Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker III

– Wiederholungsblatt –

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra
Dipl. Math. Michael Geiger

Abgabetermin: **(KEINE ABGABE!)**

Dieses Blatt dient zur selbständigen Wiederholung des bisherigen Vorlesungsstoffes. Es besteht in der letzten Vorlesungswoche (vom 3. bis zum 7. Februar) die Möglichkeit, es als Basis zur Wiederholung des Stoffes in den Übungsgruppen zu verwenden.

Aufgabe 1 (Fragen zur eindimensionalen Integration)

a) Wie sind zu einer gegebenen Funktion f und einem Intervall $[a;b] \subset \mathbb{R}$ mit Zerlegung Z Ober- und Untersumme definiert? Konstruieren Sie hieraus das Ober- bzw Unterintegral. Kennen Sie ein Beispiel, bei dem die beiden Werte *nicht* übereinstimmen?

b) Wie lautet das Riemann'sche Integrabilitätskriterium? Welche Klassen von Funktionen sind integrierbar?

c) Listen Sie einige wichtige Eigenschaften des Riemann-Integrals auf. Wenn zwei Funktionen $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar sind, für welche weiteren Funktionen können Sie dies dann auch sofort folgern?

d) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

e) Was ist eine Stammfunktion? Was sagt der Fundamentalsatz der Analysis aus? Wodurch ist seine *fundamentale* Bedeutung gerechtfertigt?

f) Welche beiden Formeln zur Berechnung konkreter Integrale kennen Sie? Zu welchen Differentiationsregeln korrespondieren sie? Führen Sie jeweils ein Beispiel aus.

g) Was ist ein *uneigentliches Integral*? Welche beiden verschiedenen Typen uneigentlicher Integrale sind Ihnen bekannt? Kennen Sie eine Möglichkeit, ein Integral auf unbeschränktem Integrationsintervall durch eine Reihe abzuschätzen?

h) Warum ist in der Analysis die Vertauschbarkeit gewisser Grenzprozesse wichtig? Geben Sie ein Beispiel außerhalb des Themenbereichs *Integration*. Wann lässt sich für eine Funktionenfolge das Integral mit der Limesbildung vertauschen?

i) Formulieren Sie die Sätze von Bolzano-Weierstraß und Heine-Borel. Welcher dieser beiden *Kompaktheitssätze* ist allgemeiner?

j) Charakterisieren Sie die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen vollständig. Erläutern Sie die Begriffe, die Sie hierbei verwenden. Geben Sie ein Beispiel für eine beschränkte Funktion, die auf einem beschränkten Intervall nicht Riemann-integrierbar ist.

0 Punkte

BITTE WENDEN!

Aufgabe 2 (Fragen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen und dynamischen Systemen)

a) Was ist eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung? Was ist eine Anfangswertaufgabe? Geben Sie eine einfache gewöhnliche Differentialgleichung an, mit welcher man Wachstums- und Zerfallsprozesse modellieren kann. Wie lautet ihre Lösung in Abhängigkeit von Parameter und Anfangswert?

b) Welcher zentrale Satz garantiert die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen? Unter welchen Bedingungen? Geben Sie auch ein Beispiel einer Anfangswertaufgabe an, in dem diese Bedingungen verletzt sind, sowie zwei verschiedene Lösungen dazu.

c) Erläutern Sie für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen die folgenden Begriffspaare: *linear – nichtlinear, autonom – nichtautonom, homogen – inhomogen.* Wie lautet das allgemeine lineare nichtautonome inhomogene System gew. Differentialgleichungen? Wann ist es eindeutig lösbar?

d) Was ist die Ordnung einer gewöhnlichen Differentialgleichung? Warum genügt es, sich auf Differentialgleichungssysteme erster Ordnung zu beschränken? Erläutern Sie, wie man aus einer Gleichung der Ordnung n ein System von n Gleichungen erster Ordnung gewinnt.

e) Geben Sie die Gleichung zweiter Ordnung des mathematischen Pendels mit Reibung an. Erläutern Sie die Bedeutung der auftretenden Parameter mithilfe einer Skizze und geben Sie ggf. Bedingungen an diese an. Formulieren Sie das äquivalente System erster Ordnung.

f) Erläutern Sie jeweils an einem skalaren Beispiel Ihrer Wahl die Lösungsmethoden *Trennung der Variablen* und *Variation der Konstanten.*

g) Warum ist die ausführliche Betrachtung linearer Systeme von gew. Differentialgleichungen wichtig? Wann ist die Lösung eines homogenen autonomen Systems besonders einfach? Kennen Sie Klassen von Systemmatrizen, bei denen sich das zugehörige Differentialgleichungssystem vollständig entkoppeln lässt?

h) Erläutern Sie die Begriffe *Integralkurve* und *Phasenkurve.* Fertigen Sie zu dem System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= 1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1, & x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

zwei Skizzen an, aus denen der Unterschied der Begriffe deutlich wird. Wie sieht das *Phasenportrait* dieses Systems aus?

