

Höhere Mathematik für Physiker 3

Vorlesung im Wintersemester 2013/14

Universität Heidelberg

PROF. DR. A. MARCINIAK-CZOCHRA

Letzte Aktualisierung: 27. Januar 2014

Dies ist eine vorläufige Version. Es können daher auf verschiedenen Ebenen noch Fehler enthalten sein. Fehlerkorrekturen sind willkommen.

Dieses Skriptum basiert auf:

Skript zur Analysis I-III, Vorlesung von Prof. Dr. Rolf Rannacher (zuletzt Wintersemester 2009/10 bis Wintersemester 2010/11), Universität Heidelberg

Skript zur Analysis I-III, Vorlesung von Prof. Dr. Willi Jäger (Wintersemester 2003/4 bis Wintersemester 2004/5), Universität Heidelberg

Analysis für Physiker, Vorlesungsskriptum von Prof. Dr. Rainer Weissauer (Sommersemester 2011 bis Wintersemester 2011/2012), Universität Heidelberg

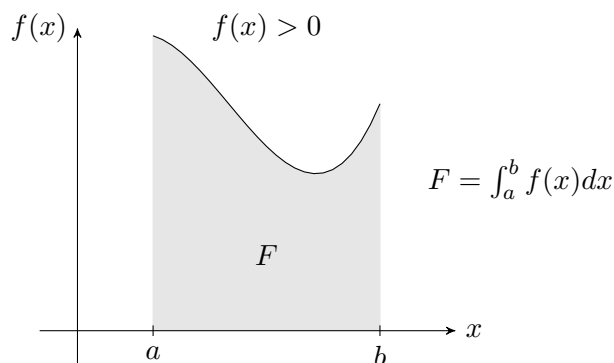
Mathematik für Physiker (Band 1-3), Helmut Fischer, Helmut Kaul, Vieweg-Teubner (Wiesbaden), 7. Auflage, 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Integration	2
1.1	Das Riemann'sche Integral	2
1.2	Berechnung von Integralen	8
	Integrationsformeln	9
	Integration rationaler Funktionen	10
1.3	Uneigentliche Integrale	12
1.4	Kurvenlänge	15
1.5	Integration und Grenzprozesse	17
1.6	Charakterisierung der Riemann-Integrabilität	20
2	Gewöhnliche Differentialgleichungen	23
2.1	Grundbegriffe	23
2.2	Konstruktion von Lösungen	25
	2.2.1 Geometrische Interpretation	25
	2.2.2 Methode der Trennung der Variablen	26
	2.2.3 Methode der Variation der Konstanten	27
2.3	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	28
2.4	Lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen	33
2.5	Asymptotisches Lösungsverhalten bei gewöhnlichen Differentialgleichungen	42
	Stabilität im Sinne von Lyapunov	44
	Stabilitätsanalyse autonomer linearer Differentialgleichungen	44
	Zusammenfassung für lineare Systeme	46
	Stabilitätsanalyse für nichtlineare Systeme	46
3	Das n-dimensionale Integral	53
3.1	Inhaltsmessung von Mengen in \mathbb{R}^n	53
3.2	Riemann-Integrale in \mathbb{R}^n	57
	Transformation von Integralen	61
3.3	Uneigentliches Riemann-Integral	64
3.4	Parameterabhängige Integrale	65
4	Integralsätze	67
4.1	Kurven in \mathbb{R}^n	67
4.2	Flächen in \mathbb{R}^3	74
4.3	Integralsatz von Gauß in \mathbb{R}^2	77
4.4	Integralsatz von Gauß in \mathbb{R}^3	79
4.5	Integralsatz von Stokes	80
5	Das Lebesgue Integral	82
5.1	Lebesgue-Maß und messbare Mengen.	82
5.2	Das Lebesgue-Integral	85
5.3	Konvergenzsätze	89
6	Grundlagen der Funktionentheorie*	91
6.1	Der Körper der komplexen Zahlen*	91
6.2	Holomorphe Funktionen; die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen*	92
6.3	Komplexe Kurvenintegrale*	94
6.4	Der Cauchy'sche Integralsatz*	96
6.5	Die Cauchy'schen Integralformeln*	99

1 Integration

Ziel dieses ersten Kapitels ist es, Grundlagen der Integrationstheorie zu vermitteln. Auf analytischer Seite kann die Integration als inverser Prozess zur Differentiation angesehen werden. Dies ist gerade die Aussage des Haupt- oder Fundamentalsatzes der Analysis. Geometrisch kann man für einfache Klassen von Funktionen, etwa stetige Funktionen, das (bestimmte) Integral einer (positiven) Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ interpretieren als den Flächeninhalt zwischen der reellen Achse und dem Funktionsgraphen (vgl. nachstehende Abbildung).



1.1 Das Riemann'sche Integral

Wir betrachten ein beschränktes Intervall $I := [a, b]$ und eine (endliche) Zerlegung Z von I , $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $a := x_0 < x_1 < \dots < x_n := b$. Wir bezeichnen $h := \max_{k=1, \dots, n} |x_k - x_{k-1}|$ als die *Feinheit* der Zerlegung.

Die Menge aller solchen Zerlegungen sei mit $\mathcal{Z}(a, b)$ bezeichnet. Eine *Verfeinerung* $Z' = \{x'_0, \dots, x'_m\} \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $m \geq n$ von $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ enthält die Zerlegungspunkte von Z und möglicherweise noch weitere. Es gilt $h' = \max_{k=1, \dots, m} |x'_k - x'_{k-1}| \leq h$. Für zwei Zerlegungen $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(a, b)$ besteht die gemeinsame Verfeinerung Z_{12} aus allen Unterteilungspunkten von Z_1 und Z_2 , und es ist $h_{12} \leq \min\{h_1, h_2\}$. Eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $|x_k - x_{k-1}| = h$ für alle $k = 1, \dots, n$ heißt „äquidistant“.

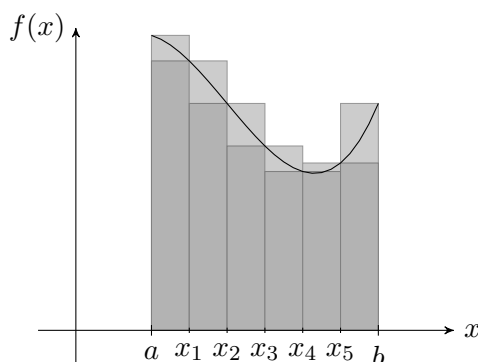
Definition 1.1 (*Ober- und Untersumme*) Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$. Wir setzen $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ für $i = 1, \dots, n$. Damit definieren wir die *Obersumme* der Funktion f bezüglich der Zerlegung Z mittels

$$\bar{S}_Z f(x) := \sum_{k=1}^n \sup_{x \in I_k} f(x) (x_k - x_{k-1}).$$

Völlig analog setzen wir für die *Untersumme* von f bezüglich Z :

$$S_Z f(x) := \sum_{k=1}^n \inf_{x \in I_k} f(x) (x_k - x_{k-1}). \quad (1)$$

Die nachstehende Abbildung veranschaulicht beide Näherungen an den exakten Flächeninhalt.



Definition 1.2 (*Ober- und Unterintegral*) Jede Ober- und Untersumme einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen, halboffenen oder abgeschlossenen Intervall I mit Endpunkten a und b hat einen festen endlichen Wert. Wir definieren nun das sog. Oberintegral von f auf I , indem wir zum Infimum über alle Obersummen zu beliebigen Zerlegungen $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ übergehen:

$$\int_a^{\overline{b}} f(x) dx := \inf_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} \overline{S}_Z f(x). \quad (2)$$

Analog definieren wir das Unterintegral von f auf I als das Supremum über alle Untersummen zu beliebigen Zerlegungen $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$:

$$\int_a^{\underline{b}} f(x) dx := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} \underline{S}_Z f(x). \quad (3)$$

Es ist nun nicht klar, ob bzw. für welche Klassen von Funktionen die so definierten Begriffe überhaupt sinnvoll sind. Diesbezügliche Aussagen liefert der folgende Hilfssatz.

Lemma 1.3 (i) Für eine beschränkte Funktion $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existieren das Oberintegral und das Unterintegral.

(ii) Sei (Z_n) eine Folge von Zerlegungen aus $Z_n \in \mathcal{Z}(a, b)$, $n \in \mathbb{N}$. Sei h_n die Feinheit von Z_n mit $h_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{Z_n} = \int_a^{\underline{b}} f(x) \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{Z_n}$.

Beweis:

(i) Sei $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ eine beliebige Zerlegung. \underline{S}_Z und \overline{S}_Z sind beschränkt, da $\inf_{x \in [a, b]} f(x) \cdot (b-a) \leq \underline{S}_Z \leq \overline{S}_Z \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x) \cdot (b-a)$. Die Existenz des Ober- und Unterintegrals folgt nun aus der Existenz von Supremum und Infimum beschränkter Zahlenmengen.

(ii) Sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus Elementen aus $\mathcal{Z}(a, b)$ mit $h_n \rightarrow 0$. Nach der Definition von Supremum und Infimum gilt:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists Z_\epsilon, Z^\epsilon \in \mathcal{Z}(a, b) : \int_a^{\underline{b}} f(x) dx \leq \underline{S}_{Z_\epsilon}(f) + \frac{\epsilon}{2}, \quad \overline{S}_{Z^\epsilon}(f) \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx + \frac{\epsilon}{2}.$$

Da nun Z_ϵ und Z^ϵ nur endlich viele Unterteilungspunkte haben und $h_n \rightarrow 0$ gilt, kann $n \in \mathbb{N}$ so groß gewählt werden, dass die Teilintervalle von Z_n die Zerlegungspunkte von Z^ϵ, Z_ϵ enthalten und insgesamt eine Länge $L < \frac{\epsilon}{2M}$ haben mit $M = \sup_{x \in I} |f(x)|$. Dann gilt $\underline{S}_{Z_\epsilon}(f) \leq \underline{S}_{Z_n}(f) + \frac{\epsilon}{2}$

und $\overline{S}_{Z_n}(f) \leq \overline{S}_{Z^\epsilon}(f) + \frac{\epsilon}{2}$, und daraus folgt $\int_a^{\underline{b}} f(x) dx \leq \underline{S}_{Z_n}(f) + \epsilon$ und $\overline{S}_{Z_n}(f) \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx + \epsilon$. \square

Definition 1.4 (*Riemann-Integral*) Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Sind Ober- und Unterintegral gleich, so heißt der gemeinsame Wert das (bestimmte) Riemann Integral von f über I

$$\int_a^{\underline{b}} f(x) dx = \int_a^{\overline{b}} f(x) dx = \int_a^{\overline{b}} f(x) dx,$$

und f wird Riemann-integrierbar genannt.

Ein oftmals nützliches Kriterium bei der Überprüfung der Riemann-Integrierbarkeit konkreter Funktionen oder auch bei theoretischen Argumentationen liefert der folgende Satz. Diesen sowie einige der folgenden Aussagen zitieren wir hier ohne Beweis. Nachzulesen sind die Beweise in nahezu jeder Quelle zur Einführung in die Analysis (siehe etwa die zu Beginn des Skriptums angegebene Literatur).

Satz 1.5 (*Riemann'sches Integrierbarkeitskriterium*) Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. f ist Riemann-integrierbar über I , wenn gilt:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists Z \in \mathcal{Z}(a, b) : |\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| < \epsilon.$$

Hierbei bezeichnen \overline{S}_Z und \underline{S}_Z natürlich zur Zerlegung Z gehörige Ober- und Untersummen.

Einen alternativen Zugang zum Riemann-Integral (neben den Ober- und Untersummen) ermöglicht der im folgenden definierte Begriff.

Definition 1.6 (*Riemann'sche Summe*) Für eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ wird die mit irgendwelchen Punkten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gebildete Summe $RS_Z(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ als eine Riemann'sche Summe von f zur Zerlegung Z bezeichnet. Es ist klar, dass Ober- und Untersummen spezielle Riemann'sche Summen darstellen.

Diese letzte Definition ermöglicht eine erste Charakterisierung der Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen:

Satz 1.7 Eine beschränkte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für alle Folgen $Z_n \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $h_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ alle zugehörigen Riemann'schen Summen gegen denselben Limes konvergieren, d. h. wenn gilt $RS_{Z_n}(f) \rightarrow \int_a^b f(x)dx$ für $n \rightarrow \infty$.

Allerdings liefert dieser Satz erneut kein handliches Kriterium, um über die Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion f zu entscheiden. Die Formulierung des Satzes deutet darauf hin, dass nicht alle beschränkten Funktionen automatisch Riemann-integrierbar sind, und in der Tat findet man Beispiele, die dies bestätigen. Man denke hierbei etwa an die charakteristische Funktion (oder Indikatorfunktion) der Menge $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ (sog. Dirichlet'sche Sprungfunktion), die beschränkt ist, jedoch nicht Riemann-integrierbar. Die folgenden beiden Sätze liefern nun Teilklassen der beschränkten Funktionen, für die man unmittelbar ihre Riemann-Integrierbarkeit zeigen kann.

Satz 1.8 *Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen sind Riemann-integrierbar.*

Beweis:

Auf dem kompakten Intervall I ist eine stetige Funktion auch gleichmäßig stetig, d. h.:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_\epsilon \in \mathbb{R}^+ \forall x, \tilde{x} \in I : |x - \tilde{x}| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| < \epsilon.$$

Für alle $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit Feinheit $h := \sup_{k=1, \dots, n} h_k < \delta_\epsilon$ gilt dann

$$|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| \leq \sum_{k=1}^n |\sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x)|(x_k - x_{k-1}) \leq \epsilon(b - a)$$

□

Satz 1.9 *Eine (beschränkte) monotone Funktion auf einem beschränkten Intervall I ist Riemann-integrierbar.*

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f monoton steigend. Dann gilt $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für $x \in I$ und

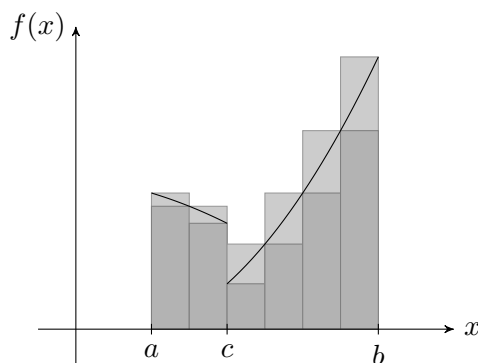
$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^n (\sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x))(x_k - x_{k-1}) \leq h \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = h(f(b) - f(a))$$

Wählt man zu vorgegebenem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ nun die Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ so fein, dass $h := \sup_{k=1, \dots, n} h_k < \epsilon$, so folgt: $|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| \leq \epsilon$ □

Satz 1.10 (Zusammengesetzte Integrale)

- (1) Eine (beschränkte) Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch über jedes Teilintervall $[a', b'] \subset [a, b]$ Riemann integrierbar. So gilt etwa für jeden Zwischenpunkt $c \in (a, b)$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
- (2) Ist eine (beschränkte) Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ für ein $c \in (a, b)$ über die Teilintervalle $[a, c]$ und $[c, b]$ Riemann-integrierbar, so ist sie auch über deren Vereinigung $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

Die Aussage dieses Satzes wird durch nachstehende Abbildung veranschaulicht.



Der Vollständigkeit halber definiert man für einpunktige Intervalle oder für Intervalle mit vertauschten Intervallendpunkten:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx := - \int_a^b f(x)dx$$

Satz 1.10 liefert nun die Möglichkeit, die Aussagen der Sätze 1.8 und 1.9 durch Interpretation auf Teilintervallen wesentlich zu verallgemeinern:

Korollar 1.11 Eine beschränkte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, die bezüglich der Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{Z}(a, b)$ von I stückweise stetig oder stückweise monoton ist, ist über I Riemann-integrierbar, und es gilt: $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$.

Wichtige Eigenschaften des Riemann-Integrals werden in folgenden beiden Sätzen festgehalten:

Satz 1.12 (Linearität des Riemannintegrals) Sind $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ (beschränkte) Riemann-integrierbare Funktionen, so ist auch $\alpha f + \beta g$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ über I Riemann-integrierbar und $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

Satz 1.13 (Monotonie des Riemannintegrals) Seien $f, g : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (beschränkte) Riemann-integrierbare Funktionen mit $g(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$ Dann auch $\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$

Korollar 1.14 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Riemann-integrierbare Funktion, und es gelte $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$. Daraus folgt dann die Beschränktheit des Integrals: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Beweis:

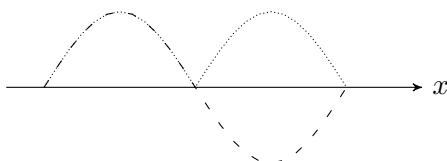
Wir wählen $g(x) = 1$, dann ist $\int_a^b g(x)dx = b-a$. Aus der Monotonie des Integrals folgt nun:

$$\underbrace{\int_a^b m dx}_{m(b-a)} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \underbrace{\int_a^b M dx}_{M(b-a)}$$

□

Korollar 1.15 Seien $f, g : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei (beschränkte) Riemann-integrierbare Funktionen, dann gilt:

- (1) $f_+ := \max(f, 0)$ und $f_- := -\min(f, 0)$ sind Riemann-integrierbar.
 (2) $|f|$ ist Riemann-integrierbar, und es gilt die Dreiecksungleichung: $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.



- (3) $|f|^p$ ist Riemann-integrierbar $\forall p \in [1, \infty)$.
 (4) $f \cdot g$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis:

- (1) Für alle $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \bar{S}_Z(f_+) - \underline{S}_Z(f_+) \leq \bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f), \\ 0 &\leq \bar{S}_Z(f_-) - \underline{S}_Z(f_-) \leq \bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f). \end{aligned}$$

d. h. f_+ und f_- sind auch integrierbar. Die erste Abschätzung wollen wir kurz begründen. $0 \leq \bar{S}_Z(f_+) - \underline{S}_Z(f_+)$ ergibt sich aus den Eigenschaften der Ober- und Untersumme. Der Rest folgt aus $\bar{S}_Z(f_+) - \bar{S}_Z(f) + \underline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f_+) = \bar{S}_Z(f_+ - f) + \underline{S}_Z(f - f_+) = -\bar{S}_Z(f_-) + \underline{S}_Z(f_-) \leq 0$.

- (2) Wegen $|f| = f_+ - f_-$ folgt die Integrierbarkeit von $|f|$ aus der von f_+ und f_- . Die Integralungleichung $|\int f dx| \leq \int |f| dx$ folgt wegen $f \leq |f|$, $-f \leq |f|$ aus der Monotonie der Riemann-Integrals, d. h. $\int f dx \leq \int |f| dx$, $-\int f dx \leq \int |f| dx \Rightarrow |\int f dx| \leq \int |f| dx$.
 (3) Sei $M := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Mit f ist auch $\frac{|f|}{M}$ Riemann-integrierbar. Wir brauchen also nur den Fall $0 \leq |f| \leq 1$ zu betrachten. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung bekommen wir für $0 \leq x < y \leq 1$:

$$y^p - x^p = p\xi^{p-1}(y - x) \quad \text{mit } \xi \in (x, y).$$

Daraus leitet man die Abschätzung

$$|y|^p - |x|^p \leq p(|y| - |x|)$$

her, was wegen $0 \leq \xi \leq 1$, $p \geq 1$ möglich ist. Für alle $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ gilt daher $\bar{S}_Z(|f|^p) - \underline{S}_Z(|f|^p) \leq p(\bar{S}_Z(|f|) - \underline{S}_Z(|f|))$, und daraus folgt die Integrierbarkeit von $|f|^p$.

- (4) Es gilt $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$, und daraus folgt (wegen Punkt (3) und der Linearität des Integrals) die Integrierbarkeit von fg . \square

Zur Integrierbarkeit von Produkten von Funktionen ist folgendes anzumerken: Im allgemeinen ist

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx,$$

wie man sich etwa durch Wahl von $f(x) = 1$ und $b - a \neq 1$ leicht klarmacht.

Korollar 1.16 (Definitheit des Riemannintegrals) Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$. Dann gilt: $\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0$.

Der folgende Satz ist sehr wichtig und besitzt zahlreiche Anwendungen und Verallgemeinerungen. Einen sehr einfachen Spezialfall behandeln wir direkt im Anschluss in einem Korollar.

