymbol{\epsilon} e^{i\omega(n_{\text{R}}\frac{z}{c} - t)} e^{-n_{\text{I}}\frac{\omega z}{c}}, \quad (\text{X.110})$$

so daß

$$\text{Re } \mathbf{E} = \text{Re} \left[\boldsymbol{\epsilon} e^{i\omega(n_{\text{R}}\frac{z}{c} - t)} \right] e^{-n_{\text{I}}\frac{\omega z}{c}}, \quad (\text{X.111})$$

und analog für \mathbf{B} . Der letzte Faktor bewirkt eine Dämpfung der Amplitude. Die Amplitude fällt also auf der Strecke

$$d = \frac{c}{\omega n_{\text{I}}} \quad (\text{X.112})$$

auf $1/e$ -fache ab. Diese Strecke nennt man die **Eindringtiefe**.

Aus dem Drude-Modell der elektrischen Leitung (und daran anschließende Überlegungen) kann man herleiten daß

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \quad (\text{X.113})$$

mit $\sigma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{m}$ (siehe (X.59)). Damit ist also

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{i\omega(1 - i\omega\tau)}. \quad (\text{X.114})$$

- Bei kleinen Frequenzen $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ ist

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} \simeq \sqrt{-\frac{4\pi\sigma_0}{i\omega}} = (1 + i) \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}} \quad (\text{X.115})$$

und daher

$$n_{\text{R}} = n_{\text{I}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}}, \quad (\text{X.116})$$

so daß für die Eindringtiefe gilt

$$d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_0\omega}}. \quad (\text{X.117})$$

Zum Beispiel ist für Kupfer

$$\sigma_0(\text{Cu}) = 5.8 \cdot 10^{17} \text{ sec}^{-1}. \quad (\text{X.118})$$

Man findet also in diesem Fall beispielsweise

$$\begin{aligned} \omega = 2\pi \cdot 50 \text{ sec}^{-1} &\implies d = 0.9 \text{ cm} \\ \omega = 2\pi \cdot 10^9 \text{ sec}^{-1} &\implies d = 2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}. \end{aligned} \quad (\text{X.119})$$

Feld und Stromdichte dringen daher nur in die äußerste Schicht des Leiters ein. Dies bezeichnet man als **Skin-Effekt**.

- Bei hohen Frequenzen $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ ist dagegen

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{\tau\omega^2} = \epsilon - \frac{4\pi n_0 e^2}{m\omega^2} = \epsilon \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right) \quad (\text{X.120})$$

mit der **Plasmafrequenz**⁵

$$\omega_P = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{\epsilon m}}. \quad (\text{X.121})$$

Für $\omega < \omega_P$ ist $\epsilon(\omega) < 0$, d. h.

$$n_R = 0 \quad \text{und} \quad n_I = \sqrt{\epsilon \left(\frac{\omega_P^2}{\omega} - 1 \right)}, \quad (\text{X.122})$$

was zum exponentiellen Abfall der Welle führt. Die Welle wird daher vollständig reflektiert! Für $\omega < \omega_P$ tritt also **Reflexion** ein.

Für $\omega > \omega_P$ ist $\epsilon(\omega) > 0$ und damit

$$n_R = \sqrt{\epsilon \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega} \right)} \quad \text{und} \quad n_I = 0. \quad (\text{X.123})$$

Der Leiter wird demzufolge durchsichtig, für $\omega > \omega_P$ tritt also **Transparenz** auf.

Betrachten wir als Beispiel wieder Kupfer. Hier ist die Plasmafrequenz

$$\omega_P(\text{Cu}) = 1.6 \cdot 10^{16} \text{ sec}^{-1}. \quad (\text{X.124})$$

Für sichtbares Licht, also für $\omega = 2.4 - 5.2 \cdot 10^{15} \text{ sec}^{-1}$, ist Kupfer undurchsichtig. Fast alle Metalle haben eine Plasmafrequenz im Ultravioletten und reflektieren daher Licht.⁶

In Elektrolyten (und damit in vielen Salzen) ist typischerweise die Ladungsträgerdichte n_0 kleiner und die Ladungsträgermasse m höher. Daher ist hier ω_P kleiner, so daß Elektrolyte in der Regel durchsichtig sind.

X.5.e Kramers-Kronig-Relationen

⁵Diese spielt auch als Eigenfrequenz bei Plasmaoszillationen eine Rolle, was ihren Namen erklärt.

⁶Die Farben von Kupfer und Gold erklären sich aus Interband-Übergängen und *nicht* aus einer Plasmafrequenz im sichtbaren Bereich.

Kapitel XI

Energie- und Impulssatz für das elektromagnetische Feld