i) Was ist ein stationärer Punkt eines Systems von gew. Differentialgleichungen? Warum spielen bei linearen Systemen die Eigenwerte und -vektoren der Systemmatrix eine so wesentliche Rolle? Erklären Sie in diesem Kontext die Begriffe *stabil (im Sinne von Ljapunov), instabil* und *asymptotisch stabil.* Geben Sie zu jedem der drei Begriffe ein einfaches ebenes autonomes System an, an dem die jeweilige Eigenschaft nach Ihren Erläuterungen direkt ablesbar ist.

j) Wie kann man die Stabilitätseigenschaften von stationären Punkten nichtlinearer Systeme analysieren? Was ist der zentrale Satz in diesem Zusammenhang?

k) Geben Sie ein Beispiel für eine skalare, von einem reellen Parameter abhängige Gleichung. Was versteht man unter einer *Verzweigung* oder *Bifurkation* von Lösungen? Was ändert sich in Bifurkationspunkten?

0 Punkte

BITTE WENDEN!

Aufgabe 3 (Fragen zum mehrdimensionalen Riemann-Integral)

a) Inwiefern unterscheidet sich die mehrdimensionale von der eindimensionalen Integration? (Denken Sie an die möglichen Integrationsgebiete!) Was ist ein mehrdimensionales Intervall? Wiederholen Sie die Konstruktion von Würfelsummen.

b) Wann heißt eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ Jordan-messbar? Was ist eine Jordan-Nullmenge? Geben Sie Beispiele. Wann kann man zwei Funktionen bzgl. ihres Integrals als gleich bezeichnen? Können Sie den Inhalt einer (quadrierbaren) Menge durch ein Integral ausdrücken?

c) Welche Bedingungen stellt man sinnvollerweise an eine Inhaltsfunktion, die bestimmten Mengen ein Maß oder einen Inhalt zuordnet? Erfüllt der Jordan-Inhalt diese Bedingungen? Erörtern Sie insbesondere kurz die Bewegungsinvarianz des Jordan-Inhalts.

d) Benennen Sie beispielhaft drei Sätze, die sich im Grunde unverändert aus der eindimensionalen Integralrechnung übertragen lassen.

e) Beschreiben Sie in Worten, was der wichtige *Satz von Fubini* leistet. Welche Voraussetzung an das Integrationsgebiet wird gefordert? Kennen Sie ein einfaches Beispiel für eine Funktion auf einem Rechtecksgebiet im $\mathbb{R}^2$, bei welchem die Integrationsreihenfolge *nicht* vertauschbar ist?

f) Formulieren Sie den Transformationssatz für Integrale im $\mathbb{R}^n$ mit Voraussetzungen. Welche Bedeutung hat die Jacobideterminante der Transformation anschaulich? Vergleichen Sie die Aussage des Transformationssatzes mit der der eindimensionalen Substitutionsregel. Für eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist es schwierig, eine geeignete Koordinatentransformation explizit anzugeben; welche einfachen speziellen Koordinatentransformationen im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ können Sie direkt angeben?

g) Auch beim Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$ gibt es den Begriff des uneigentlichen Integrals. Warum ist das dreidimensionale Integral

$$\int_{K_1^{(3)}(0)} \frac{1}{\|x\|_2^{\frac{3n}{n+1}}}\, dx$$

uneigentlich? Existiert es für alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$? Welche wesentlichen Schritte müssen Sie bei seiner Berechnung der Reihe nach durchführen? Welche Sätze kommen hierbei zum Einsatz?

0 Punkte

BITTE WENDEN!

Aufgabe 4 (Fragen zu Kurven und Flächen und zu den Integralsätzen)

a) Was ist eine Kurve im $\mathbb{R}^n$? Wie berechnet sich die Länge eines Kurvenstücks? Wann heißt eine solche Kurve *rektifizierbar*? Was besagt der Jordan'sche Kurvensatz? Geben Sie ein Beispiel für eine Kurve mit zwei verschiedenen Parametrisierungen. Was versteht man unter der Parametrisierung einer Kurve nach der Bogenlänge?

b) Geben Sie eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Parametrisierung des Randes des Quadrates $[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ an. Berechnen Sie die Länge dieser geschlossenen Kurve, d. h. den Umfang des Quadrates.

c) Wann heißt eine Funktion von beschränkter Variation? Welche Struktur trägt die Menge aller Funktionen von beschränkter Variation? Nennen Sie zwei Klassen von Funktionen, die dieser Menge angehören; wie ist jeweils deren totale Variation gegeben? Was hat dieser Begriff mit der Rektifizierbarkeit einer Kurve zu tun?

d) Wie sind der Tangenten- und der Normalenvektor an eine Kurve in einem Punkt definiert? Ändern sich diese Vektoren bei Übergang zu einer anderen Parametrisierung? Was ändert sich sicher nicht?

e) Wie ist die Krümmung einer Kurve definiert? Berechnen Sie die Krümmung des Einheitskreises sowie zweier weiterer Kreise um den Nullpunkt mit Radien 0.1 und 10. Was stellen Sie fest?

f) Definieren Sie die Begriffe *Kurvenintegral* und *Wegintegral*. Worin unterscheiden sich die Definitionen?