Satz 1.17 (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Es seien $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und g habe in I keinen Vorzeichenwechsel. Dann gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in [a, b]$ sodass $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$.*

Beweis:

O.B.d.A sei $g \geq 0$. Aus der Stetigkeit von f auf dem Kompaktum $[a, b]$ folgt dann nach dem Satz vom Extremum, dass Konstanten m, M existieren mit $m := \min_{x \in I} f(x), M := \max_{x \in I} f(x)$. Dann gilt wegen $g \geq 0$:

$$m \int_a^b g dx \leq \int_a^b f g dx \leq M \int_a^b g dx. \quad (\star)$$

Wir definieren für $t \in [0, 1]$ eine lineare und damit stetige Funktion $\varphi(t) := (m(1-t) + Mt) \int_a^b g(x)dx$ (sog. Konvexkombination). Aus dem Zwischenwertsatz folgt wegen (\star) : Es existiert ein $\hat{t} \in [0, 1]$, sodass $\varphi(\hat{t}) = \int_a^b f g dx$. Wir setzen nun $\mu := (m(1-\hat{t}) + M\hat{t}) \in [m, M]$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $\mu = f(\xi)$. \square

Korollar 1.18 (1) *Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt mit einem $\xi \in I$: $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.*

(2) *Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$ und $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $g > 0$. Dann gilt:*

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

Anhand der folgenden Beispiele wollen wir verdeutlichen, dass man zur Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Voraussetzungen an f und g keinesfalls verzichten kann.

Beispiel: Stetigkeit von f

Sei $I = [0, 2]$. Sei $g \equiv 1$, und sei f unstetig gegeben als

$$f(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Es gilt dann, da f in keinem Punkt aus I den Wert $\frac{1}{2}$ annimmt:

$$\int_0^2 f(x)dx = 1 \neq f(\xi) \int_0^2 1 dx = f(\xi) \cdot 2 \quad \forall \xi \in [0, 2]$$

Beispiel: Positivität

Sei wieder $I = [0, 2]$. Sei $f(x) = x$ die Identität, und sei nun g abschnittsweise gegeben als

$$g(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Dann gilt, wobei $\xi \in [0, 2]$ beliebig variieren kann:

$$\int_0^2 f(x)g(x)dx = - \int_0^1 x dx + \int_1^2 x dx = 1 \neq f(\xi) \underbrace{\int_0^2 g(x)dx}_{=0} = 0$$

Diese Beispiele sollten als Warnung dienen. Wann immer man einen Satz anwenden möchte, empfiehlt es sich, zunächst zu prüfen, ob seine Voraussetzungen in der jeweils vorliegenden Situation überhaupt erfüllt sind.

1.2 Berechnung von Integralen

Definition 1.19 (*Unbestimmte Riemann-Integrale*) Eine Funktion $F : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *unbestimmtes Integral* (oder *Stammfunktion*) von $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, wenn F differenzierbar ist und wenn für alle $x \in I$ gilt $F'(x) = f(x)$. Zur Notation: Man bezeichnet das unbestimmte Integral mit $F(x) = \int f(x)dx$.

Der Begriff des unbestimmten Integrals ermöglicht es nun, den zentralen Satz der Integrationstheorie zu formulieren.

Satz 1.20 (*Fundamentalsatz der Analysis*)

- (1) Für eine stetige Funktion $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist das bestimmte Riemann-Integral $F(x) := \int_0^x f(y)dy$, $x \in [a, b]$, eine Stammfunktion von f . Jede weitere Stammfunktion von f unterscheidet sich von F nur durch eine Konstante.
- (2) Ist die Funktion $F : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion einer stetigen Funktion f , so gilt $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b := F(b) - F(a)$

Beweis:

- (1) Wir betrachten den Differenzenquotienten von $F(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(y)dy - \int_a^x f(y)dy \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)dy \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es für eine Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Punkte $\xi_n \in [x, x+h_n]$ mit

$$\frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = f(\xi_n)$$

Für $h_n \rightarrow 0$ konvergiert $\xi_n \rightarrow x$, und wegen der Stetigkeit von f folgt:

$$F'(x) = \lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = f(x)$$

Sei G eine weitere Stammfunktion von f , dann gilt $F' - G' = (F - G)' = 0$, das heißt $F - G$ ist konstant.

- (2) Sei F die Stammfunktion von f , $F'(x) = f(x)$. Mit der Funktion $G(x) := \int_a^x f(y)dy$, wobei $G(a) = 0$, ist nach (1) $F - G$ konstant

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = G(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Bemerkung:

Satz 1.20 liefert, dass Integration und Differentiation zueinander inverse Prozesse sind, d. h. dass gilt:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(y)dy \right) = f(x) \quad \text{und} \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)dy.$$

Aus den Regeln für die Differentiation bekommen wir nun analoge Regeln für die Integration und können auf diese Weise zu vielen elementaren Funktionen Stammfunktionen angeben:

- (1) $\int y^\alpha dy = \frac{1}{\alpha+1} y^{\alpha+1}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- (2) $\int (\sum_{k=0}^n a_k y^k) dy = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{k+1} a_k x^{k+1})$

$$(3) \int a^y dy = \int e^{y \ln(a)} dy = \frac{e^{y \ln(a)}}{\ln(a)} = \frac{a^y}{\ln(a)}$$

$$(4) \int \sin(y) dy = -\cos(y), \quad \int \cos(y) dy = \sin(y)$$

$$(5) \int \frac{1}{y} dy = \ln(|x|) \quad x \neq 0 \quad (\text{weil für } x > 0 : \ln'(x) = 1/x, \text{ für } x < 0 : \ln'(-x) = 1/x.)$$

$$(6) \int \frac{dy}{\cos^2(y)} dy = \tan(y), \quad \int \frac{dy}{\sin^2(y)} dy = -\cot(y)$$

$$(7) \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} dy = \arcsin(y) = -\arccos(y), \quad \int \frac{dy}{1+y^2} dy = \arctan(y)$$

Integrationsformeln

Der Fundamentalsatz der Analysis liefert auch einen Weg, konkrete Techniken zur Berechnung bestimmter Integrale zu entwickeln. Aus der Produkt- bzw. Kettenregel der Differentialrechnung entstehen so die Regel der *partiellen Integration* bzw. der *Substitution*, die wir in den folgenden Hilfssätzen präsentieren.

Lemma 1.21 (*Partielle Integration*) Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige, differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (fg)(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Beweis:

Integriert man die Produktregel der Differentialrechnung, so ergibt dies:

$$\int_a^b \underbrace{(fg)'(x)}_{fg'|_a^b} dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

□

Beispiel 1:

$$\int_a^b \underbrace{x}_f \underbrace{e^x}_{g'} dx = x \cdot e^x|_a^b - \int_a^b 1 \cdot e^x dx = be^b - ae^a - e^b + e^a$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} \int_a^b \underbrace{\sin^2(x)}_{f \cdot g'} dx &= -\sin(x) \cos(x)|_a^b + \int_a^b \cos^2(x) dx \\ &= -\sin(x) \cos(x)|_a^b + \int_a^b (1 - \sin^2(x)) dx \\ &= -\sin(b) \cos(b) + \sin(a) \cos(a) + (b - a) - \int_a^b \sin^2(x) dx \\ \implies \int_a^b \sin^2(x) dx &= \frac{\sin(a) \cos(a) - \sin(b) \cos(b) + (b - a)}{2} \end{aligned}$$

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} \int_a^b \underbrace{\ln(x) \cdot 1}_{f \cdot g'} dx &= x \ln(x)|_a^b - \int_a^b \frac{1}{x} dx \\ &= b \ln(b) - a \ln(a) + a - b \end{aligned}$$

Satz 1.22 (*Substitutionsregel*) Seien $f : I = [\varphi(a), \varphi(b)] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(y))\varphi'(y)dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

Beispiel:

$$\int_a^b \tan(y)dy = \int_a^b \frac{\sin(y)}{\cos(y)} dy$$

Wir wollen $\int_a^b \frac{\sin(y)}{\cos(y)} dy = \int_a^b f(\varphi(y))\varphi'(y)dy$, d. h. wir müssen entsprechende Funktionen f und φ finden. Für $f(x) = -\frac{1}{x}$ und $\varphi(y) = \cos(y)$ erhalten wir $\int_a^b \frac{\sin(y)}{\cos(y)} dy = \int_a^b \underbrace{-\frac{1}{\cos(y)}}_{f(\varphi(y))} \cdot (-\sin(y))dy$ Dann

bekommen wir

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sin(y)}{\cos(y)} dy &= - \int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{1}{x} dx \\ &= - \ln(|x|) \Big|_{\cos(a)}^{\cos(b)} \\ &= - \ln(|\cos(b)|) + \ln(|\cos(a)|) \end{aligned}$$

Beweis:

Sei $F : [\varphi(a), \varphi(b)] \rightarrow \mathbb{R}$ die Stammfunktion zu $f : [\varphi(a), \varphi(b)] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $F \circ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und nach der Kettenregel gilt:

$$(F \circ \varphi)'(y) = \underbrace{F'(\varphi(y))}_{f(\varphi(y))} \cdot \varphi'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y)$$

Also können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(y))\varphi'(y)dy &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(y)dy = (F \circ \varphi)(y) \Big|_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx. \end{aligned}$$

□

Integration rationaler Funktionen

Zur Integration von gebrochen rationalen Funktionen benötigen wir als weiteres Hilfsmittel die sogenannte Partialbruchzerlegung, die wir im folgenden als bekannt voraussetzen. Ferner bauen wir auf folgender Bemerkung auf.

Bemerkung:

Jede rationale Funktion

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_r x^r + \dots + a_0}{b_s x^s + \dots + b_0}$$

für $r < s$ lässt sich beschreiben als Summe von Partialbrüchen der folgenden zwei Typen, d. h. als Summe von Brüchen mit entweder konstantem oder linearem Zähler (wobei in beiden Fällen $n \geq 1$ gilt):

$$r_1(x) = \frac{A}{(x+a)^n}, \quad r_2(x) = \frac{B+Cx}{(x^2+2bx+c)^n}$$

Dies ist eine Folgerung aus der Produktzerlegung des Nennerpolynoms in reelle Faktoren mit Hilfe seiner Nullstellen. Im Nenner bleiben dabei nach Sätzen der Algebra maximal quadratische Faktoren stehen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \underbrace{\frac{A}{x-1}}_{r_1(x)} + \underbrace{\frac{\tilde{A}}{x+1}}_{\tilde{r}_1(x)} = \frac{A(x+1) + \tilde{A}(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ \implies 1 &= \underbrace{((A + \tilde{A})x)}_{=0} + \underbrace{A - \tilde{A}}_{=1} \\ \implies \frac{1}{x^2-1} &= \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \end{aligned}$$

Die Integration rationaler Funktionen lässt sich damit auf Faktorzerlegung, Ausführung von Partialbruchzerlegung und die Integration der speziellen Funktionen vom Typ r_1 und r_2 zurückführen. Allerdings ist allein bereits die Faktorzerlegung im Allgemeinen ein hochgradig nichttriviales Problem, das mit algebraischen und analytischen Methoden nicht lösbar ist.

Berechnung von $\int \frac{1}{(x+a)^n}$

Fall $n=1$: Wir sehen direkt oder mit Hilfe der Substitution $x+a=z$:

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln(|x+a|)$$

Fall $n \geq 2$: Wir sehen direkt oder erneut mit Hilfe der Substitution $x+a=z$:

$$\int \frac{1}{(x+a)^n} dx = \int (x+a)^{-n} dx = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}}$$

Berechnung von $\int \frac{B+Cx}{(x^2+2bx+c)^n} dx$

Das Polynom $\underbrace{x^2+2bx+c}_{=(x+b)^2+c-b^2}$ ist irreduzibel für $c-b^2 > 0$. Die Substitution $y = \frac{x+b}{c-b^2}$ ergibt dann

$$\int \frac{B+Cx}{(x^2+2bx+c)^n} dx = \int \frac{\tilde{B} + \tilde{C}y}{(y^2+1)^n} dy$$

wobei \tilde{B} und \tilde{C} neue Konstanten sind.

Die beiden Summanden $\int \frac{\tilde{B}}{(y^2+1)^n} dy$ und $\int \frac{\tilde{C}y}{(y^2+1)^n} dy$ werden getrennt integriert:

A: Berechnung von $\int \frac{y}{(y^2+1)^n} dy$

Fall $n=1$:

Es gilt mit der Substitution $z=y^2$ und $dz=2ydy$:

$$\int \frac{y}{y^2+1} dy = \int \frac{y}{z+1} \frac{dz}{2y} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{z+1} dz = \frac{1}{2} \ln(y^2+1)$$

Fall $n \geq 2$:

Mit derselben Substitution wie im Fall $n=1$ erhalten wir:

$$\int \frac{y}{(y^2+1)^n} dy = \frac{1}{2(1-n)(y^2+1)^{n-1}}$$

B: Berechnung von $\int \frac{1}{(y^2+1)^n} dy$

Fall $n = 1$: Es gilt $\int \frac{1}{y^2+1} dy = \arctan(x)$.

Fall $n \geq 2$:

Mit der Definition und Umformung

$$I_n := \int \frac{1}{(y^2+1)^n} dy = \int \frac{1}{(y^2+1)^{n-1}} dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^n} dy$$

erhalten wir die Rekursionsformel $I_n = I_{n-1} - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^n} dy$. Wir interpretieren den Integranden als Produkt aus $f(y) = y$ und $g'(y) = \frac{y}{(y^2+1)^n}$. Daraus folgt wie oben $g(y) = \frac{1}{2(1-n)(y^2+1)^{n-1}}$, und wir erhalten mit $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} - \frac{y}{2(1-n)(y^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{1}{(y^2+1)^{n-1}} dy \\ &= I_{n-1} \left(1 + \frac{1}{2(1-n)} \right) - \frac{y}{2(1-n)(y^2+1)^{n-1}} \\ &= \frac{3-2n}{2-2n} I_{n-1} - \frac{y}{2(1-n)(y^2+1)^{n-1}} \end{aligned}$$

Wir kennen $I_1 = \int \frac{1}{y^2+1} dy = \arctan(x)$, folglich können wir I_n sukzessive rekursiv für $n \geq 2$ berechnen.

1.3 Uneigentliche Integrale

Bislang haben wir Integrale stets für *beschränkte* Funktionen auf *kompakten* Intervallen definiert. Die Frage liegt nahe, ob Funktionen mit Singularitäten (wie etwa $\log(x)$, $\frac{1}{x}$ etc. in $(0, 1]$) integrierbar sind. Auch kann man sich dafür interessieren, ob bestimmte Funktionen auch auf unbeschränkten Intervallen noch ein endliches Integral besitzen. Derartige Fragen behandelt die Theorie uneigentlicher Integrale.

Uneigentliche Integrale für singuläre Funktionen

Wir nennen eine Funktion auf einem endlichen, halboffenen Intervall $(a, b]$ *lokal Riemann-integrierbar*, wenn sie auf jedem abgeschlossenem Teilintervall $[\tilde{a}, b] \subset (a, b]$ Riemann-integrierbar ist.

Satz 1.23 (*Uneigentliches Riemann-Integral (1)*) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf $(a, b]$, nicht aber auf dem Abschluss $[a, b]$ integrierbare Funktion. Existiert für jede konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (a, b]$ mit Grenzwert a der Limes

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{a_n \searrow a} \int_{a_n}^b f(x) dx,$$

so ist dieser unabhängig von der Wahl der Folge a_n und heißt *uneigentliches Integral von f über $[a, b]$*

Lemma 1.24 Sei $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $(a, b]$, aber nicht auf $[a, b]$ integrierbar. Wenn das uneigentliche Integral von $|f|$ über $[a, b]$ existiert, dann existiert auch das uneigentliche Integral von f über $[a, b]$, und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Bemerkung:

Die Umkehrung der letzten Aussage ist nicht richtig. Bei uneigentlichen Riemann-Integralen muss (wie bei Reihen) zwischen *einfacher* und *absoluter* Konvergenz unterschieden werden.

Beispiel (nicht existierendes uneigentliches Integral):

$$\int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \ln(b-a) - \ln(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow \infty} \infty$$

Das heißt, das uneigentliche Integral über $[a, b]$ existiert nicht.

Beispiel:

Sei $\mu > 0, \mu \neq 1$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\mu} &= \frac{1}{1-\mu} \frac{1}{(x-a)^{\mu-1}} \Big|_{a+\epsilon}^b \\ &= \frac{1}{1-\mu} \left(\frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} - \frac{1}{\epsilon^{\mu-1}} \right) \begin{cases} = \infty & \text{für } \mu > 1 \\ < \infty & 0 < \mu < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Bemerkung (Cauchy-Hauptwert):

Es gilt

$$\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} = \ln(|x|) \Big|_{-1}^{-\epsilon} = \ln(\epsilon) \quad \text{und} \quad \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} = \ln(x) \Big|_{\epsilon}^1 = -\ln(\epsilon),$$

und daraus folgt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = 0.$$

Die letzte Zeile ist der Cauchy Hauptwert $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$.

Uneigentliche Integrale auf unendlichen Intervallen

Bisher wurden uneigentliche Integrale auf beschränkten Intervallen betrachtet. Der Grenzprozess ergab sich dabei aus der Tatsache, dass eine Funktion auf einem (halb-) offenen Intervall integrierbar ist, jedoch nicht zwingend auf dem Abschluss des Intervalls. Im Folgenden werden wir uneigentliche Integrale auf unbeschränkten Intervallen betrachten. Hier ergibt sich der Grenzprozess daraus, dass (mindestens) eine der Integrationsgrenzen gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ läuft. Statt wie im vorigen Abschnitt die Integrierbarkeit auf (halb-) offenen Intervallen zu fordern, fordern wir hier die Integrierbarkeit auf kompakten Teilmengen (sog. lokale Integrierbarkeit).

Satz 1.25 (*Uneigentliches Riemann-Integral (2)*) Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion. Wenn für jede Folge von Punkten $b_n \in [a, \infty)$ mit $b_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ der Limes existiert, d.h. $\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b_n \rightarrow \infty} \int_a^{b_n} f(x) dx$, so ist dieser unabhängig von der Wahl der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und heißt das uneigentliche Integral von f über $[a, \infty)$.

Bemerkung: Dieser Satz ist die Entsprechung zu Satz 1.23.

Lemma 1.26 Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Wenn das uneigentliche Integral von $|f|$ über $[a, \infty)$ existiert, so existiert auch das uneigentliche Integral von f über $[a, \infty)$ und es gilt $|\int_a^\infty f(x) dx| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx$

Bemerkung: Dieses Lemma ist die Entsprechung zu Lemma 1.24.

Satz 1.27 Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ in $[a, \infty)$ integrierbar mit

$$\sup_{x \geq a} \left| \int_a^x f(\xi) d\xi \right| = M < \infty$$

Ferner sei $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ differenzierbar und monoton gegen Null fallend, dann existiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(\xi) g(\xi) d\xi = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(\xi) g(\xi) d\xi$$

Beweis: Das Produkt aus $f \circ g$ ist lokal integrierbar in $[a, \infty)$. Das Integral $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$ ist die Stammfunktion von f . Für $a < x < \infty$ erhalten wir durch partielle Integration $\int_a^x f(\xi)g(\xi)d\xi = F(\xi)g(\xi)|_a^x - \int_a^x F(\xi)g'(\xi)d\xi$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig. Dann existiert $\beta_\epsilon > a$, sodass $g(x) < \frac{\epsilon}{2M}$ für $x \geq \beta_\epsilon$. Für beliebige $\beta \geq \alpha \geq \beta_\epsilon$ folgt damit wegen $g' \leq 0$

$$\int_\alpha^\beta F(\xi)g'(\xi)d\xi \underset{\substack{\leq \\ \text{aus Annahme für } f}}{\leq} M \int_\alpha^\beta |g'(\xi)|d\xi \leq -M \int_\alpha^\beta g'(\xi)d\xi = -Mg(\xi)|_\alpha^\beta \leq \epsilon$$

Aus dem Cauchy-Kriterium folgt die Konvergenz von $\int_a^x F(\xi)g'(\xi)d\xi$ für $x \rightarrow \infty$. Wir bekommen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(\xi)g(\xi)d\xi = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{F(x)g(x) - F(a)g(a)}_{=0} - \int_a^\infty F(\xi)g'(\xi)d\xi$$

□

Bemerkung: Die benötigte Version des Cauchy-Kriteriums lautet: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein C gibt, sodass für alle $x_1, x_2 > C$ gilt: $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Der Beweis erfolgt analog zum Cauchy-Kriterium für Folgen bzw. Reihen.

Satz 1.28 Sei $f : [n_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, positive, monoton fallende Funktion. Dann gilt:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) < \infty \Leftrightarrow \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx < \infty$$

Beispiel:

Wir haben $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Rightarrow \int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2}$. Da die Funktion $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ auf $[2, \infty)$ positiv und monoton fallend ist, folgt nach Satz 1.28 die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k} < \infty$.

Beispiel:

Betrachte $f(x) = x^{-\mu}$ auf $[1, \infty)$ für $\mu > 0$. Für $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\int_1^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{dx}{x^\mu} = \frac{1}{(1-\mu)x^{\mu-1}} \Big|_1^{\frac{1}{\epsilon}} = \frac{1}{1-\mu} \left(\frac{1}{\epsilon^{1-\mu}} - 1 \right).$$

Damit folgt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\mu} < \infty \iff \mu > 1$$

Beweis von Satz 1.28:

(i) Die Reihe sei konvergent. Wegen der Monotonie von f gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$:

$$\begin{aligned} \int_{n_0}^{n+1} f(x)dx &= \sum_{k=n_0}^n \int_k^{k+1} f(x)dx \\ &\leq \sum_{k=n_0}^n f(k) \quad (\text{Monotonie von } f) \\ &\leq \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \end{aligned}$$

\Rightarrow Es existiert das uneigentliche Integral über $[n_0, \infty)$.

(ii) Das uneigentliche Integral existiere für alle $n \geq n_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^n f(k) &= f(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k+1) \\ &\leq f(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \quad (\text{Monotonie von } f) \\ &\leq \int_{n_0}^{\infty} f(x) dx + f(n_0) \end{aligned}$$

\Rightarrow Die Reihe ist konvergent.

□

Beispiel:

Aus Satz 1.27 folgt die Existenz von Integralen

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad \int_a^{\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$$

für $a > 0$, wobei $f(x) := \sin(x)$ (bzw. $f(x) = \cos(x)$) und $g(x) = \frac{1}{x}$. Ebenso erhalten wir die Existenz von $\int_2^{\infty} \frac{\sin(x)}{\ln(x)} dx$.

1.4 Kurvenlänge

Eine Anwendung von Integralen ist die Bestimmung der Länge sogenannter 'ebener Kurven'. Wir werden in diesem Abschnitt die Kurvenlänge, basierend auf der Länge eines Polygonzuges, durch einen Grenzprozess definieren. Dieser Prozess verdeutlicht, wie Summen über im Grenzprozess infinitesimale Größen Integralen entsprechen.

Definition 1.29 Es seien φ, ψ zwei stetige Funktionen eines Parameters $t \in [a, b]$. Sind die Punkte der Ebene $(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in [a, b]$ alle verschieden, so nennt man die Punktmenge

$$\Gamma := \{(\varphi(t), \psi(t)), t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$$

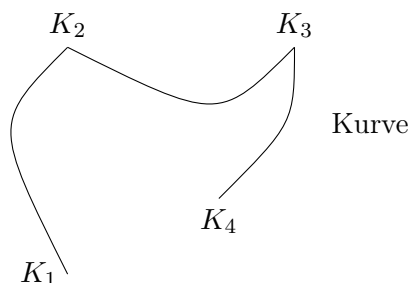
ein ebenes Kurvenstück mit der Parameterdarstellung $\{\varphi, \psi\}$.

Bemerkung:

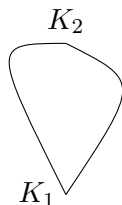
Der Graph

$$G(f) = \{(t, f(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, t \in [a, b]\}$$

einer stetigen Funktion f über einem Intervall $[a, b]$ ist in diesem Sinne ein ebenes Kurvenstück mit der Parameterdarstellung $\varphi(t) := t$, $\psi(t) := f(t)$, $t \in [a, b]$.



Eine ebene Kurve k ist definiert als Aneinanderfügung von endlich vielen Kurvenstücken k_1, \dots, k_n (vgl. obenstehende Abbildung). Hierbei besitzt $k_i = \{(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in [t_i, t_{i+1}] \subset [a, b]\}$ die Endpunkte $K_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$ und $K_{i+1} = (\varphi(t_{i+1}), \psi(t_{i+1}))$. Die Kurvenstücke werden nun aneinandergefügt in dem Sinne, dass der Anfangspunkt K_i des Kurvenstücks k_i für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ mit dem Endpunkt des Kurvenstücks k_{i-1} zusammenfällt. Den Spezialfall einer geschlossenen Kurve erhalten wir, wenn der Anfangspunkt K_1 von k_1 und der Endpunkt K_{n+1} von k_n übereinstimmen (vgl. die folgende Abbildung).



Wir wollen nun die Länge eines Kurvenstückes k_i bestimmen. Die Länge eines Kurvenstückes k_i bezeichnen wir dabei mit $|k_i|$. Für die Länge der Gesamtkurve k gilt dann: $|k| = \sum_{i=1}^n |k_i|$, d. h. die Gesamtlänge einer Kurve entsteht durch Addition der Längen der Kurvenstücke. Wir approximieren das Kurvenstück k_i durch einen *Polygonzug* $P_Z(\Gamma)$ zu den Stützpunkten $(\varphi(t_k), \psi(t_k))$ für $k = 0, \dots, n$. Dabei ist $Z = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{Z}(a, b)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit Feinheit $h = \max_{k=1, \dots, n} (t_k - t_{k-1})$. Die Länge $|P_Z(\Gamma)|$ berechnet sich durch die Summe der Längen eines linearen Teilstückchens

$$|P_Z(\Gamma)| := \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2}$$

Definition 1.30 *Haben die Längen aller Polygonzüge $P_Z(\Gamma)$ zu einem Kurvenstück Γ eine (endliche) obere Grenze, so heißt Γ rektifizierbar mit der Länge*

$$|\Gamma| := \sup_{z \in \mathcal{Z}(a, b)} |P_z(\Gamma)|$$

Satz 1.31 (Kurvenlänge) *Ist die Parameterdarstellung des Kurvenstückes Γ stetig differenzierbar, so ist es rektifizierbar und seine Länge ist gegeben durch*

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

Beispiel:

Wir bestimmen mit Hilfe des Satzes die Länge des Einheitskreisbogens K :

- (1) Wir wählen zunächst die Parameterdarstellung $\varphi(t) = \sin(t), \psi(t) = \cos(t)$. Für $t \in [0, 2\pi]$ durchläuft dann der Punkt $(\sin(t), \cos(t))$ wegen $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ den genannten Kreisbogen K genau einmal, daher gilt

$$|K| = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

- (2) Als alternative Parameterdarstellung der betrachteten Kurve betrachten wir

$$\varphi(t) = t, \quad \psi(t) = \sqrt{1-t^2} \quad t \in [-1, 1]$$

Auf diese Weise parametrisieren wir nur den oberen Halbkreis, und die Ableitung von ψ , $\psi'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ wird für $t \rightarrow \pm 1$ singularär. Wir können daher die Formel nicht direkt anwenden. Es ergibt sich ein uneigentliches Integral, das wir durch Ausschneiden von ϵ -Kugeln um die kritischen Punkte -1 und 1 annähern:

$$\begin{aligned} |K_\epsilon| &= \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \\ &= \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \arcsin(x) \Big|_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \\ &= \arcsin(1-\epsilon) - \arcsin(\epsilon-1) \end{aligned}$$

Da der Arcussinus auf dem ganzen Intervall $[-1, 1]$ definiert und stetig ist, können wir $\epsilon \rightarrow 0$ gehen lassen. Damit ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
|K| &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \arcsin(1) - \arcsin(-1) \\
&= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Diese Beziehung könnte zur Definition der Zahl π verwendet werden.

1.5 Integration und Grenzprozesse

Wir haben bereits früher Sätze kennen gelernt, bei denen es um die Vertauschung gewisser Grenzprozesse ging. So behandelt etwa Satz 3.29 aus dem Skript zur Vorlesung HöMa2 die gleichmäßige Konvergenz von Folgen stetiger Funktionen und liefert damit die *Banachraum*struktur des Raumes $C([a, b], \|\cdot\|_\infty)$, und Satz 4.85, ebenfalls im HöMa2-Skript, liefert ein Kriterium zur Vertauschbarkeit von Ableitung und Limesbildung. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir im Folgenden die genannten Aussagen.

Einschub: Wiederholung zentraler Vertauschungssätze aus HöMa2

(1) Stetigkeit und Grenzprozesse

Satz 3.29 des HöMa2-Skriptes: Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C[a, b]$ gleichmäßig gegen eine Funktion f , gilt also $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) bzw. $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)), so ist f stetig. \square

Das heißt, Stetigkeit bleibt unter gleichmäßiger Konvergenz erhalten. Das gilt *nicht* für punktweise Konvergenz. Aus diesem Satz ergibt sich ebenfalls, dass $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ ein vollständiger normierter Raum ist, ein sogenannter *Banachraum*.

(2) Differenzierbarkeit und Grenzprozesse

Hier liegen die Dinge, zumindest in den reellen Zahlen, ungleich komplizierter. Man kann verschiedene Arten von Pathologien erzeugen:

- i) Eine gleichmäßig konvergente Folge differenzierbarer Funktionen mit nicht differenzierbarem Limes, etwa

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & |x| \leq \frac{1}{n} \\ |x| & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Diese Folge konvergiert gleichmäßig gegen die in $x_0 = 0$ nicht differenzierbare Betragsfunktion $f(x) = |x|$.

- ii) Eine Folge differenzierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion konvergiert, aber die Folge der Ableitungen konvergiert nicht, etwa $f_n(x) = \frac{\sin(n^2x)}{n}$. Diese Folge konvergiert gleichmäßig gegen 0, aber $f'_n(x) = \cos(n^2x)$ divergiert für $x = k\pi$.
- iii) Eine Folge differenzierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion konvergiert, die Folge der Ableitungen konvergiert (wenn auch nicht gleichmäßig), aber nicht gegen die Ableitungen der Grenzfunktion. Hier hat man etwa das folgende Beispiel: Sei $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = x - \frac{x^n}{n} \rightarrow f(x) = x$, daher $f'(x) = 1$, aber $f'_n(x) = 1 - x^{n-1}$ mit $f'_n(1) = 0$ für alle n , daher $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) = 0 \neq 1 = f'(1)$.

Satz 4.85 des HöMa2-Skriptes: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf einem beschränkten Intervall I , die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Ist die Folge der Ableitungen $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion f^* , so ist auch f differenzierbar, und es gilt: $f' = f^*$, das heißt: Differentiation und Limes sind vertauschbar:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n.$$

\square

Wir formulieren nun eine analoge Frage für Integrationsprozesse, das heißt uns interessiert, wann Integration mit Limesbildung vertauscht. Wann gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \quad \left(= \int_a^b f(x) dx \right)?$$

Wir versuchen es zunächst mit punktweiser Konvergenz, das heißt $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Man findet hier leicht ein Gegenbeispiel, etwa die Folge

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad x \in [0, 1]$$

Es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$ und somit weiterhin: $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$.

Außerdem ist $F_n(x) = -\frac{1}{2}e^{-nx^2}$ eine Stammfunktion zu $f_n(x)$ (Beweis durch Ableitung), also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-nx^2} \right) \Big|_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-n} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Es folgt, dass Integration mit punktweise konvergenten Grenzprozessen nicht vertauschbar ist.

Als nächstes betrachten wir die gleichmäßige Konvergenz für Folgen stetiger Funktionen. Tatsächlich liefert dies das folgende einfache Kriterium für Vertauschbarkeit von Integration und Limesbildung:

Satz 1.32 Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C[a, b]$ stetiger (und damit Riemann-integrierbarer) Funktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion f . Dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig (also Riemann-integrierbar), und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Beweis:

Dass f stetig ist, folgt aus dem eingangs bereits referenzierten Satz 3.29 aus Höma2. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b f_n(x) - f(x) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\rightarrow 0} |b - a| \end{aligned}$$

Somit impliziert die gleichmäßige Konvergenz ($\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ für $(n \rightarrow \infty)$), dass

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \rightarrow 0 &\Leftrightarrow \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

□

Wir formulieren nun einen entsprechenden Satz für Reihen.

Satz 1.33 Für eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C[a, b]$ konvergiere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf $I = [a, b]$ gleichmäßig. Dann stellt die Reihe eine integrierbare Funktion dar und es gilt:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Das heißt man darf die Reihe gliedweise integrieren.

Beweis:

Sei $g_k = \sum_{n=1}^k f_n$, das heißt $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist die zugehörige Partialsummenfolge. Gleichmäßige Konvergenz der Reihe bedeutet gleichmäßige Konvergenz von $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Dann bezeichnet die Reihe $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ eine stetige und somit integrierbare Funktion. Es gilt:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^k \int_a^b f_n(x) dx + \int_a^b \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) dx$$

Hierbei können wir aufgrund der Endlichkeit der Summe sowie der Linearität des Integrals im ersten Term der rechten Seite Integral und Summe vertauschen. Da die Reihe gleichmäßig konvergiert, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $k_\epsilon \in \mathbb{N}$, sodass für $k \geq k_\epsilon$ gilt

$$\left| \int_a^b \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) dx}_{\leq \epsilon} \right| < \epsilon(b-a)$$

Daraus folgt die Konvergenz:

$$\left| \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx - \sum_{n=1}^k \int_a^b f_n(x) dx \right| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

□

Im vergangenen Semester haben wir Potenzreihen als innerhalb ihres zugehörigen Konvergenzkreises absolut (und somit auch gleichmäßig) konvergente Funktionenreihen kennengelernt. Es ergibt sich für Potenzreihen der folgende Satz (ohne Beweis):

Satz 1.34 Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ habe den Konvergenzradius $\rho > 0$, das heißt sie stelle auf $I = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ eine stetige Funktion dar. Deren Stammfunktion erhält man nun durch gliedweise Integration. Es ergibt sich so eine gliedweise integrierte neue Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius $\rho > 0$:

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} + c$$

Bemerkung:

Die Aussage von Satz 1.32 lässt sich verallgemeinern auf uneigentliche Integrale auf beschränkten Integrationsintervallen, das heißt mit einer Singularität der Integrandenfunktion. Hingegen reicht für uneigentliche Integrale auf unbeschränkten Integrationsintervallen die gleichmäßige Konvergenz der approximierenden Folge im Allgemeinen *nicht* aus.

Beispiel:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 0 \leq x \leq n \\ 0, & x > n \end{cases}$$

Auf $[0, \infty)$ konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f(x) = 0$, aber es gilt

$$\int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{1}{n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 1$$

Es stellt sich die Frage nach allgemeineren Kriterien als dem der gleichmäßigen Konvergenz aus Satz 1.32. In der Tat gibt es derartige Kriterien, die aber erst im Rahmen der Theorie des *Lebesgue-Integrals* ihre volle Stärke entfalten. Dort besteht keine Notwendigkeit mehr, zwischen eigentlichen und uneigentlichen Integralen zu unterscheiden, und mit den beiden großen Konvergenzsätzen

- 1) Satz von der monotonen Konvergenz (Beppo Levi)
- 2) Satz von der majorisierten Konvergenz (Henri Lebesgue)

hat man zwei sehr mächtige Werkzeuge, um über Vertauschung von Integration und Limesbildung zu entscheiden.

1.6 Charakterisierung der Riemann-Integrabilität

Aus den vorausgehenden Abschnitten ist bereits bekannt, dass stetige Funktionen sowie monotone beschränkte Funktionen Riemann-integrierbar sind. Ferner lässt sich aufgrund der Additivität des Integrals auf Teilintervallen der Begriff der Riemann-Integrierbarkeit auf stückweise stetige bzw. monotone und beschränkte Funktionen übertragen, falls die Anzahl der Unterteilungspunkte endlich ist (man denke etwa an Treppenfunktionen). In diesem Abschnitt wollen wir versuchen, den Begriff der Riemann-Integrierbarkeit vollständig zu charakterisieren. Dazu lassen wir im Folgenden auch (abzählbar) unendliche Ausnahmemengen zu, in denen die betrachtete Funktion unstetig sein darf.

Bemerkung:

Aufgrund der Linearität des Riemann-Integrals ist klar, dass auf $[a, b]$ die Riemann-integrierbaren Funktionen einen Vektorraum bilden, den wir im Folgenden mit $R[a, b]$ bezeichnen.

Definition 1.35 Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt (Lebesgue-)Nullmenge, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ höchstens abzählbar viele Intervalle I_k existieren, sodass

$$M \subset \bigcup_k I_k \text{ sowie } \sum_k |I_k| \leq \epsilon.$$

Das Mengensystem der I_k heißt abzählbare Überdeckung von M . Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt eine Eigenschaft (etwa Stetigkeit oder Differenzierbarkeit) fast überall, wenn die Ausnahmemenge (d.h. die Menge, auf der die Eigenschaft nicht gilt) eine Nullmenge ist (das heißt, sie ist höchstens abzählbar).

Zur Gewöhnung an die eben eingeführten Begriffe zeigen wir drei nützliche Eigenschaften von Nullmengen.

Lemma 1.36 i) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.

ii) Endliche und abzählbare Teilmengen von \mathbb{R} sind Nullmengen.

iii) Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

Beweis

i) Sei M eine Nullmenge $\Rightarrow M \subset \bigcup_k I_k$ und $\sum_k |I_k| < \epsilon$. Dann können wir einfach schreiben: $N \subset M \Rightarrow N \subset M \subset \bigcup_k I_k$ mit $\sum_k |I_k| < \epsilon$. Daher ist $N \subset M$ eine Nullmenge.

ii) Sei $M \subset \mathbb{R}$ endlich oder abzählbar. Für $\epsilon > 0$ beliebig ist jedes $x_k \in M$ Mittelpunkt eines Intervalls $I_k = [x_k - \frac{\epsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}]$. Es gilt:

$$M \subset \bigcup_k I_k \text{ mit } \sum_k |I_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 1 \right) = \epsilon \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) = \epsilon$$

iii) Seien $\{M_k\}$ höchstens abzählbar viele Nullmengen. Für $\epsilon > 0$ beliebig kann man jedes konkrete M_k durch höchstens abzählbar viele Intervalle (I_{kl}) überdecken, sodass

$$\sum_l |I_{kl}| \leq 2^{-k} \epsilon.$$

Dann überdecken alle Mengen $(I_{kl})_{k,l=1}^{\infty}$ auch die Vereinigung $\bigcup_k M_k$ und es gilt:

$$\sum_{k,l} |I_{kl}| = \sum_k \left(\sum_l |I_{kl}| \right) \leq \sum_k \frac{\epsilon}{2^k} \leq \epsilon$$

□

Im Folgenden werden wir eine neue Charakterisierung des Kompaktheitsbegriffes kennen lernen. Bislang kennen wir die *Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft*, die besagt, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge enthält (sog. *Folgenkompaktheit*). Diese formulieren wir als Satz:

Satz 1.37 (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen ist und jede unendliche Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ einen Häufungspunkt $x \in M$ hat.*

Damit kann man in *endlich-dimensionalen* Räumen zeigen, dass die kompakten Teilmengen gerade die abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen sind. Wir werden nun sehen, dass Kompaktheit durch eine Überdeckungseigenschaft charakterisiert werden kann. Dieser folgende Satz von Heine-Borel wird uns nützlich sein, da wir auch Nullmengen anhand einer Überdeckungseigenschaft charakterisiert haben.

Satz 1.38 (Überdeckungssatz von Heine-Borel) *$M \subset \mathbb{R}$ ist kompakt genau dann, wenn jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung enthält.*

Beweis: \Rightarrow : Sei M kompakt. Angenommen, es gäbe eine Überdeckung $\{U\}$ von M durch offene Mengen ohne eine endliche Teilüberdeckung. M ist beschränkt, also gibt es ein $I_0 = [a, b]$ mit $M \subset I_0$. Nun enthält mindestens eine Hälfte von I_0 (genannt I_1) eine Teilmenge von M , die sich nicht endlich überdecken lässt. Fortsetzung dieser Konstruktion ergibt eine Intervallschachtelung

$$I_n \subset I_{n-1} \subset \dots \subset I_1 \subset I_0 \text{ mit } |I_n| \leq 2^{-n} \cdot |I_0|$$

Hierbei kann keine der Mengen I_k endlich überdeckt werden. Laut Intervallschachtelungsprinzip existiert genau ein $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$. Für $x_n \in I_n \cap M$ beliebig gilt $|x_n - x| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), das heißt $x \in M$ wegen der Abgeschlossenheit von M . Also gibt es ein $U \in \{U\}$ mit $x \in U$. Da U offen ist, gibt es ein $I_\epsilon = [x - \epsilon, x + \epsilon]$ mit $I_\epsilon \subset U$. Ferner gilt $I_m \subset I_\epsilon$ für ein $m \in \mathbb{N}$, und damit auch

$$M \cap I_m \subset I_m \subset I_\epsilon \subset U$$

Also wird $M \cap I_m$ durch $U \in \{U\}$ überdeckt, was aber der Konstruktion der I_m widerspricht. ζ

\Leftarrow : Jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ eine unendliche Folge. Wir müssen zeigen, dass sie einen Häufungswert in M besitzt. Angenommen, keine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat einen Limes in M . Ist nun $y \in M$ beliebig, so gibt es eine Umgebung $U_\epsilon(y)$, sodass $x_n \in U_\epsilon(y)$ für nur endlich viele n gilt. Das System aller $U_\epsilon(y)$, $y \in M$, überdeckt M , das heißt es gibt bereits endlich viele y_j mit $M \subset \bigcup_j U_\epsilon(y_j)$ nach Voraussetzung. Also gilt $x_n \in \bigcup_j U_\epsilon(y_j) \supset M$ nur für endlich viele n , im Widerspruch zur ursprünglichen Annahme, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ eine unendliche Folge ist. ζ □

Beispiel:

Wichtig ist, dass wirklich *jede* offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat. Sei etwa $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Jedes offene Intervall $I = (a, b)$ mit $a < 0$, $b > 1$ überdeckt M . Aber die Überdeckung durch $\{U_n\}$ mit $U_n = (\frac{1}{n} - \frac{1}{10n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{10n})$ besitzt *keine* endliche Teilüberdeckung. M ist auch nicht kompakt, da der Häufungspunkt 0 nicht enthalten ist! Betrachtet man hingegen $M \cup \{0\}$, so erhält man eine kompakte Menge. Hier gibt es auch wieder eine endliche Teilmenge von $\{U_n\}$: Eine beliebige offene Menge U mit $0 \in U$ enthält unendlich viele Glieder der Nullfolge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$. Die endlich vielen Folgenglieder außerhalb werden durch endlich viele Elemente von $\{U_n\}$ überdeckt.