g) Was ist ein Vektorfeld? Wann heißt es *Gradientenfeld*? Was ist eine Potentialfunktion, was eine Stammfunktion? Wann ist ein Vektorfeld wirbelfrei? Geben Sie ein Beispiel für ein wirbelfreies Vektorfeld in $\mathbb{R}^2$, das kein Gradientenfeld ist.

h) Wann ist das Wegintegral über ein Vektorfeld vom gewählten Weg unabhängig? Was gilt in diesem Fall für geschlossene Wege?

i) Was ist eine *offene reguläre Fläche* bzw. eine *abgeschlossene Fläche* im $\mathbb{R}^3$? Welche Voraussetzungen muss die Parameterabbildung φ dabei erfüllen? Geben Sie drei verschiedene Möglichkeiten, die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ darzustellen.

j) Was ist eine Tangentialebene an eine Fläche im $\mathbb{R}^3$? Was ist der Normalenvektor? Was ist eine Tangente an eine Kurve im $\mathbb{R}^3$? Was ist hier die Normalenebene?

k) Definieren Sie das äußere Vektorprodukt $a \times b$ für zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$.

l) Wann heißt eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ orientierbar? Geben Sie ein Beispiel für eine nicht orientierbare Fläche an.

m) Wie berechnet sich der Inhalt einer (abgeschlossenen) Fläche im $\mathbb{R}^3$? Wie definiert man für eine parametrisierte Fläche im $\mathbb{R}^3$ das Flächenintegral? Berechnen Sie den Oberflächeninhalt einer halben Hohlkugel mit Radius 1.

n) Was ist ein Normalbereich im $\mathbb{R}^2$ bzw. ein Normalgebiet im $\mathbb{R}^3$? Geben Sie jeweils ein Beispiel, und finden Sie jeweils eine Menge, die diese Voraussetzungen nicht erfüllt, d. h. kein Normalbereich bzw. -gebiet ist.

o) Formulieren Sie den Integralsatz von Gauß mit Voraussetzungen in zwei und in drei Raumdimensionen. Machen Sie sich jeweils klar, was jeder einzelne Teil der Integralformeln bedeutet. Kennen Sie physikalische Anwendungen?

p) Wie lauten die Green'schen Formeln? Wozu sind sie z. B. im Kontext harmonischer Funktionen nützlich?

q) Formulieren Sie den Stokes'schen Integralsatz. Erklären Sie auch hier alle Bestandteile der Integralformeln. Kennen Sie wieder eine physikalische Anwendung?

0 Punkte

BITTE WENDEN!

Aufgabe 5 (Fragen zur Lebesgue'schen Integrationstheorie)

a) Definieren Sie das äußere Lebesgue-Maß. Wie unterscheidet es sich vom bereits bekannten Jordan-Maß? Welche Eigenschaften gelten für das äußere Lebesgue-Maß? Was ist eine Lebesgue-Nullmenge? Wie unterscheidet sich der Begriff von dem der Jordan-Nullmenge?

b) Was ist eine σ-Algebra? Geben Sie drei Beispiele von σ-Algebren in der Potenzmenge des $\mathbb{R}^n$.

c) Definieren Sie das Lebesgue-Maß und die Menge $\mathcal{L}_\mu$ aller Lebesgue-messbaren Mengen. Welche wichtigen Mengenfamilien umfasst $\mathcal{L}_\mu$?

d) Was ist eine Zerlegung einer Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ in (Lebesgue-)messbare Teilmengen? Worin besteht der Unterschied zu einer Zerlegung in quadrierbare (Jordan-)Teilmengen?

e) Definieren Sie für eine gegebene Funktion f die Ober- und Untersumme bzgl. einer Zerlegung in messbare Mengen. Formulieren Sie die Eigenschaft, welche dafür sorgt, dass Ober- und Untersummen von f endlich bleiben und konvergieren.

f) Definieren Sie im aktuellen Kontext die Begriffe Ober- und Unterintegral, und definieren Sie sodann den Lebesgue'schen Integralbegriff.

g) Welche Eigenschaften hat das Lebesgue-Integral? Inwiefern stellt es eine echte Erweiterung des Riemann-Integrals dar? Geben Sie ein Beispiel für eine Lebesgue-integrierbare Funktion, die nicht Riemann-integrierbar ist.

h) Was ist eine messbare Funktion?

i) Formulieren Sie den Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz sowie den Satz von Henri Lebesgue über majorisierte Konvergenz. Worin liegt die zentrale Bedeutung dieser beiden wichtigen Konvergenzaussagen (denken Sie an Vertauschungen von Grenzprozessen!)? Inwiefern hat daher das Lebesgue-Integral Vorteile gegenüber dem Riemann-Integral?

j) Formulieren Sie die Substitutionsregel und den Satz von Fubini im Kontext des Lebesgue-Integrals. Was besagt der Satz von Tonelli?

k) Definieren Sie für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den Begriff absolut-stetig. Wie reiht er sich in die Ihnen bekannten Stetigkeitsbegriffe ein?

0 Punkte