Wir kommen nun abschließend zum zentralen Satz dieses Abschnitts, der zugleich den Riemann'schen Integralbegriff vollständig charakterisiert. Die volle Äquivalenz zu zeigen ist sehr aufwändig, daher beschränken wir uns im folgenden Beweis auf die Richtung, deren Herleitung noch vergleichbar einfach einzusehen ist.

Satz 1.39 (Satz von Lebesgue) *Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist in $R[a, b]$ (Raum der Riemann-integrierbaren Funktionen) genau dann wenn sie auf $[a, b]$ beschränkt ist und fast überall stetig ist.*

Beweis: \Leftarrow : Sei f beschränkt mit $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \|f\|_\infty \leq C_f$. Die Menge

$$M = \{x_0 \in [a, b] \mid \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \searrow x_0} f(x)\}$$

ist n. V. eine Nullmenge. Dann können wir für $\epsilon > 0$ M durch abzählbar viele offene Intervalle J_k überdecken, das heißt $M \subset \bigcup_k J_k$ mit $\sum_k |J_k| < \epsilon$. Auch die abgeschlossenen Mengen \bar{J}_k (zugehörige abgeschlossene Intervalle) überdecken M , und es gilt $\sum_k |\bar{J}_k| \leq \epsilon$. Für alle $x \in [a, b] \setminus M$ ist f stetig. Also gibt es offene Intervalle J_x mit $x \in J_x$ und $\sup_{x \in \bar{J}_x \cap [a, b]} f(x) - \inf_{x \in \bar{J}_x \cap [a, b]} f(x) < \epsilon$. Das System aller J_k und J_x überdeckt $[a, b]$. Nach Satz 1.39 gibt es ein endliches Teilsystem $\{J_{k_1}, \dots, J_{k_m}, J_{x_1}, \dots, J_{x_n}\}$, das $[a, b]$ überdeckt. Die abgeschlossenen Mengen $\{\bar{J}_{k_i}, \bar{J}_{x_j}\}_{i=1, j=1}^{m, n}$ überdecken $[a, b]$ auch. Wir wählen nun eine Zerlegung \mathcal{Z} von $[a, b]$ so fein, dass alle Zerlegungsintervalle I_1, \dots, I_n in einem J_{k_i} oder einem J_{x_j} enthalten sind. Um das Riemann'sche Integrabilitätskriterium anzuwenden, betrachten wir die Differenz

$$\bar{S}_{\mathcal{Z}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{k=1}^r (M_k - m_k) |I_k| =: \sum_1 + \sum_2,$$

wobei \sum_1 alle Summanden mit $I_k \subset J_{k_i}$ enthält und in \sum_2 alle Summanden mit $I_k \subset J_{x_j}$ enthalten sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \sum_{k=1, I_k \subset J_{k_i}}^r (M_k - m_k) |I_k| \leq 2C_f \underbrace{\sum_{i=1}^m |J_{k_i}|}_{\leq \epsilon} \leq 2C_f \epsilon \\ \sum_2 &= \sum_{k=1, I_k \subset J_{x_j}}^r (M_k - m_k) |I_k| < \epsilon \sum_{k=1}^r |I_k| \leq \epsilon |b - a| \end{aligned}$$

Also gilt insgesamt:

$$\bar{S}_{\mathcal{Z}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq (2C_f + |b - a|)\epsilon$$

Die Funktion f ist also über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, das heißt $f \in R[a, b]$. \square

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

2.1 Grundbegriffe

Oft werden in den Naturwissenschaften Änderungen verschiedener Größen in Bezug zu Zeit, Raum oder sonstigen Grundgrößen beobachtet, etwa die Änderung der Position oder Geschwindigkeit eines Teilchens oder Objektes im Laufe der Zeit. Wir wollen derartige Probleme mathematisch beschreiben, wobei wir uns zunächst auf Probleme in \mathbb{R} beschränken.

Zu einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suchen wir eine differenzierbare Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deren Ableitung durch $f(\cdot)$ beschrieben wird. Wir suchen also eine Funktion, sodass gilt:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Bemerkung zur Notation:

Oftmals sieht man anstatt $\frac{d}{dt}x(t)$ auch $x'(t)$ oder, vor allem in physikalischem Zusammenhang, $\dot{x}(t)$.

Beispiel:

Für gegebene Geschwindigkeit $f(t)$ (in Abhängigkeit von der Zeit) suchen wir die Position $x(t)$ des Körpers auf einer festen eindimensionalen Achse. Wir müssen noch die Position zu irgendeinem Zeitpunkt kennen oder vorgeben. Das heißt die Lösung $x(\cdot)$ ist nicht eindeutig, solange wir keinen Wert $x(t_0) \in \mathbb{R}$ festlegen.

Das Problem

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t), & \forall t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

lässt sich lösen, wenn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Dann besagt nämlich der Hauptsatz der Integralrechnung, dass

$$x(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds$$

differenzierbar ist und die Ableitung $f(\cdot)$ besitzt. Ferner gilt offensichtlich $x(t_0) = x_0$.

Wir wollen untersuchen, ob die Lösung für alle Zeiten existiert, ob sie eindeutig ist und was ihr Verhalten ist.

Bemerkung:

Die gegebene Funktion aus unserem Beispiel darf üblicherweise auch explizit vom Ort des Körpers abhängen, das heißt

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, x) &\rightarrow f(t, x). \end{aligned}$$

Hier kann der Hauptsatz der Integralrechnung im Allgemeinen nicht direkt zu einer Lösung führen, selbst wenn f differenzierbar ist. Wir bekommen jedoch die folgende sog. Volterra'sche Integralgleichung:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Ziel:

Die Ziele der folgenden Abschnitte in Bezug auf Gleichungen des Typs

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), & \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

fassen wir nun wie folgt zusammen:

- *Existenz* einer Lösung: Wir wollen klären, unter welchen Voraussetzungen an die Funktion $f(t, x)$ und den Wert x_0 (die sog. Daten des Problems) überhaupt eine Lösung existiert.
- *Eindeutigkeit* (mit Anfangswerten): Die nächste wichtige Frage ist die nach der Eindeutigkeit der Lösung. Gibt es im Falle der Existenz nur genau eine Lösung, oder kann man verschiedene Lösungen angeben? Unter welchen Voraussetzungen an f und x_0 lässt sich Eindeutigkeit garantieren?
- Verhalten der Lösung: Unter diesem Stichwort lassen sich zahlreiche Aspekte subsumieren. Wir fragen uns etwa, ob eine Lösung global, d.h. auf einem unendlichen Lösungsintervall existiert, oder ob sie auf einem endlichen Intervall eine Singularität (einen sog. Blow-Up) hat. Ein weiterer wesentlicher Punkt ist die *Stabilität* einer Lösung. Auch wenn man eine Lösung oftmals nicht explizit berechnen oder angeben kann, lassen sich häufig qualitative Aussagen über das Lösungsverhalten treffen. Hierzu gehört etwa auch die *stetige Abhängigkeit* der Lösung von den Daten f und x_0 .

Beispiel: (Populationsdynamik)

$N(t)$ beschreibe die Größe der Population einer Spezies zum Zeitpunkt t . Es gelte:

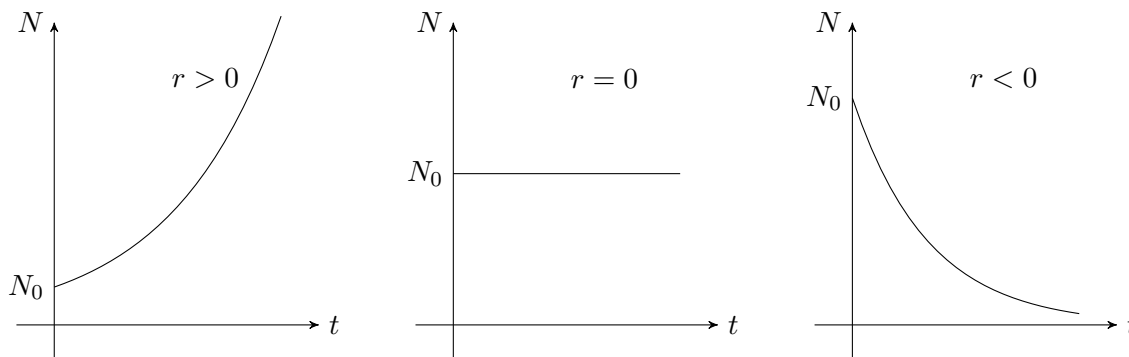
$$N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t \cdot rN(t)$$

Umstellen und Grenzübergang zum Differentialquotienten ergibt (wobei wir hier die Populationsgröße zu einem Referenzzeitpunkt, etwa $t_0 = 0$, kennen):

$$\Delta t \rightarrow 0 \longrightarrow \begin{cases} N'(t) = rN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Dies ist die einfachste Differentialgleichung $N'(t) = rN(t)$ mit der sog. Anfangsbedingung $N(t_0) = N_0$. Um sie zu lösen, versuchen wir den Ansatz $N(t) = c \cdot e^{rt}$. Wir erhalten ihn natürlicherweise, da wir ja eine Funktion suchen, die bis auf einen konstanten Faktor mit ihrer Ableitung übereinstimmt, jedoch wegen des Anfangswertes i. d. R. von Null verschieden ist. Tatsächlich sehen wir:

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 e^{rt} \\ N'(t) &= \underbrace{N_0 e^{rt}}_{N(t)} \cdot r \\ N(0) &= N_0 \cdot 1 = N_0 \quad \checkmark \\ \Rightarrow N(t) &= N_0 e^{rt} \end{aligned}$$



In der obenstehenden Abbildung sieht man das Verhalten der Population $N(t)$ für verschiedene Werte von r . Für $r > 0$ wächst die Population unbeschränkt an, für $r = 0$ stagniert sie beim konstanten Wert N_0 , und für $r < 0$ stirbt sie mit exponentieller Geschwindigkeit aus. Diese Modell ist freilich für die Beschreibung realer Populationen zu einfach und daher ungenügend.

Definition 2.1 Gegeben seien eine nichtleere Teilmenge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann nennt man

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{bzw.} \quad x' = f(\cdot, x)$$

eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Im Fall $m = 1$ wird sie als skalare gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung bezeichnet, im Fall $m > 1$ als System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Eine Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt eine Lösung dieser Differentialgleichung, wenn gilt:

1. Für alle $t \in I \subset \mathbb{R}$ liegt $(t, x(t))$ in D .
2. $x(\cdot)$ ist differenzierbar, das heißt: $\forall t \in I \exists x'(t) := \lim_{h \rightarrow 0, t+h \in I} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \in \mathbb{R}^m$.
3. Für alle $t \in I$ gilt $x'(t) = f(t, x(t))$, d. h. $x(t)$ erfüllt die Differentialgleichung.

Eine solche Differentialgleichung heißt autonom, wenn f nicht explizit von t abhängt. Andernfalls nennt man sie nichtautonom.

Bei Anfangswertproblemen zu dieser Differentialgleichung ist zusätzlich ein Tupel $(t_0, x_0) \in D$ gegeben, und gesucht ist in diesem Fall eine Funktion, welche die Lösungsbedingungen 1. bis 3. und zusätzlich die Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ erfüllt.

Definition 2.2 Auf einer nichtleeren Menge $\tilde{D} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ sei eine Funktion $F : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann stellt $F(t, x(t), x'(t)) = 0$ eine implizite gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung dar.

Eine differenzierbare Funktion $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist eine Lösung, wenn für alle $t \in I$ das Tupel $(t, x(t), x'(t)) \in \tilde{D}$ enthalten ist und die Gleichung $F(t, x(t), x'(t)) = 0$ erfüllt ist.

Definition 2.3 Seien $k, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{mk}$ nichtleer und $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, dann ist $F(\cdot, x', x'', \dots, x^{(k)}) = 0$ eine implizite gewöhnliche Differentialgleichung k -ter Ordnung.

Entsprechend sind Lösungen $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ im Raum $C^k(I)$ der k -mal differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ zu suchen.

Anfangswertprobleme sind nicht der einzige Problemtyp bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wenn Bedingungen an beiden Enden des Intervalls vorgeschrieben sind, erweist sich die Untersuchung als deutlich komplizierter.

Definition 2.4 Seien ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben. Das Problem

$$\begin{aligned} x' &= f(\cdot, x) \quad \text{in } (a, b), \\ r(x(a), x(b)) &= 0, \end{aligned}$$

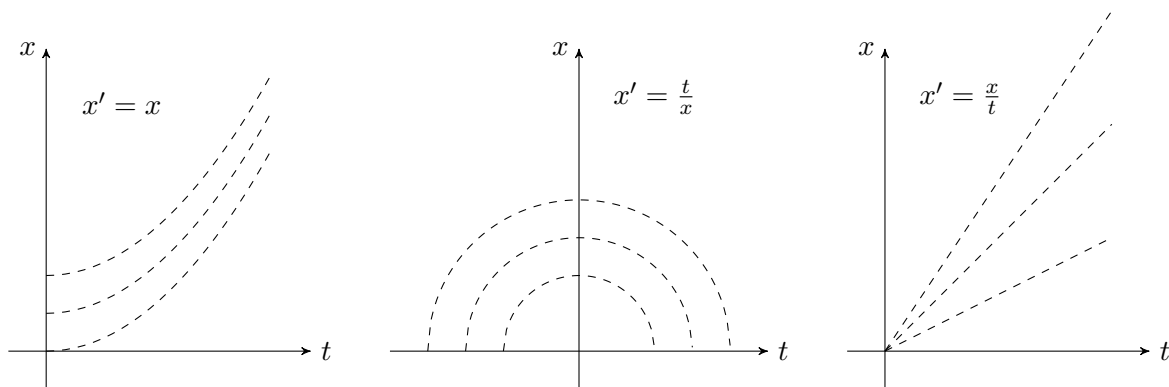
ist eine Randwertaufgabe. Die sogenannte periodische Randbedingung lautet

$$x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b).$$

2.2 Konstruktion von Lösungen

2.2.1 Geometrische Interpretation

Eine skalare Gleichung $x' = f(t, x)$ bestimmt ein Richtungsfeld, das heißt, in jedem Punkt $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ wird durch $x' = f(t, x)$ eine Steigung gegeben. Gesucht sind differenzierbare Funktionen $x(t)$, deren Graph $G(x) = \{(t, x)\}$ in jedem Punkt die vorgegebene Steigung hat.



In einfachen Fällen kann man aus dem Richtungsfeld die möglichen Lösungen ersehen. In der obenstehenden Abbildung gilt etwa (das lässt sich leicht nachrechnen):

- (i) linke Abbildung: Die Lösungen der Gleichung $x'(t) = x(t)$ sind durch $x(t) = ce^t$ gegeben.
- (ii) mittlere Abbildung: Die Lösungen der Gleichung $x'(t) = \frac{t}{x(t)}$ sind durch $x(t) = \sqrt{t^2 - c}$ gegeben (mit $c > 0, t \in [-c; c]$).
- (iii) rechte Abbildung: Die Lösungen der Gleichung $x'(t) = \frac{x(t)}{t}$ sind durch $x(t) = ct$ gegeben.

Allerdings ersetzt das Ablesen aus einer geometrischen Skizze natürlich keine Berechnung und keinen Beweis einer konkreten Lösung. Es gibt, gerade für skalare Gleichungen, zwei Verfahren, mit deren Hilfe man in Spezialfällen Lösungen explizit berechnen kann. Diese wollen wir im Folgenden vorstellen.

2.2.2 Methode der Trennung der Variablen

Wir betrachten die separable Differentialgleichung

$$x'(t) = f(t, x(t)) = a(t)g(x(t)).$$

Diese heißt separabel, weil auf der rechten Seite die Variablen t und x in separierten oder getrennten Faktoren auftreten. Sei x eine Lösung. Für den Fall $g(x) \neq 0$ gilt dann

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{g(x(s))} ds = \int_{t_0}^t a(s) ds.$$

Mit Hilfe der Substitution $z := x(s)$ ergibt sich mit $dz = x'(s) ds$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(z)} dz = \int_{t_0}^t a(s) ds.$$

In konkreten Fällen lässt sich häufig eine Lösung $x(t)$ berechnen.

Beispiel:

Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x' &= x^2 \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

dann gilt mit obigem Ansatz $\frac{dx}{dt} = x^2$ und $\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dz}{z^2} = \int_{t_0}^t dt$. Wir berechnen daraus:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z} \Big|_{x_0}^{x(t)} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} \\ \implies x(t) &= \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)} \end{aligned}$$

Bemerkung:

Diese Lösung existiert nicht für alle $t \geq t_0$. Es gibt eine vom Anfangswert abhängende Singularität bei $t = t_0 + \frac{1}{x_0}$, obwohl die Funktion $f(x) = x^2$ ein Polynom und somit global definiert ist. Hier existiert die Lösung nur *lokal* in t .

2.2.3 Methode der Variation der Konstanten

Wir betrachten die (lineare, inhomogene) Differentialgleichung

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \quad t \in I : [t_0, t_0 + \tau] \subset \mathbb{R}$$

mit stetigen Funktionen $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$. Die zugehörige *homogene* Differentialgleichung (d. h. $b(t) = 0$) hat eine Lösung der Form (nachrechnen!)

$$y(t) = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Sei $y(t)$ eine Lösung mit $c = 1$. Zur Bestimmung einer Lösung der inhomogenen Differentialgleichung wird c als Funktion von t angesetzt. Daher nennt man diese Methode die *Variation der Konstanten*. Ansatz:

$$x(t) := c(t)y(t)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} x'(t) &= c'(t)y(t) + c(t)y'(t) \\ &= \underbrace{c'(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)}_{b(t)=c'(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)} + \underbrace{c(t)a(t)y(t)}_{a(t)x(t)} \\ &= a(t)x(t) + b(t) \end{aligned}$$

Wegen $c(t)y'(t) = c(t)a(t)y(t) = a(t)x(t)$ ergibt sich die Bedingung $c'(t)y(t) = b(t)$. Wir bekommen

$$c(t) = \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds\right) b(\tau) d\tau + r$$

mit einer freien Konstanten $r \in \mathbb{R}$. Damit wird

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds\right) b(\tau) d\tau + r \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

Durch die Wahl der Konstanten $r = x_0$ ergibt sich $x(t_0) = x_0$

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \left[x_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds\right) b(\tau) d\tau \right]$$

Beispiel:

Betrachte den folgenden Spezialfall des obigen Problems:

$$\begin{aligned} x' &= ax(t) + b(t), \quad a \in \mathbb{R} \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Mit obiger Herleitung folgt für die Lösung (Details als Übung)

$$x(t) = x_0 e^{at} + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b(\tau) d\tau.$$

2.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den wichtigen Fragen der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die wesentlichen diesbezüglichen Resultate liefern die zentralen Sätze von Peano bzw. Picard-Lindelöf. Wir beginnen mit dem klassischen Existenzsatz von Peano.

Satz 2.5 (Existenzsatz von Peano) Sei $f(t, x)$ stetig auf dem $(m + 1)$ -dimensionalen Zylinder

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m \mid |t - t_0| \leq \alpha, \quad \|x - x_0\| \leq \beta\}$$

Dann existiert das Maximum $M := \max_{(t,x) \in D} \|f(t, x)\|$ sowie eine Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems auf dem Intervall $I := [t_0 - T, t_0 + T]$, wobei

$$T := \min \left(\alpha, \frac{\beta}{M} \right).$$

Beweis:

Wir verzichten auf die Beweisdetails und vermerken lediglich, dass man den Beweis unter Zuhilfenahme des Satzes von Arzela-Ascoli (Kompaktheitsatz, Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano-Weierstraß auf unendlich-dimensionale Räume) sowie der sogenannten expliziten Euler-Methode (oder Methode der Euler'schen Polygonzüge) führen kann. \square

Es fällt auf, dass die durch den Peano-Satz garantierte Lösung lediglich *lokal* erklärt ist. Der folgende Satz stellt sicher, dass wir jede Lösung auf ein maximales Existenzintervall fortsetzen können. Der Satz benennt sogleich alle Fälle, die auftreten können.

Satz 2.6 (Fortsetzungssatz) Sei $f(t, x)$ stetig auf einem abgeschlossenen Bereich $D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m$, wobei der Punkt (t_0, x_0) in D enthalten sei. Sei ferner x eine Lösung auf $I = [t_0 - T, t_0 + T]$, dann ist die lokale Lösung x nach rechts und links über jeden Zeitpunkt hinaus auf ein maximales Existenzintervall $I_{max} = (t_0 - T^*, t_0 + T^*)$ fortsetzbar, solange der Graph von x nicht an den Rand von D stößt. Dabei kann der Graph von x unbeschränkt sein, sowohl durch $t \rightarrow t_0 + T^* = \infty$ als auch durch $\|x(t)\| \rightarrow \infty$. Im ersten Fall ist der Quader D nach rechts/links, im zweiten Fall nach oben/unten unbeschränkt.

Wir zitieren nun noch ein Resultat, welches die Existenz einer globalen Lösung sicherstellt, d. h. das maximale Existenzintervall ist unbeschränkt.

Korollar 2.7 (Globale Existenz) Sei die Funktion $f(t, x)$ auf ganz $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m$ definiert und stetig. Besteht für jede durch den Satz von Peano 2.5 gelieferte lokale Lösung $x(t)$ eine Abschätzung der Form

$$\|x(t)\| \leq \rho(t) \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]$$

mit einem festen stetigen $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so lässt sich x zu einer globalen Lösung fortsetzen.

Beispiele:

1.) Die Gleichung

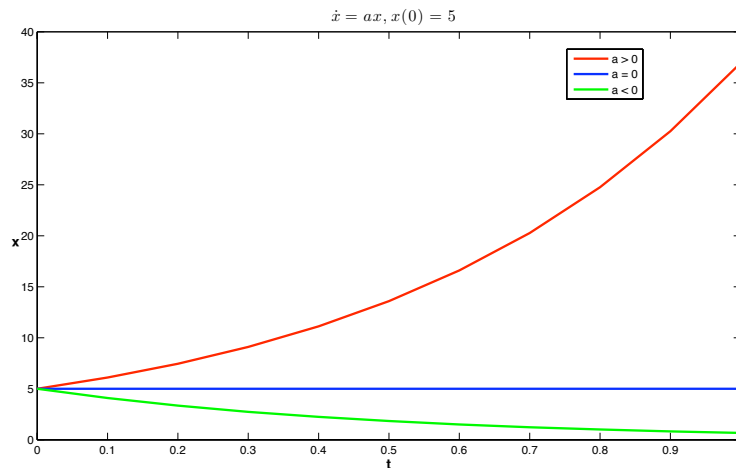
$$\begin{aligned} x' &= x, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

besitzt die globale Lösung $x(t) = x_0 e^t$. Es gilt $x(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ (vgl. die rote Kurve in der folgenden Abbildung).

2.) Wir betrachten nun die Gleichung

$$\begin{aligned} x' &= -x, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

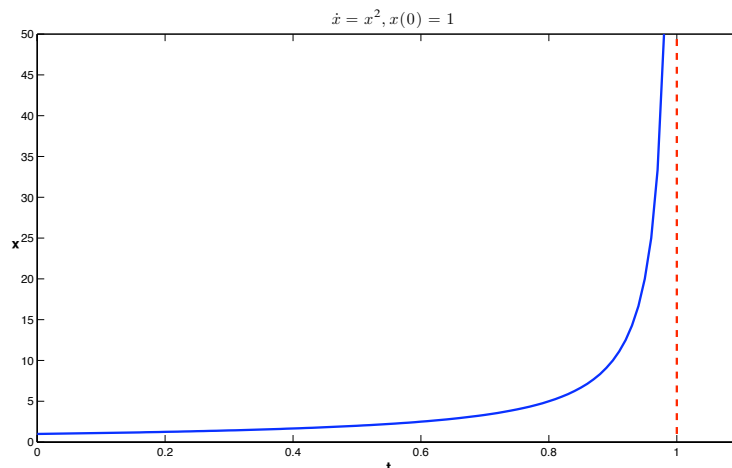
Ihre Lösung $x(t) = x_0 e^{-t}$ ist gleichmäßig beschränkt, also ist es eine globale Lösung (vgl. die grüne Kurve in der folgenden Abbildung).



3.) Wir hatten bereits im letzten Abschnitt das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}x' &= x^2, \\x(0) &= 1\end{aligned}$$

betrachtet, dessen Lösung durch $x(t) = \frac{1}{1-t}$ gegeben ist und eine Singularität bei $t = 1$ aufweist. Dies ist keine globale Lösung, da man $x(t)$ nicht nach $t = 1$ fortsetzen kann (vgl. nachstehende Abbildung).



Satz 2.8 (Regularitätssatz) Sei x eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

auf I . Falls $f \in C^m(D)$ mit $m \geq 1$, so ist $x \in C^{m+1}(I)$.

Beweis:

Aus der Beziehung (Volterra-Integralgleichung)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \quad t \in I$$

für die lokale Lösung entnehmen wir, dass für $f \in C^1(D)$ die Lösung x zweimal stetig differenzierbar ist. Es gilt dann:

$$x''(t) = \frac{d}{dt} f(t, x(t)) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Arguments folgt die Richtigkeit der Behauptung. \square

Nachdem wir nun mit dem Satz von Peano und weiteren ergänzenden Aussagen die Frage der Existenz von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen beantwortet haben, wenden wir uns dem Problem zu, ob die gefundene Lösung eindeutig ist oder ob es weitere Lösungen zu einem gegebenen Anfangswertproblem geben kann. Die folgenden Sätze liefern auch hierzu eine befriedigende Antwort.

Beispiel:

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}x' &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \\x(0) &= 0.\end{aligned}$$

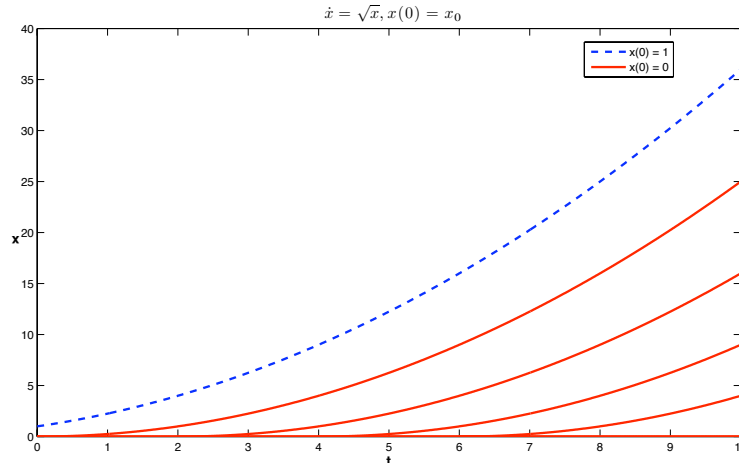
Durch $x \equiv 0$ ist eine Lösung gegeben. Mittels der Trennung der Variablen erhalten wir weiterhin

$$\begin{aligned}\int x^{-\frac{1}{2}} dx &= \int dt \\ \Leftrightarrow 2x^{\frac{1}{2}} &= t + c \\ \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(t + c) \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{1}{4}(t + c)^2\end{aligned}$$

Beachtung des Anfangswertes liefert einen konkreten Wert für die Konstante, und wir erhalten:

$$x(0) = 0 \implies c = 0 \implies x(t) = \frac{t^2}{4}.$$

Wir haben also neben der identisch verschwindenden noch eine zweite Lösung gefunden. Nur im Falle $x(0) > 0$ ist die Lösung eindeutig. Allgemein herrscht *keine Eindeutigkeit* der Lösung. Vergleiche zu diesem Beispiel auch die nachstehende Abbildung.



Der folgende Satz liefert ein erstes Eindeutigkeitsresultat.

Satz 2.9 (Eindeutigkeit und Lipschitz-Stetigkeit der Lösung / Stabilität)

(i) Sei f stetig auf $D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m$ und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich x , das heißt

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(x, y)\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

Dann gilt für zwei beliebige Lösungen x, y der Gleichung $x' = f(t, x)$, $t \in I$ auf einem gemeinsamen Existenzintervall I

$$\|x(t) - y(t)\| \leq e^{L(t-t_0)}\|x(t_0) - y(t_0)\| \quad t \in I$$

mit der Konstanten $L = L_K$ auf einer beschränkten Teilmenge $K \subset D$, welche die Graphen von x und y enthält.

(ii) Aus obiger Exponentialabschätzung folgt, dass die durch den Existenzsatz von Peano 2.5 und Fortsetzungssatz 2.6 gelieferte lokale Lösung x eindeutig bestimmt ist.

Den Beweis führt man zum Beispiel mit dem Lemma von Gronwall, das wir im Folgenden vorstellen. Es gibt zahlreiche Varianten dieses wichtigen Lemmas, das in vielen Beweisen als wesentliches Hilfsmittel zum Einsatz kommt.

Lemma 2.10 (Gronwallsches Lemma) Die stückweise stetige Funktion $u(t) \geq 0$ genüge mit zwei Konstanten $a, b \geq 0$ der Integralungleichung

$$u(t) \leq a \int_{t_0}^t u(s) ds + b, \quad t \geq t_0.$$

Dann gilt die Abschätzung

$$u(t) \leq e^{a(t-t_0)} b, \quad t \geq t_0.$$

Beweis:

Für die Funktion $\varphi(t) := a \int_{t_0}^t u(s) ds + b$ gilt $\varphi'(t) = au(t)$, und somit gilt n.V. $\varphi'(t) \leq a\varphi(t)$ (aus $u(t) \leq \varphi(t)$). Daraus wiederum folgt

$$(e^{-at}\varphi(t))' = e^{-at}(\varphi'(t) - a\varphi(t)) \leq 0$$

das heißt die Funktion $e^{-at}\varphi(t)$ ist monoton fallend. Wir können somit abschätzen:

$$\begin{aligned} e^{-at}u(t) &\leq e^{-at}\varphi(t) \leq \varphi(t_0)e^{-at_0} = be^{-at_0}, \quad t \geq 0 \\ \implies u(t) &\leq e^{a(t-t_0)}b \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Es gilt auch: Falls $u(t) \leq \int_{t_0}^t a(s)u(s) ds + b(t)$ mit $t \geq t_0$ für stetiges $a(t) \geq 0$ und eine nicht fallende Funktion $b(t) \geq 0$, dann ist $u(t) \leq \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) b(t)$ für $t \geq t_0$.

Beispiele:

$$(1) \begin{cases} x' = \sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$f(x) = \sqrt{x}$ ist nicht Lipschitz-stetig in $x = 0$. Daraus folgt Mehrdeutigkeit der Lösung für den Anfangswert $x_0 = 0$ und Eindeutigkeit, falls $x_0 > 0$ ist.

$$(2) \begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$f(x)$ ist nur lokal Lipschitz-stetig, das heißt nur auf kompaktem Definitionsbereich:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \underbrace{|x + y|}_{=: L(x,y)} \leq L|x - y|.$$

Solange die Lösung also existiert, ist sie auch eindeutig.

Wir kommen nun zum zentralen Existenz- und Eindeutigkeitsresultat der Theorie der Anfangswertaufgaben. Dieser Satz liefert nicht nur eine über die bloße Existenz einer Lösung hinausgehende Antwort auf die Frage nach der Eindeutigkeit, er ist zugleich konstruktiv in dem Sinne, dass er ein Verfahren nahelegt, mit welchem man wenigstens prinzipiell eine Lösung tatsächlich berechnen kann.

Satz 2.11 (Picard-Lindelöf (Cauchy-Lipschitz)) Die stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich x . Dann gibt es zu jedem Paar $(t_0, x_0) \in D$ ein $\epsilon > 0$ und eine eindeutige lokale Lösung $x : I = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Beweisskizze:

Wir betrachten die zum Anfangswertproblem äquivalente Integralgleichung:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

1. Es gibt ein $\delta > 0$, so dass $K := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : |t - t_0| \leq \delta, \|x - x_0\| \leq \delta\} \subset D$. Auf K erfüllt $f(t, x)$ eine Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten L_K :

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_K \|x - y\|$$

K ist kompakt und f ist stetig, also existiert M , sodass $\|f(t, x)\| \leq M$ für $(t, x) \in K$. Wir setzen nun $\epsilon := \min\left(\delta, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{2L_K}\right)$ und $I_\epsilon := [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ und definieren den Vektorraum $V := C[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$. Mit der Norm $\|x\|_\infty = \max_{t \in I} \|x(t)\|$ ist V bekanntlich ein Banachraum.

2. Auf V definieren wir einen Integraloperator $g : V \rightarrow V$ durch $g(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ für $t \in I_\epsilon$. Für Funktionen x aus der abgeschlossenen Teilmenge (der Nachweis der Abgeschlossenheit sei als Übung gestellt)

$$V_0 := \{v \in V : \max_{t \in I_\epsilon} \|v(t) - x_0\| \leq \delta\} \subset V$$

gilt für $t \in I_\epsilon$

$$\|g(x)(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \leq M|t - t_0| \leq M\epsilon \leq \delta.$$

Das heißt, die Abbildung g bildet die Teilmenge $V_0 \subset V$ in sich ab. Aus der Lipschitz-Stetigkeit von $f(t, \cdot)$ folgt für jeweils zwei Funktionen $x, y \in V$:

$$\begin{aligned} \|g(x)(t) - g(y)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\ &\leq L_K |t - t_0| \|x - y\|_\infty \\ &\leq \underbrace{L_K \epsilon}_{\leq \frac{1}{2}} \|x - y\|_\infty \\ \implies \|g(x) - g(y)\|_\infty &\leq \frac{1}{2} \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

das heißt g ist auf V_0 eine Kontraktion. Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz folgt die Existenz eines eindeutig bestimmten Fixpunktes x^* von g in V_0 , das heißt

$$x^*(t) = g(x^*)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x^*(s)) ds \quad t \in I_\epsilon$$

Wegen der Äquivalenz dieser Integralbeziehung zum Anfangswertproblem ergibt sich die Behauptung des Satzes. \square

Bemerkung:

Die Konstruktion der Lösung x^* durch eine konvergente Fixpunktiteration im Banachraum $V = C(I_\epsilon)$ nennt man *sukzessive Approximation* bzw. *Picard-Iteration*. Sie ist gegeben durch das folgende Rekursions- bzw. Iterationsschema:

$$u^k(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u^{k-1}(s)) ds, \quad t \in I_\epsilon.$$

Hierbei ist der Anfangswert u_0 als mögliche (konstante) Startfunktion wählbar.

Korollar 2.12 *Wir betrachten eine skalare Differentialgleichung m -ter Ordnung*

$$x^{(m)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m-1)}(t))$$

mit einer stetigen Funktion $f : I \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, welche bezüglich der letzten m Argumente lokal Lipschitz-stetig ist. Dann existiert für jeden Satz von m Werten $x_0^0, x_0^1, \dots, x_0^{m-1} \in \mathbb{R}$ genau eine lokale Lösung $x \in C^m[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ der Gleichung mit der Anfangswerten

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0^0, \\ x'(t_0) &= x_0^1, \\ x''(t_0) &= x_0^2, \\ &\vdots \\ x^{(m-1)}(t_0) &= x_0^{m-1}. \end{aligned}$$

Beweis:

Wir setzen $x_1 := x$, $x_2 := x'$, \dots , $x_m := x^{(m-1)}$ und erhalten das folgende System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} x'_m(t) &= f(t, x_1(t), \dots, x_m(t)) \\ x'_{m-1}(t) &= x_m(t) \\ &\vdots \\ x'_1(t) &= x_2(t) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \end{pmatrix}$$

Die rechte Seite ist ein lineares System und daher und wegen der Lipschitz-Stetigkeit von f eine Lipschitz-stetige Funktion bzgl. x_1, \dots, x_m . \square

Beispiel:

Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (in unserem Beispiel ein harmonischer Oszillator) sei mit $k > 0$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} u''(t) + ku(t) &= 0, \\ u(0) = c_0, \quad u'(0) &= c_1. \end{aligned}$$

Das äquivalente System erster Ordnung lautet mit $u_1 = u$, $u_2 = u' = u'_1$:

$$\begin{aligned} u'_1(t) &= u_2(t) \\ u'_2(t) &= -ku_1(t) \\ u_1(0) &= c_0, \quad u_2(0) = c_1 \end{aligned}$$

2.4 Lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt lineare Differentialgleichungssysteme mit rechten Seiten der Form

$$f(t, x) = A(t)x + b(t)$$

mit Matrixfunktionen $A(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektorfunktionen $b(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$.

Satz 2.13 Die Matrixfunktion $A : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und die Vektorfunktion $b : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ seien stetig. Dann besitzt die lineare Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad t \geq t_0$$

eine eindeutige globale Lösung $x : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Satz 2.14 (Homogene lineare Systeme)

- (i) Die Menge der Lösungen von $x'(t) = A(t)x(t)$ bildet einen Vektorraum. Diesen Raum bezeichnen wir als Lösungsraum.
- (ii) Zu jeder Basis $\{x_0^i, i = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}^n$ (von Anfangswertvektoren) erhält man mit den zugehörigen Lösungen folgender n Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} x^i(t)' &= A(t)x^i(t) \\ x^i(t_0) &= x_0^i \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

eine Basis $\{x^i, i = 1, \dots, n\}$ dieses Lösungsraumes. Ist H der Lösungsraum, so gilt $\dim(H) = n$.

- (iii) Ist $\{x^i, i = 1, \dots, n\}$ eine Basis des Lösungsraumes, so bilden auch die Vektoren $\{x^i(t), i = 1, \dots, n\}$ für jedes $t \geq t_0$ eine Basis von \mathbb{R}^n .

Beweis:

- (i) Sei H die Menge der Lösungen der homogenen Gleichung. Offenbar ist die Nullfunktion in H , und mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x, y \in H$ ist auch $\alpha x + \beta y \in H$:

$$(\alpha x + \beta y)' = \alpha x' + \beta y' = \alpha A(t)x + \beta A(t)y = A(t)(\alpha x + \beta y).$$

Also ist H ein Vektorraum.

- (ii) Sei $\{x_0^i, i = 1, \dots, n\}$ eine Basis des \mathbb{R}^n und seien $\{x^i, i = 1, \dots, n\}$ die eindeutigen globalen Lösungen des homogenen Gleichungssystems mit Anfangswerten x_0^i ($i = 1, \dots, n$). Gibt es dann Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x^i(t) = 0 \quad (t \geq t_0), \quad (\text{d.h. eine Linearkombination der } x^i \text{ ergibt die Nullfunktion})$$

so folgt, da dies auch für $t = t_0$ gilt, notwendig $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Die Funktionen $\{x^i, i = 1, \dots, n\}$ sind also linear unabhängig. Umgekehrt kann es nicht mehr als n linear unabhängige Funktionen in H geben, andernfalls müssten auch deren Anfangswerte linear unabhängig sein, was nicht möglich ist. Also $\dim(H) = n$.

- (iii) Analog wie (ii). □

Definition 2.15 Eine Basis $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ des Lösungsraumes der homogenen linearen Differentialgleichung zu den Anfangswerten $\varphi^i(t_0) = e_i$ wird Fundamentalsystem der Gleichung genannt. Die Matrix $\Phi = [\varphi^1, \dots, \varphi^n]$ der Spaltenfunktionen φ^i heißt Fundamentalmatrix des Systems. Diese ist regulär und genügt der sog. Matrix-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= A(t)\Phi(t), \quad (t \geq t_0) \\ \Phi(t_0) &= I. \end{aligned}$$

Satz 2.16 (Inhomogene lineare Systeme) Die Matrixfunktion $A : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und die Vektorfunktionen $\varphi_0 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ seien stetig. Der Vektorraum der Lösungen des zugehörigen homogenen Systems ist mit H bezeichnet. Dann erhält man eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

der Form:

$$x_b(t) = \Phi(t) \left(\int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} b(s) ds + c \right)$$

mit einem beliebigen konstanten Vektor $c \in \mathbb{R}^n$. Jede andere Lösung der inhomogenen Gleichung hat die Gestalt $x(t) = x_b(t) + y(t)$ mit einer Funktion $y \in H$ (d. h. y ist eine Lösung des homogenen Systems). Bei der Wahl von $c = x_0$ erfüllt x_b die Anfangsbedingung $x_b(t_0) = x_0$.

Beweis:

- (i) Wir setzen $\psi(t) := \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + c$, woraus folgt $\psi'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t)$. Dann gilt für $x_b := \Phi\psi$ die Beziehung

$$x'_b = \Phi'\psi + \Phi\psi'$$

wegen $\Phi' = A\Phi$ folgt:

$$\begin{aligned} x'_b &= A\Phi\psi + \Phi\psi' \\ &= Ax_b + \Phi\psi' \\ &= Ax_b + b \end{aligned}$$

Also ist x_b die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, und für $c = x_0$ auch Lösung des Anfangswertproblems.

- (ii) Sei x eine zweite Lösung. Dann erfüllt $w := x - x_b$ die Beziehung

$$\begin{aligned} w' &= x' - x'_b = Ax + b - Ax_b - b = Aw \\ &\Rightarrow w \in H \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Für Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$x' = Ax(t)$$

beziehungsweise skalare Gleichungen höherer Ordnung

$$x^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i x^{(i)}(t)$$

gibt es eine vollständige Lösungstheorie, die sich algebraischer Argumente bedient.

Beispiel:

Sei $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto u(t)$ eine vektorwertige Funktion, sei $u_0 \in \mathbb{R}^n$, und sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix. Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

A ist diagonal, also

$$\frac{d}{dt}u(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} u(t), \quad u(0) = u_0$$

Dies ist, wobei u_0^i die i -te Komponente von u_0 ist, äquivalent zu

$$\begin{aligned} u_1' &= a_{11}u_1, & u_1(0) &= u_0^1 \\ u_2' &= a_{22}u_2, & u_2(0) &= u_0^2 \\ &\vdots \\ u_n' &= a_{nn}u_n, & u_n(0) &= u_0^n \end{aligned}$$

Die Gleichungen sind also entkoppelt (d.h. die Gleichung für u_i hängt nur von u_i ab). Man erhält als Lösung $u_i = u_i(0)e^{a_{ii}t}$. Die Lösung zu diesem System wird manchmal (besonders in der Physik) geschrieben in der Form $u(t) = e^{At}u_0$.

Bemerkung:

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht notwendig diagonal ist, dann verfolgen wir den Ansatz „ $u(t) \stackrel{?}{=} \sum c_i e^{\lambda_i t} v_i$ “, wobei c_i Konstanten und v_i geeignete Vektoren sind. Wir werden dies im folgenden Beispiel sehen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

Dieses System lässt sich kürzer wie folgt schreiben:

$$x'(t) = Ax(t) \quad \iff \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $x = (x_1, x_2)^\top$.

Ansatz: $x(t) = ve^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v = (v_1, v_2)^\top \in \mathbb{C}^2$. Einsetzen in die Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda ve^{\lambda t} &= \begin{pmatrix} \lambda v_1 e^{\lambda t} \\ \lambda v_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{!}{=} A \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} \\ \lambda ve^{\lambda t} &= Ave^{\lambda t} \\ &\Rightarrow \lambda v = Av \end{aligned}$$

Damit $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, muss also λ ein Eigenwert und v ein zugehöriger Eigenvektor der Matrix A sein. Eigenwerte berechnet man bekanntlich mittels des charakteristischen Polynoms von A :

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = 0.$$

Für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ finden wir daraus λ_1, λ_2 (welche auch komplex sein können). Wir behandeln im Folgenden die verschiedenen Fälle separat.

Fall 1: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$

Den Eigenvektor v_i zum Eigenwert λ_i berechnen wir als Lösung des homogenen Systems

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0.$$

Somit haben wir 2 Lösungen:

$$\begin{aligned} y(t) &= ve^{\lambda_1 t} \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{v}e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

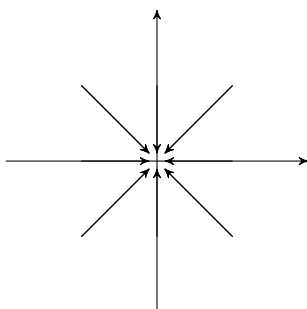
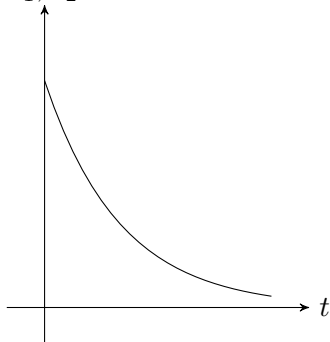
Die allgemeine Lösung des Systems ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 y(t) + c_2 \tilde{y}(t) \\ &= c_1 v e^{\lambda_1 t} + c_2 \tilde{v} e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

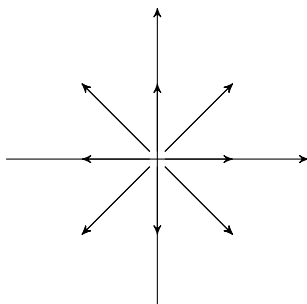
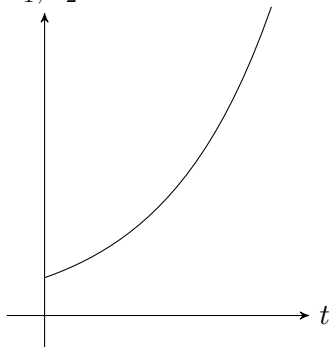
c_1 und c_2 kann man aus den Anfangsdaten finden.

Das qualitative Verhalten der Lösung ist vom Vorzeichen der λ_1 und λ_2 abhängig. Die folgende Abbildung gibt links das qualitative Lösungsverhalten wieder, rechts das jeweils zugehörige Phasenportrait. Wir werden später im Zusammenhang mit der Stabilitätstheorie erneut auf die Bedeutung der Eigenwerte zurückkommen.

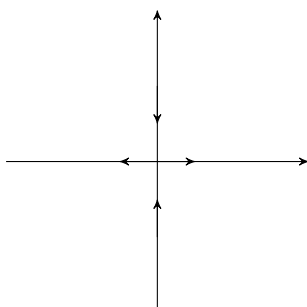
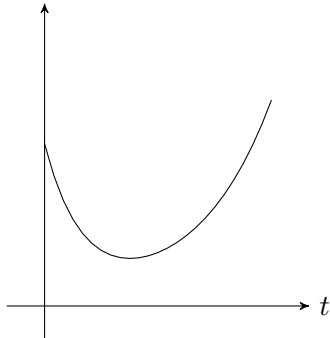
- $\lambda_1, \lambda_2 < 0$



- $\lambda_1, \lambda_2 > 0$



- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



Fall 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

In diesem Fall bilden λ_1 und λ_2 ein komplex konjugiertes Eigenwertpaar, $\lambda_{1,2} = a \pm bi$.

Diesen Eigenwerten entsprechen komplex konjugierte Eigenvektoren, das heißt

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \text{ zu } \lambda_1$$

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \text{ zu } \lambda_2$$

mit v_i, w_i reell. Analog zu Fall 1 kann die allgemeine Lösung des Systems dargestellt werden als

$$x(t) = c_1 v e^{(a+bi)t} + c_2 \tilde{v} e^{(a-bi)t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Benutzen wir die Relation

$$e^{(a+bi)t} = e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt)),$$

so erhalten wir (im Folgenden bezeichnen wir mit Re den Realteil und mit Im den Imaginärteil einer komplexen Zahl)

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 (\operatorname{Re}(v) + i \operatorname{Im}(v)) e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt)) + c_2 (\operatorname{Re}(v) - i \operatorname{Im}(v)) e^{at} (\cos(-bt) + i \sin(-bt)) \\ &= c_1 e^{at} (\operatorname{Re}(v) \cos(bt) - \operatorname{Im}(v) \sin(bt) + i (\operatorname{Im}(v) \cos(bt) + \operatorname{Re}(v) \sin(bt))) + \\ &\quad c_2 e^{at} (\operatorname{Re}(v) \cos(bt) - \operatorname{Im}(v) \sin(bt) - i (\operatorname{Im}(v) \cos(bt) + \operatorname{Re}(v) \sin(bt))) \\ &= (c_1 + c_2) e^{at} (\operatorname{Re}(v) \cos(bt) - \operatorname{Im}(v) \sin(bt)) + i (c_1 - c_2) e^{at} (\operatorname{Im}(v) \cos(bt) + \operatorname{Re}(v) \sin(bt)) \end{aligned}$$

Im Allgemeinen ist der obige Ausdruck eine komplexe Zahl $x(t)$. Wir erwarten jedoch, dass die Lösungen des Systems für reelle Anfangsdaten auch reell sind. Dies ist in der Tat der Fall, die reellwertige Lösung ist gegeben durch

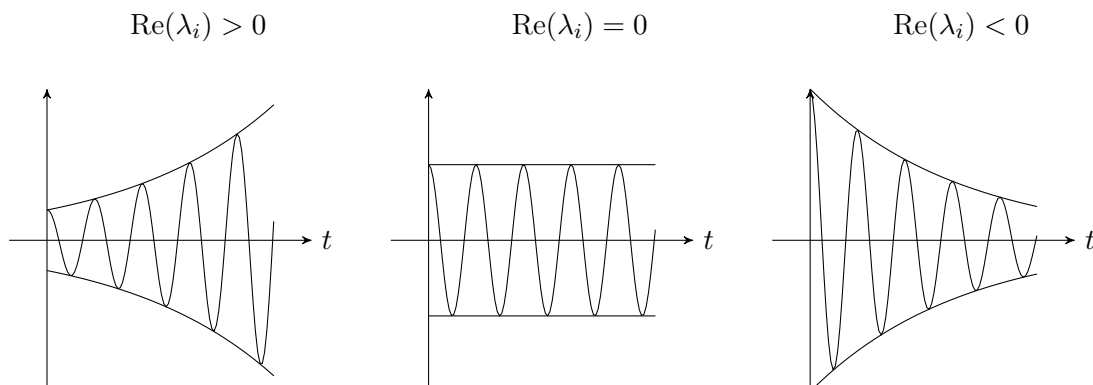
$$x(t) = \tilde{c}_1 e^{at} (\operatorname{Re}(v) \cos(bt) - \operatorname{Im}(v) \sin(bt)) + \tilde{c}_2 e^{at} (\operatorname{Im}(v) \cos(bt) + \operatorname{Re}(v) \sin(bt)), \quad \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}$$

Beweis:

Um zu zeigen, dass die Summe aus dem Realteil und dem Imaginärteil der allgemeinen komplexen Lösung eine reelle Lösung ist, verwenden wir, dass $\tilde{v} = \bar{v}$, d.h. dass die Eigenvektoren zueinander komplex konjugiert sind. Daraus folgt, dass $(\lambda_{1/2} = a \pm bi)$

$$\begin{cases} A(\operatorname{Re}(v)) = a \operatorname{Re}(v) - b \operatorname{Im}(v) \\ A(\operatorname{Im}(v)) = b \operatorname{Re}(v) + a \operatorname{Im}(v) \end{cases}$$

Einsetzen von obiger Darstellung für $x(t)$ in die Gleichung und Ausnutzung der soeben hergeleiteten Beziehungen liefert den Beweis. Wir sehen also, dass komplexe Eigenwerte mit oszillierenden Lösungen verbunden sind. Falls der Realteil der Eigenwerte positiv ist, wird die Oszillation angefacht, ist er gleich Null, so ergibt sich eine gleichförmige Oszillation, und im Fall negativer Realteile wird die Oszillation ausgedämpft (vgl. die untenstehende Abbildung).



Fall 3: $\lambda_1 = \lambda_2 \quad (\in \mathbb{R})$

Wenn es zwei linear unabhängige Eigenvektoren gibt (z.B. $A = I$), kann man wie oben verfahren. Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass es keine zwei linear unabhängigen Eigenvektoren gibt, d.h. die Matrix ist nicht diagonalisierbar. Dieser Fall wird durch das folgende einfache Beispiel vollständig beschrieben.

Beispiel:

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot x$$

Die beiden skalaren Gleichungen sind zwar nicht völlig entkoppelt, allerdings lässt sich x_2 direkt berechnen und dann in x_1 einsetzen.

$$\begin{aligned} x_2' &= \lambda x_2 \Rightarrow x_2(t) = \gamma_2 e^{\lambda t} \quad \gamma_2 = \text{const} \\ \Rightarrow x_1' &= \lambda x_1 + \gamma_2 e^{\lambda t} \Rightarrow x_1(t) = \left(\gamma_1 + \int_0^t \gamma_2 e^{\lambda s} e^{-\lambda s} ds \right) e^{\lambda t} \\ &= (\gamma_1 + \gamma_2 t) e^{\lambda t} = \gamma_1 e^{\lambda t} + \gamma_2 t e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Beispiel:

Bislang haben wir uns auf zwei Gleichungen (also ebene Systeme) beschränkt. Im Folgenden betrachten wir kurz auch höherdimensionale Systeme, um eine allgemeine Struktur der Lösungen herauszuarbeiten. Für ein homogenes System mit drei Gleichungen

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} x$$

finden wir etwa die Lösung

$$\begin{aligned} x_3' &= \lambda x_3 & \Rightarrow x_3(t) &= \gamma_3 e^{\lambda t} \\ x_2' &= \lambda x_2 + x_3 = \lambda x_2 + \gamma_3 e^{\lambda t} & \Rightarrow x_2(t) &= (\gamma_2 + \gamma_3 t) e^{\lambda t} \\ x_1' &= \lambda x_1 + x_2 = \lambda x_1 + (\gamma_2 + \gamma_3 t) e^{\lambda t} & \Rightarrow x_1(t) &= \left(\gamma_1 + \gamma_2 t + \gamma_3 \frac{t^2}{2} \right) e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Die gut erkennbare Struktur der einzelnen Komponenten (als Produkt aus Polynomen und Exponentialfunktionen) lässt sich durch vollständige Induktion für Systeme mit beliebig vielen linearen Gleichungen nachweisen.

Satz 2.17 Sei $\varphi_0 \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zum Eigenwert $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, das heißt $A\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0$. Dann ist die Kurve $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$,

$$t \rightarrow e^{\lambda_0 t} \varphi_0$$

eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $x' = Ax$ in \mathbb{R} .

Korollar 2.18 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sei diagonalisierbar, das heißt \mathbb{C}^n besitze eine Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ aus Eigenvektoren von A zu den jeweiligen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann bilden die Funktionen

$$t \rightarrow e^{\lambda_k t} \varphi_k \quad k = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung $x' = Ax \in \mathbb{R}$.

Lemma 2.19 (i) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ein Jordan-Kasten zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, das heißt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Dann gibt es für jede Lösung $x = (x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ von $x' = Ax$ ein n -Tupel $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^n$ von Koeffizienten mit

$$x_k(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n-k} \gamma_{k+j} \frac{t^j}{j!} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Umgekehrt ist jede Funktion dieser Form eine Lösung von $x' = Ax$.

(ii) Es gibt zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Koordinatentransformation $S : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $x \mapsto Sx$ (mit einer invertierbaren Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$), so dass $S^{-1}AS$ die Jordan'sche Normalform hat

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & C_r \end{pmatrix} \quad \text{mit } C_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Auf der Diagonalen von $S^{-1}AS$ stehen die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, die nicht paarweise verschieden zu sein brauchen.

Die Größe eines Jordan-Kästchens zu einem Eigenwert λ ist dessen sogenannte algebraische Vielfachheit, das heißt die Vielfachheit, mit welcher dieser Eigenwert als Nullstelle in der Faktorzerlegung des charakteristischen Polynoms auftritt. Ferner ist die Anzahl der Jordan-Kästchen zu einem Eigenwert die sog. geometrische Vielfachheit des Eigenwerts, das ist die Dimension des zugehörigen Eigenraums.

Bemerkung:

Wir wollen diese Transformationseigenschaft nutzen um lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zu lösen. Die Idee besteht hierbei darin, ein Vorgehen zu entwickeln, das Lösungen liefert für Matrizen in der Jordan'schen Normalform. Diese Lösungen sollen dann so transformiert werden, dass man Lösungen des ursprünglichen Systems erhält. Wir werden wie folgt vorgehen:

$$\begin{aligned} x' &= Ax && \text{(zu lösende Gleichung)} \\ \iff S^{-1}x' &= S^{-1}Ax = (S^{-1}AS)S^{-1}x && \text{(setze } y := S^{-1}x) \\ \iff y' &= (S^{-1}AS)y && \text{(Gleichung mit rechter Seite in Jordan'scher Normalform)} \end{aligned}$$

Wir erhalten das folgende Lemma für allgemeine invertierbare Matrizen:

Lemma 2.20 (Lineare Transformation der Lösung) $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sei invertierbar. Eine Kurve $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist genau dann eine Lösung von $x' = Ax$, wenn die Funktion $y(\cdot) = S^{-1}x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine Lösung von $y' = S^{-1}ASy$ ist.

Beispiel:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}$$

$x_A(\lambda) = (1 - \lambda)^3 \Rightarrow \lambda = 1$ hat die algebraische Vielfachheit 3. Für einen Übergang zur Jordan'schen Normalform bestimmen wir zunächst möglichst viele linear unabhängige Eigenvektoren $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (A - \lambda I) \cdot v &= 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2v_2 + v_3 = 0 \\ 2v_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \in \mathbb{R} \\ v_2 = v_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Der Eigenraum von A zum einzigen Eigenwert $\lambda = 1$ ist also eindimensional und wird vom kanonischen Einheitsvektor $e_1 = (1, 0, 0)^\top \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt. Nun müssen wir e_1 durch zwei weitere Vektoren w_2, w_3 zu einer Basis von \mathbb{R}^3 vervollständigen, so dass die transformierte Matrix die Jordan'sche Normalform hat, das heißt:

$$\begin{cases} Aw_2 = 1 \cdot w_2 + e_1 \\ Aw_3 = 1 \cdot w_3 + w_2 \end{cases}$$

Für $w_2 \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ zum Beispiel $w_2 := (0, \frac{1}{2}, 0) \Rightarrow w_3 := (0, -\frac{3}{8}, \frac{1}{4})$ Die Vektoren e_1, w_2, w_3 sind linear unabhängig:

$$S := (e_1, w_2, w_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ist invertierbar mit:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Koordinatentransformation zur Basis (e_1, w_2, w_3) von \mathbb{R}^3 führt zu Matrizendarstellung in Jordan'scher Normalform.

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Folgender Satz ergibt eine Lösung für das transformierte System.

Satz 2.21 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sei ein Jordan-Kasten zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung $x' = Ax$ gegeben durch die Spalten von $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$

$$t \mapsto e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis:

Jede Spalte von $\Phi(t)$ induziert eine Lösung gemäß Lemma 2.19. Zu prüfen ist noch die lineare Unabhängigkeit der Spaltenfunktionen. Die Diagonalgestalt von $\Phi(t)$ ergibt die Determinante $e^{n\lambda t} \neq 0$. \square

Fortsetzung des Beispiels:

Laut Satz 2.21 bilden die Spaltenfunktionen von

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, \quad t \mapsto e^{1t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Lösungs-Fundamentalsystem von $y' = (S^{-1}AS)y \in \mathbb{R}$. Das Lösungs-Fundamentalsystem von $x' = Ax$ ist dann mit $x = Sy$:

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, t \mapsto e^{1t} S \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{1t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}t - \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Durch derartige Transformationen kann man, ausgehend von der Jordan'schen Normalform einer Matrix, allgemeine homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten lösen. Durch Addition spezieller Lösungen erhält man Lösungen der inhomogenen Systeme.

2.5 Asymptotisches Lösungsverhalten bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

Wir wollen nun das Langzeitverhalten von Lösungen zu Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen untersuchen. Wir stellen uns also die Frage: Welche Eigenschaften haben die Lösungen für $t \rightarrow \infty$? Dabei konzentrieren wir uns auf autonome Differentialgleichungen.

Beispiel:

Wir betrachten die Gleichung $x' = x \in [0, \infty)$ mit dem Anfangswert $x(0) = x_0 > 0$. Wir können in diesem Fall die Lösung direkt angeben: $x(t) = x_0 e^t$. Wir wissen also, dass $x(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$.

Wir untersuchen nun, was für große Zeiten passiert, wenn der Anfangswert etwas gestört wird. Dazu betrachten wir das folgende Problem: $x'_\epsilon = x_\epsilon \in [0, \infty)$ mit dem Anfangswert $x_\epsilon(0) = x_0 + \epsilon > 0$. Es gilt in diesem Fall: $x_\epsilon(t) = (x_0 + \epsilon)e^t$, d. h. wir erhalten wieder $x_\epsilon(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$.

Für die Differenz zwischen ursprünglicher und gestörter Lösung gilt:

$$|x_\epsilon(t) - x(t)| = |\epsilon e^t| \rightarrow \infty$$

für $t \rightarrow \infty$ und für jede Störung $\epsilon > 0$ des Anfangswertes. Das heißt, dass für große Zeiten der Unterschied zwischen der gestörten und der ursprünglichen Lösung beliebig groß wird.

Betrachten wir im Vergleich dazu das Problem $x' = -x \in [0, \infty)$ mit dem Anfangswert $x(0) = x_0 > 0$, so sieht die Situation anders aus:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \\ x_\epsilon(t) &= (x_0 + \epsilon) e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Für die Differenz zwischen ungestörter und gestörter Lösung gilt also $|x_\epsilon(t) - x(t)| = |\epsilon e^{-t}|$ für alle $\epsilon > 0$ und somit $\sup_{t \geq 0} |x_\epsilon(t) - x(t)| \leq \epsilon \rightarrow 0$ für $\epsilon \rightarrow 0$. Das heißt, dass für große Zeiten der Unterschied zwischen den Lösungen des gestörten und des ungestörten Problems immer kleiner wird.

Definition 2.22 (Stationäre Punkte) *Zu einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ werde die autonome gewöhnliche Differentialgleichung $x' = f(x)$ betrachtet. Jeder Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $f(\bar{x}) = 0$ ist dabei ein sogenannter Gleichgewichtspunkt (oder auch stationärer Punkt, kritischer Punkt, Fixpunkt). Die konstante Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \rightarrow \bar{x}$ ist dann die zugehörige stationäre Lösung von $x' = f(x)$, denn es gilt für $x \equiv \bar{x}$:*

$$\bar{x}' = 0, \quad f(\bar{x}) = 0.$$

Beispiel:

Betrachte die Gleichung $x' = x^2 + \lambda =: f(x)$ mit einem reellen Parameter λ . In diesem Beispiel hängen die stationären Punkte zusätzlich von λ ab. Setzen wir

$$f(x) = x^2 + \lambda = 0,$$

so ergeben sich im Falle $\lambda < 0$ die stationären Punkte $\bar{x}_{\pm} = \pm\sqrt{|\lambda|}$, im Falle $\lambda = 0$ hat man lediglich einen stationären Punkt $\bar{x} = 0$, und für $\lambda > 0$ gibt es keine reellen stationären Punkte.

Das zugehörige Anfangswertproblem mit $x(0) = 0$ lässt sich lösen durch Separation der Variablen. Für $\lambda < 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t) &= -\sqrt{|\lambda|} \tanh(t\sqrt{|\lambda|}) \\ &= -\sqrt{|\lambda|} \frac{e^{t\sqrt{|\lambda|}} - e^{-t\sqrt{|\lambda|}}}{e^{t\sqrt{|\lambda|}} + e^{-t\sqrt{|\lambda|}}}, \end{aligned}$$

für $\lambda = 0$ ergibt sich

$$x(t) = 0,$$

und für $\lambda > 0$ schließlich lautet die Lösung

$$x(t) = \sqrt{\lambda} \tan(t\sqrt{\lambda}).$$

Trägt man das (hier eindimensionale) Vektorfeld der rechten Seite in Abhängigkeit von λ auf (vgl. die nachfolgende Abbildung), so erkennt man, dass sich bei $\lambda = 0$ die Struktur der Lösung verändert.

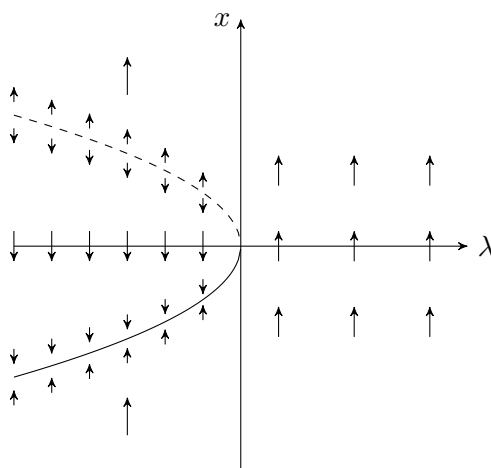


Abbildung 1 – Bifurkationsdiagramm

Definition 2.23 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ seien gegeben. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ sei ein stationärer Punkt von $x' = f(x, \lambda_0)$ zu einem Parameterwert $\lambda_0 \in \Omega$. Die Differentialgleichung $x' = f(x, \lambda)$ besitzt in (\bar{x}, λ_0) eine Verzweigung (Bifurkation), wenn Folgen $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Ω existieren, die gegen λ_0 konvergieren sodass dabei für jede Kugel $K_r(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^n$ und alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt: Die Anzahl der stationären Punkte von $x' = f(x, \mu_k) \in K_r(\bar{x})$ ist ungleich der Anzahl der stationären Punkte von $x' = f(x, \nu_n) \in K_r(\bar{x})$.

Bemerkung:

Auf der Suche nach Bifurkationspunkten geht es also eigentlich um die Lösungen von $f(x, \lambda) = 0$ mit einem Parameter λ . Der Satz über implizite Funktionen gibt uns Bedingungen, unter denen eine solche Gleichung lokal eindeutig nach x aufgelöst werden kann.

Bemerkung: (Notwendige Bedingung für Bifurkationen)

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei offen, $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_0 \in \Omega$ mit $f(\bar{x}, \lambda_0) = 0$. Wenn die reelle autonome Differentialgleichung $x' = f(x, \lambda)$ in (\bar{x}, λ_0) eine Bifurkation besitzt, dann kann die partielle Ableitung $\partial_x f(\bar{x}, \lambda_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nicht invertierbar sein.

Stabilität im Sinne von Lyapunov

Lemma 2.24 Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig. Wenn eine Lösung $x(\cdot) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ von $x' = f(x)$ einen Limes $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ für $t \rightarrow \infty$ besitzt, so ist dieser Limes \bar{x} ein stationärer Punkt.

Beweis:

Angenommen, \bar{x} wäre kein stationärer Punkt, das heißt $f(\bar{x}) \neq 0$. Aus der Stetigkeit von f gibt es zur Richtung $v := \frac{f(\bar{x})}{|f(\bar{x})|}$ ein $\tau > 0$ mit

$$\langle f(x(t)), v \rangle_{\mathbb{R}^n} > \frac{|f(\bar{x})|}{2} > 0 \quad \forall t \geq \tau.$$

Daraus folgt für alle $t \geq \tau$

$$\begin{aligned} \langle x(t), v \rangle_{\mathbb{R}^n} &= \left\langle x(t) + \int_{\tau}^t f(x(s)) ds, v \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \langle x(\tau), v \rangle_{\mathbb{R}^n} + \int_{\tau}^t \langle f(x(s)), v \rangle_{\mathbb{R}^n} ds \\ &> \langle x(\tau), v \rangle_{\mathbb{R}^n} + \frac{|f(\bar{x})|}{2} \cdot (t - \tau). \end{aligned}$$

Also gilt $x(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ im Widerspruch zu $x(t) \rightarrow \bar{x}$ für $t \rightarrow \infty$. Also muss der Limes \bar{x} ein stationärer Punkt sein. \square

Bemerkung:

Bisher haben wir die Funktionen nur im \mathbb{R}^n betrachtet. Wir können aber auch die Gleichung $x' = f(x, \lambda)$ mit $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \Omega \subset \mathbb{C}^m$ betrachten.

Beispiel:

Die komplexe skalare Differentialgleichung $x' = \lambda x$ $\lambda \in \mathbb{C}$ hat die Lösung

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}, t \geq 0.$$

Abhängig vom Realteil von λ haben wir folgende drei Fälle:

- 1) $\operatorname{Re}(\lambda) < 0 \implies |x(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$
- 2) $\operatorname{Re}(\lambda) = 0 \implies$ periodische Kreisbewegung um 0
- 3) $\operatorname{Re}(\lambda) > 0 \implies |x(t)| = |x_0| e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$

Der Fall $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ zeigt, dass die Lösungen nicht gegen 0 oder ∞ konvergieren müssen.

Definition 2.25 Sei $\bar{x} \in \mathbb{C}^n$ (oder \mathbb{R}^n) ein stationärer Punkt einer autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ mit $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ (oder $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$); \bar{x} heißt stabil (im Sinne von Lyapunov), wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Radius $\rho > 0$ mit folgenden Eigenschaften gibt: Jede Lösung $x(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \mathbb{C}^n$ von $x' = f(x)$ mit $|x(0) - \bar{x}| < \rho$ kann zu einer Lösung auf $[0, \infty)$ fortgesetzt werden und

$$|x(t) - \bar{x}| < \epsilon \quad \forall t > 0.$$

\bar{x} heißt asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov), wenn \bar{x} stabil ist und zusätzlich ein Radius $r > 0$ existiert, so dass alle Lösungen $x(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ von $x' = f(x)$ mit $|x(0) - \bar{x}| < r$ die Forderung $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ erfüllen. \bar{x} heißt instabil, wenn \bar{x} nicht stabil ist.

Stabilitätsanalyse autonomer linearer Differentialgleichungen

Satz 2.26 Sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{C}^n$. Wenn der Nullpunkt $\bar{x} = 0$ in \mathbb{C}^n stabil bezüglich der homogenen Differentialgleichung $x' = Ax$ ist, dann ist jeder stationäre Punkt der inhomogenen Differentialgleichung $y' = Ay + b$ ebenfalls stabil (im Sinne von Lyapunov).

Wenn es einen stabilen Gleichgewichtspunkt \bar{y} von $y' = Ay + b$ gibt, dann ist der Nullpunkt $\bar{x} = 0$ in \mathbb{C}^n stabil hinsichtlich der homogenen Gleichung $x' = Ax$.

Satz 2.27 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ seien die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, und $\alpha \in \mathbb{R}$ erfülle

$$\max\{\operatorname{Re}(\lambda_i) \mid i = 1, \dots, n\} < \alpha.$$

Dann gibt es eine Konstante $c \geq 0$, sodass für jede Lösung $x(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ von $x' = Ax$ und alle $t \geq 0$ gilt:

$$|x(t)| \leq c|x(0)|e^{\alpha t}$$

Korollar 2.28 Für die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sei der Realteil jedes Eigenwertes negativ. Dann ist der Nullpunkt in \mathbb{C}^n asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov) bezüglich der Gleichung $x' = Ax$.

Satz 2.29 Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ besitze einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. Dann gibt es zu jedem Radius $r > 0$ eine Lösung $x(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ von $x' = Ax$ mit $|x(0)| \leq r$ und $|x(t)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$. Also ist der Nullpunkt in \mathbb{C}^n instabil bezüglich der Gleichung $x' = Ax$.

Beweis:

Es sei $v_0 \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ mit Betrag $\leq r$. Dann ist $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit $t \mapsto e^{\lambda t} v_0$ eine Lösung von $x' = Ax$. Dabei strebt $|x(t)| = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} |v_0| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$. \square

Bemerkung:

Eine ähnliche Schlussfolgerung können wir ziehen, falls der maximale Realteil der Eigenwerte gleich Null ist.

Definition 2.30 (Phasenraum, Zustandsraum) Als Phasenraum bezeichnet man den Raum, der durch die (abhängigen) Variablen des Systems aufgespannt wird. Einen Punkt im Phasenraum nennt man einen Zustand des Systems.

Beispiel: (Eindimensionaler Phasenraum)

Wir betrachten die Gleichung $\dot{x} = x$. Es gilt $\dot{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$ sowie $\dot{x} < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Beispiel: (Zweidimensionaler Phasenraum)

Wir betrachten das Problem:

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

Das Richtungsfeld gibt den Verlauf der Trajektorien an. Der exakte Verlauf der Trajektorien ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

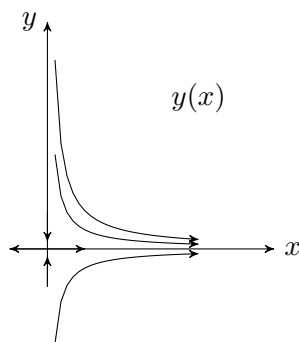
Wir wollen etwa den Verlauf der Trajektorien für folgendes System bestimmen:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -xy \end{aligned}$$

Falls $x \neq 0$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{xy}{x} = -y \\ y(x) &= ce^{-x} \end{aligned}$$

Durch jeden Punkt (x, y) geht eine eindeutige Kurve, außer durch singuläre Punkte in denen $f(x, y) = g(x, y) = 0$ ist. Diese Punkte sind die Fixpunkte des Systems.



Zusammenfassung für lineare Systeme

Die Eigenwerte der Matrix A bestimmen das Verhalten der Lösungen:

- (i) alle $\lambda_i < 0$, reell $\Rightarrow x_i(t) \rightarrow 0 \quad i = 1, \dots, n$
Die Auslenkung aus dem Fixpunkt geht gegen Null für $t \rightarrow \infty$, also ist der Fixpunkt asymptotisch stabil (sog. stabiler Knoten).
- (ii) λ_i reell; mindestens ein $\lambda_i > 0$
Die Auslenkung vom Fixpunkt wächst für die zu λ_i gehörige Lösungskomponente, also ist der Fixpunkt instabil.
Im \mathbb{R}^2 (ebene autonome Systeme) gibt es zwei mögliche instabile Konstellationen:
Falls $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ hat das System einen sog. Sattelpunkt.
Falls $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ hat das System einen sog. instabiler Knoten.
- (iii) $\lambda_i \in \mathbb{C}$ führt zu Oszillationen, wobei mit $\lambda_i = \alpha + \beta i$ gilt:
 - $\alpha < 0$: Oszillation mit fallender Amplitude $e^{\alpha t}(A \sin(t) + B \cos(t))$, Fixpunkt ist stabil (sog. stabiler Fokus, stabiler Strudel)
 - $\alpha > 0$ Oszillation mit wachsender Amplitude, Fixpunkt ist instabil (sog. instabiler Fokus, instabiler Strudel)
 - $\alpha = 0$ Oszillation mit konstanter Amplitude (sog. Wirbel, Zentrum). In diesem Fall hat man keine asymptotische Stabilität, aber Stabilität im Sinne von Lyapunov.

Stabilitätsanalyse für nichtlineare Systeme

Motivation: Wir werden nun eine Theorie entwickeln um Stabilitätsaussagen für nichtlineare Systeme treffen zu können. Die Idee besteht darin, zu untersuchen, wie sich kleine Auslenkungen von einem Fixpunkt über die Zeit entwickeln. Im \mathbb{R}^2 erhalten wir Folgendes:

Betrachtet werde das Problem

$$\frac{d}{dt}x = f(x, y), \quad \frac{d}{dt}y = g(x, y).$$

Sei (\bar{x}, \bar{y}) ein Fixpunkt, also

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Wir betrachten eine kleine Auslenkung vom Fixpunkt:

$$x = \bar{x} + \delta x$$

$$y = \bar{y} + \delta y$$

Taylor-Entwicklung um den Fixpunkt liefert eine lokale Linearisierung des Systems:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x = f(x, y) &= \underbrace{f(\bar{x}, \bar{y})}_{=0} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{y})} \cdot \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(\bar{x}, \bar{y})} \cdot \delta y + \text{Terme höherer Ordnung} \\ \frac{d}{dt}y = g(x, y) &= \underbrace{g(\bar{x}, \bar{y})}_{=0} + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{y})} \cdot \delta x + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(\bar{x}, \bar{y})} \cdot \delta y + O(\delta x^2, \delta y^2) \end{aligned}$$

Es gilt $\frac{d}{dt}x = \frac{d(\bar{x}+\delta x)}{dt} = \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{d\delta x}{dt} = \frac{d\delta x}{dt}$ und entsprechend für $\frac{d}{dt}y$. Wir erhalten daher folgendes System für δx und δy :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{y})} & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(\bar{x}, \bar{y})} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{y})} & \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(\bar{x}, \bar{y})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix gerade die Jacobimatrix an der Stelle des Fixpunktes darstellt. Folgendes lineare autonome System beschreibt die zeitliche Entwicklung kleiner Störungen, wobei A die Jacobimatrix an der Stelle des Fixpunktes bezeichnet:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Um nichtlineare Systeme zu untersuchen, linearisieren wir also das System lokal im Fixpunkt und wenden unsere Ergebnisse für lineare Systeme auf das linearisierte Problem an. Die erhaltenen Ergebnisse gelten dann allerdings nur für kleine Störungen.

Satz 2.31 (Stabilitätssatz) *Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ besitze nur Eigenwerte mit Realteil kleiner als $-\alpha$ ($\alpha > 0$ sei passend gewählt). Außerdem sei die Funktion $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ stetig mit linearem Wachstum, das heißt es existiere $k > 0$ mit $|g(t, x)| \leq k(1 + |x|)$ für alle $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{C}^n$, und es gelte $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|g(z)|}{|z|} = 0$. Dann ist der Nullpunkt in \mathbb{C}^n asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov) bezüglich der Differentialgleichung $x' = Ax + g(x)$.*

Beweis:

Jede Lösung $x(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \mathbb{C}^n$ von $x' = Ax + g(x)$ lässt sich stetig zu einer Lösung auf ganz $(0, \infty)$ fortsetzen. Mit $\Phi(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ bezeichnen wir die Matrixfunktion zu einem Lösungsfundamentalsystem von $x' = Ax$, wobei $\Phi(0) = Id_{\mathbb{C}^n}$ die Identität auf \mathbb{C}^n ist. Es gilt also $\Phi(t) = \exp(tA)$. Die Variation der Konstanten führt zu

$$x(t) = \Phi(t) \left(x(0) + \int_0^t \Phi(s)^{-1} g(x(s)) ds \right)$$

Also löst die Hilfsfunktion

$$\tilde{x}(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n \quad t \mapsto \Phi(t)x(0) = x(t) - \int_0^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1} g(x(s)) ds$$

die zugehörige homogene Differentialgleichung $\tilde{x}' = A\tilde{x}$ mit $\tilde{x}(0) = x(0)$. Nach Satz 2.27 gibt es eine Konstante $c > 0$, sodass für jede Lösung $y(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = Ay$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq c|y(0)|e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0 \\ \Rightarrow \|\Phi(t)\| &\leq Ce^{-\alpha t} \quad (\|\Phi(t)\| \text{ bezeichnet hier die Operatornorm}) \\ \|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\| &\leq Ce^{-\alpha(t-s)} \quad \forall 0 \leq s \leq t, \end{aligned}$$

denn $[s, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, $t \mapsto \Phi(t)\Phi(s)^{-1}$ induziert eine Lösungsmatrix von $y' = Ay$ mit $y(s) = Id_{\mathbb{C}^n}$.

(Anmerkung: Seien X, Y normierte Räume mit Normen $\|\cdot\|_X$ bzw. $\|\cdot\|_Y$ und sei $\Phi : X \rightarrow Y$ ein Operator. Die Operatornorm ist definiert als $\|\Phi\| := \sup_{X \setminus \{0\}} \frac{\|\Phi(x)\|_Y}{\|x\|_X}$.)

Wir erhalten

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \left| \tilde{x}(t) + \int_0^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1} g(x(s)) ds \right| \\ &\leq |\tilde{x}(t)| + \int_0^t \|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\| |g(x(s))| ds \\ &\leq C|x(0)|e^{-\alpha t} + \int_0^t Ce^{-\alpha(t-s)} |g(x(s))| ds \end{aligned}$$

Aufgrund der Voraussetzung $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|g(z)|}{|z|} = 0$ gibt es einen Radius $\varrho > 0$ mit

$$|g(z)| \leq \frac{\alpha}{2C}|z| \quad \forall z \in \overline{K}_\varrho(0) \subset \mathbb{C}^n$$

Nun betrachten wir eine beliebige Lösung $x(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ von $x' = Ax + g(x)$ mit der zusätzlichen Bedingung $|x(0)| \leq \frac{\varrho}{2(1+C)}$.

Dann garantiert die Stetigkeit von $x(\cdot)$, dass

$$T_{x(\cdot)} := \sup\{t \geq 0 : |x(\cdot)| \leq \varrho \in [0, t]\}$$

positiv oder gleich ∞ ist. Für alle $t \in [0, T_{x(\cdot)})$ können wir $|x(t)|$ weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq C|x(0)|e^{-\alpha t} + \int_0^t Ce^{-\alpha(t-s)}|g(x(s))|ds \\ &\leq C|x(0)|e^{-\alpha t} + \int_0^t Ce^{-\alpha(t-s)}\frac{\alpha}{2C}|x(s)|ds \\ \Rightarrow e^{\alpha t}|x(t)| &\leq C|x(0)| + \int_0^t e^{\alpha s}\frac{\alpha}{2}|x(s)|ds \\ \stackrel{\text{Gronwall Ungleichung}}{\Rightarrow} e^{\alpha t}|x(t)| &\leq C|x(0)|e^{\frac{\alpha}{2}t} \\ \Rightarrow |x(t)| &= C|x(0)|e^{-\frac{\alpha}{2}t} \leq \frac{\varrho}{2} \\ \Rightarrow T_{x(\cdot)} &= \infty \end{aligned}$$

und der Nullpunkt ist asymptotisch stabil bezüglich $x' = Ax + g(x)$ □

Lemma 2.32 (A priori Schranke durch lineares Wachstum) Die Funktion $f : [t_0, T] \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ besitze ein lineares Wachstum. Dann erfüllt jede Lösung $x(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{C}^n$ der Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ die Ungleichung

$$|x(t)| \leq (|x(t_0)| + C|t - t_0|)e^{c|t-t_0|}$$

Satz 2.33 (Instabilitätssatz) Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ habe mindestens einen Eigenwert λ mit $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. Sei $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ stetig mit linearem Wachstum und $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|g(z)|}{|z|} = 0$. Dann ist der Nullpunkt in \mathbb{C}^n instabil bezüglich der Differentialgleichung $x' = Ax + g(x)$.

Bemerkung:

Stabilitätssatz und Instabilitätssatz lassen sich direkt auf nichtlineare Differentialgleichungen anwenden, wenn die rechte Seite differenzierbar ist. Denn nach Definition von totalen Ableitungen erfüllt die Restfunktion $\varphi_x(\cdot)$ in

$$f(x) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(x - \bar{x}) + \varphi_{\bar{x}}(x)$$

die Voraussetzung der beiden Sätze.

Bemerkung:

Falls \bar{x} Fixpunkt ist, dann folgt $f(\bar{x}) = 0$. Sei $\delta x = x - \bar{x}$. Es gilt $\delta x' = x'$.

$$\underbrace{x'}_{\delta x'} = \underbrace{Df(\bar{x})}_{\text{Jacobi-Matrix}} \underbrace{(x - \bar{x})}_{\delta x} + \underbrace{\varphi_{\bar{x}}(x)}_{g(x)}$$

$$\delta x' = \underbrace{Df(\bar{x})}_{\text{Jacobi-Matrix}} \delta x + \text{kleine Störung}$$

Es gilt:
$$\begin{cases} \delta x \rightarrow 0 & \text{für } \operatorname{Re} \lambda < 0 \\ \delta x \text{ wächst} & \exists \lambda_i \text{ mit } \operatorname{Re} \lambda_i > 0 \end{cases}$$

Wenn alle $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ sind ist die Lösung stabil. Wenn es mindestens ein $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ gibt ist die Lösung instabil. Für den Fall $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ ist eine gesonderte Betrachtung notwendig; diesen letzten Fall vertiefen wir hier jedoch nicht.

Bemerkung:

Diese Betrachtung gilt nur für kleine Störungen, weil nur dann die Linearisierung eine gute Approximation des Systems darstellt. Dieses wird aus der Definition für asymptotische Stabilität deutlich (\bar{x} heißt asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov), wenn \bar{x} stabil ist und zusätzlich ein Radius $r > 0$ existiert, so dass alle Lösungen $x(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ von $x' = f(x)$ mit $|x(0) - \bar{x}| < r$ die Forderung $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ erfüllen).

Korollar 2.34 Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei total differenzierbar und besitze den stationären Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

(1) Wenn die Jacobi-Matrix $Df(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ nur Eigenwerte λ_i mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ besitzt, dann ist \bar{x} asymptotisch stabil.

(2) Wenn mindestens einer der $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ ist ist die Lösung \bar{x} instabil.

Bemerkung: Bei $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ sind allgemeine Schlussfolgerungen über die Stabilität nicht möglich.

Satz 2.35 (Linearisierungssatz, Hartman-Grobman) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$. Die Jacob-Matrix $Df(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitze nur Eigenwerte mit $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$. Dann gibt es die Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ von 0 und eine stetige Abbildung $\psi : U \rightarrow V$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\psi : U \rightarrow V$ ist bijektiv und die Umkehrabbildung ist ebenfalls stetig.

(ii) $\tilde{x}(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow U$ durchläuft genau die Punkte einer Lösung von $x' = f(x)$ mit den Werten in U , wenn $\tilde{y} : \psi \circ \tilde{x} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Punkte einer Lösung der linearisierten Gleichung $y' = Df(0)y$ mit den Werten in V durchläuft.

Beispiel: (logistische Gleichung)

Die logistische Gleichung dient z. B. als sehr einfaches Modell zur Beschreibung von Populationswachstum. Sie lautet:

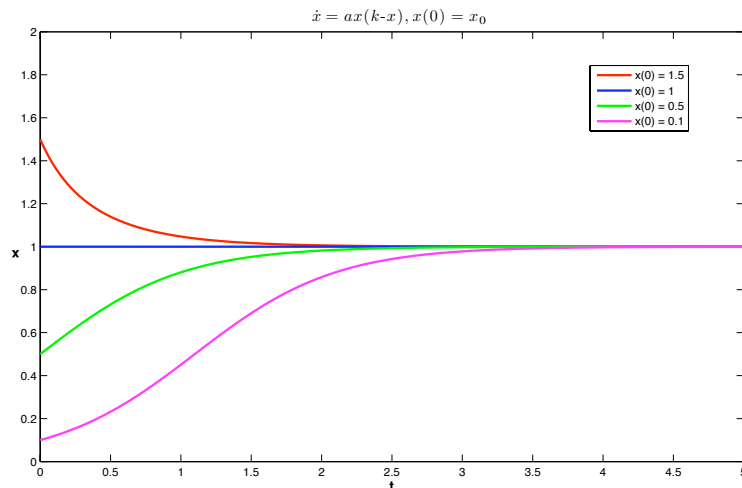
$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Als Gleichgewichtspunkte ergeben sich:

$$\bar{x}(1 - \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0 \vee \bar{x} = 1$$

Eine Untersuchung der Stabilität der Gleichgewichtspunkte mit obigen Methoden liefert:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2x \\ f'(x)|_{\bar{x}=0} &= 1 > 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \text{ ist instabil} \\ f'(x)|_{\bar{x}=1} &< 0 \Rightarrow \bar{x} = 1 \text{ ist asymptotisch stabil} \end{aligned}$$



Beispiel: (Lotka-Volterra-Modell, Räuber-Beute-Modell)

Auch dieses Modell dient z. B. der Beschreibung von Schwankungen in Populationen, wobei sich hier zwei Spezies (Räuber und Beute) wechselseitig beeinflussen. Im Folgenden seien $\lambda > 0$, $\delta > 0$.

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x - k_1 xy; & x(t) & \text{beschreibt die Größe der Beute-Population,} \\ y' &= k_2 xy - \delta y; & y(t) & \text{beschreibt die Größe der Räuber-Population.} \end{aligned}$$

Das System besitzt folgende Fixpunkte:

$$\begin{cases} f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ g(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}(\lambda - k_1 \bar{y}) = 0 \\ \bar{y}(k_2 \bar{x} - \delta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \left\{ (0, 0), \left(\frac{\delta}{k_2}, \frac{\lambda}{k_1} \right) \right\}$$

Wir untersuchen die Stabilität der Fixpunkte mit obigen Methoden. Die Jacobi-Matrix lautet $J|_{(\bar{x}, \bar{y})} = \begin{pmatrix} \lambda - k_1 \bar{y} & -k_1 \bar{x} \\ k_2 \bar{y} & -\delta + k_2 \bar{x} \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} J|_{(0,0)} &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = \lambda \\ \lambda_2 = -\delta \end{matrix} \Rightarrow (0, 0) \text{ ist Sattelpunkt} \\ J|_{\left(\frac{\delta}{k_2}, \frac{\lambda}{k_1}\right)} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-k_1 \delta}{k_2} \\ \frac{k_2 \lambda}{k_1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Im zweiten Fall ergeben sich die Eigenwerte zu $\lambda_1 = \sqrt{\lambda \delta} i$, $\lambda_2 = -\sqrt{\lambda \delta} i$. Hier liefert also die Linearisierung keine Antwort auf die Frage nach der Stabilität. Wir stellen daher folgende Betrachtung an.

Erstes Integral:

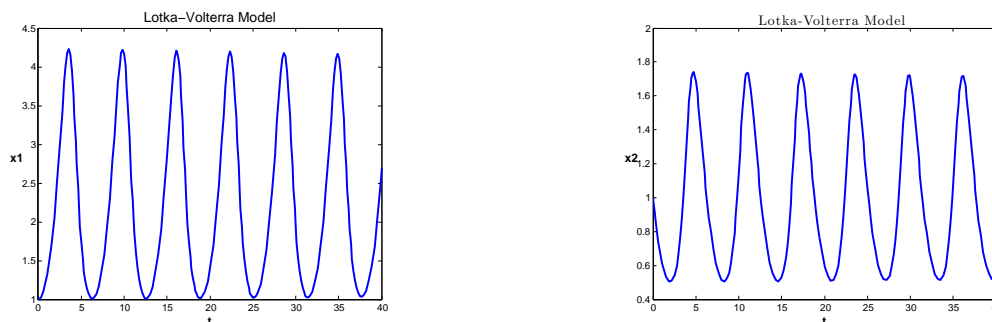
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} \frac{k_2 x - \delta}{\lambda - k_1 y} \Rightarrow \int \frac{\lambda - k_1 y}{y} dy = \int \frac{k_2 x - \delta}{x} dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{\lambda}{y} - k_1 dy = \int k_2 - \frac{\delta}{x} dx \\ &\Leftrightarrow \lambda \ln(y) - k_1 y = k_2 x - \delta \ln(x) + C \\ &\Leftrightarrow y^\lambda e^{-k_1 y} = e^{k_2 x} x^{-\delta} \cdot \tilde{C} \\ &\Leftrightarrow y^\lambda e^{-k_1 y} e^{-k_2 x} x^\delta = \tilde{C} \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $F(x, y) := y^\lambda e^{-k_1 y} e^{-k_2 x} x^\delta$ entlang der Trajektorien konstant ist. Die Lösungen sind periodisch.

Dieser Sachverhalt wird in einer späteren Version des Skriptums ausführlicher erläutert. Er ist jedoch für den weiteren Verlauf der Vorlesung nicht wesentlich und wird daher zunächst nicht weiter kommentiert.

Für Oszillationen mit Periode T gilt: $\frac{x'}{x} = \lambda - k_1 y \Rightarrow \ln\left(\frac{x(T)}{x_0}\right) = \lambda T - k_1 \int_0^T y(s) ds$. Aufgrund der Periodizität gilt $\ln\left(\frac{x(T)}{x_0}\right) = 0$. Daher erhalten wir $\frac{\lambda}{k_1} = \frac{1}{T} \int_0^T y(s) ds$, letzteres ist die mittlere Amplitude y_{mitt} der Oszillation in y -Richtung. Auf dieselbe Weise erhält man die mittlere x -Amplitude $x_{\text{mitt}} = \frac{\delta}{k_2}$.

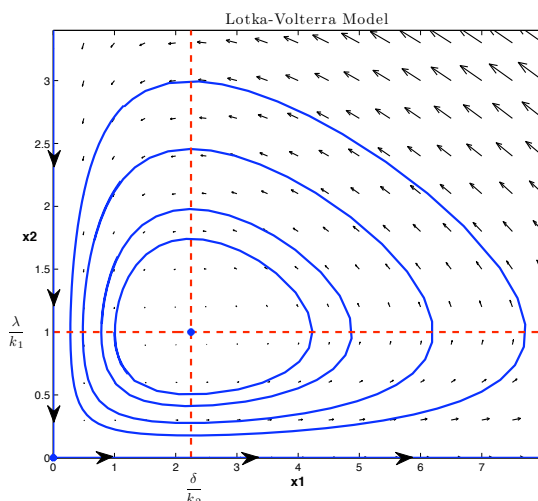
Positivität der Lösung: $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0 \Rightarrow x(t) \geq 0, y(t) \geq 0$. (Da, falls $x = 0$, auch $x' = 0$ und für $y = 0$ auch $y' = 0$, kann die Nulllinie nicht gekreuzt werden.) Folgende Abbildung zeigt eine periodische Lösung:



Bemerkung:

Bisher haben wir die Stabilität *lokal* untersucht, d.h. die Reaktion des Systems auf *kleine Störungen* von Gleichgewichtszuständen. Wenn wir wissen wollen, ob das System von *allen* Startwerten aus gegen ein bestimmtes Gleichgewicht konvergiert bzw. wie ein System auf *große Störungen* reagiert müssen wir die *globale* Stabilität untersuchen. Wir tun dies mit der *Methode von Lyapunov*, deren Grundidee dem Konzept der potenziellen Energie ähnelt. In der Physik nimmt die potenzielle Energie entlang einer Bewegung ab. Dasselbe fordern wir für die sog. Lyapunov-Funktion.

Folgende Abbildung zeigt das zugehörige Vektorfeld und Phasenportrait:



Lemma 2.36 Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Komposition

$$V \circ x(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$$

ist genau dann für jede Lösung $x(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ monoton fallend, wenn für alle $z \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(\nabla V(z), f(z))_{\mathbb{R}^n} \leq 0.$$

Hierbei haben wir das Standard-Skalarprodukt im \mathbb{R}^n verwendet.

Beweis:

“ \Leftarrow ” Für alle Lösungen $x(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ von $x' = f(x)$ ist $V \circ x(\cdot)$ differenzierbar gemäß der Kettenregel, und es gilt für alle $t \in [t_0, t_1]$:

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = DV(x(t))x'(t) = DV(x(t)) \cdot f(x(t)) \leq 0$$

Also ist $V \circ x(\cdot)$ monoton fallend.

“ \Rightarrow ” Für jeden beliebigen Startwert $z \in \mathbb{R}^n$ existiert eine Lösung $x : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$ auf einem hinreichend kleinen Zeitintervall aufgrund des Satzes von Peano. Nach Voraussetzung ist $V \circ x(\cdot)$ monoton fallend. Das bedeutet speziell zur Zeit $t = 0$

$$0 \geq \lim_{h \searrow 0} \frac{V(x(h)) - V(z)}{h} = (\nabla V(x(0)), x'(0))_{\mathbb{R}^n} = (\nabla V(z), f(z))_{\mathbb{R}^n}$$

□

Definition 2.37 Gegeben sei die autonome gew. Differentialgleichung $x' = f(x)$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, \bar{x} sei ein stationärer Punkt. Eine reellwertige differenzierbare Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lyapunov-Funktion dieser Differentialgleichung, falls

- (1) $V(\bar{x}) = 0$
- (2) $V(x) > 0 \quad \forall x \neq \bar{x}$
- (3) $(\nabla V(x), f(x))_{\mathbb{R}^n} \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Definition 2.38 (Stabilität von Lyapunov) Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit linearem Wachstum und $f(\bar{x}) = 0$, $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Lyapunov-Funktion der autonomen gew. Differentialgleichung $x' = f(x)$. Dann gilt:

- (1) Wenn $(\nabla V, f)_{\mathbb{R}^n} \leq 0$ in \mathbb{R}^n , so ist \bar{x} stabil (im Sinne von Lyapunov).
- (2) Wenn $(\nabla V, f)_{\mathbb{R}^n} < 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$, so ist \bar{x} asymptotisch stabil.

Bemerkung:

Es gibt keine allgemeine Methode, um eine Lyapunov-Funktion explizit anzugeben.

Beispiel:

Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1^3 + x_2 \\ x_2' &= -x_1 - x_2^5 \end{aligned}$$

Der Fixpunkt ist $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$. Als Ansatz wählen wir $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$V(\xi) = \alpha \xi_1^2 + \beta \xi_2^2,$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zwei reelle Parameter sind. Dann berechnet man

$$(\nabla V(\xi), f(\xi))_{\mathbb{R}^n} = 2\alpha \xi_1(-\xi_1^3 + \xi_2) + 2\beta \xi_2(-\xi_1 - \xi_2^5).$$

Für $\alpha = \beta > 0$ ist V eine Lyapunov-Funktion bezüglich der betrachteten Differentialgleichung, und der Nullpunkt in \mathbb{R}^2 erweist sich als asymptotisch stabil.

3 Das n -dimensionale Integral

Ziel:

- Wir wollen die Integrationstheorie für $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ entwickeln.
- Wir wollen den „Inhalt“ (beziehungsweise das „Maß“) $|M|$ einer Punktmenge des \mathbb{R}^n definieren für eine möglichst große Klasse von Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$.

Dabei sollten die folgenden Eigenschaften vorliegen:

- (1) Positivität: $|M| \geq 0$.
- (2) Bewegungsinvarianz: $|M| = |\tilde{M}|$, wenn M und \tilde{M} kongruent sind (das heißt durch eine abstandserhaltende Transformation wie Verschiebung, Drehung und Spiegelung des \mathbb{R}^n ineinander überführt werden können).
- (3) Normierung: $|W_1| = 1$ wobei $W_1 = [0, 1]^n$ der Einheitswürfel ist.
- (4) Additivität: $M \cap N = \emptyset \Rightarrow |M \cup N| = |M| + |N|$.

Bemerkung:

Kann man jeder Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ einen Inhalt $|M|$ mit diesen Eigenschaften (1) – (4) zuweisen? Diese Frage wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts beantwortet: Nur im \mathbb{R}^1 und \mathbb{R}^2 gibt es eine Inhaltsfunktion für *alle* Teilmengen (Banach 1923), hingegen ist dies im \mathbb{R}^n für $n > 2$ nicht möglich (Hausdorff 1914).

3.1 Inhaltsmessung von Mengen in \mathbb{R}^n

Wir beginnen mit der Definition von n -dimensionalen (abgeschlossenen) „Intervallen“ (Rechtecke in \mathbb{R}^2 , Quader in \mathbb{R}^3). Ein Intervall in \mathbb{R}^n ist gegeben als

$$I := I_1 \times \cdots \times I_n$$

wobei $I_i = [a_i, b_i]$ für $i = 1, \dots, n$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$. Für den Inhalt solcher Intervalle gilt:

$$|I| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Zerlegungen solcher Intervalle erhält man durch Zerlegung der eindimensionalen Intervalle. $I_i = I_{i,1} \cup \cdots \cup I_{i,m_i}$ in Teilintervalle $I_{i,j}$ und Bildung des kartesischen Produktes aus entsprechenden Teilintervallen. Die n -dimensionalen „Teilintervalle“ von I haben also die Form $I_{1,k_1} \times I_{2,k_2} \times \cdots \times I_{n,k_n}$, mit $1 \leq k_j \leq m_j$, $1 \leq j \leq n$.

Die endliche Vereinigung solcher Intervalle wird Intervallsumme genannt:

$$S = \bigcup_{k=1, \dots, m} I_k$$

S ist nicht überlappend, wenn die beteiligten Intervalle paarweise disjunktes Inneres haben, d.h. $I_k^0 \cap I_j^0 = \emptyset$ für $k \neq j$.

() keine Überlappung (eindimensional)

Definition 3.1 (Inhalt der Intervallsumme) Die Menge aller Intervallsummen wird mit \mathcal{S} bezeichnet. Für Intervallsummen $S \in \mathcal{S}$ mit einer nicht überlappenden Darstellung $S = \bigcup_{k=1, \dots, m} I_k$ ist der Inhalt gegeben durch

$$|S| := \sum_{k=1}^m |I_k|$$

Bemerkung:

- Die Definition des Inhaltes einer Intervallsumme ist unabhängig von der Darstellung.
- $S \subset \tilde{S} \Rightarrow |S| \leq |\tilde{S}|$
- $|S \cup \tilde{S}| \leq |S| + |\tilde{S}|$; $|S \cup \tilde{S}| = |S| + |\tilde{S}|$, falls S und \tilde{S} sich nicht überlappen.

Definition 3.2 (Jordan-Inhalt und Nullmengen)

(1) Für beschränkte (nichtleere) Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ sind der innere Inhalt $|M|_i$ und der äußere Inhalt $|M|_a$ definiert durch

$$|M|_i := \sup_{S \in \mathcal{S}, S \subset M} |S|$$

$$|M|_a := \inf_{S \in \mathcal{S}, M \subset S} |S|$$

Für die leere Menge ist $|\emptyset|_i = |\emptyset|_a = 0$. Im Fall $|M|_i = |M|_a =: |M|$ heißt die Menge messbar (oder quadrierbar) im Jordanschen Sinne mit dem sogenannten Jordan-Inhalt $|M|$.

(2) Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $|M|_a = 0$ werden Nullmengen (Jordan-Nullmengen) genannt.

Bemerkung:

Man sagt, eine Funktion f habe eine Eigenschaft (z. B. Stetigkeit) *fast überall*, wenn die Eigenschaft in allen Punkten bis auf die aus einer Nullmenge erfüllt ist.

Eine beschränkte Menge ist gemäß dieser Definition genau dann quadrierbar, wenn für alle $\epsilon > 0$ Intervallsummen $S_\epsilon, S^\epsilon \in \mathcal{S}$ existieren mit

$$S_\epsilon \subset M \subset S^\epsilon, \quad |S^\epsilon| - |S_\epsilon| < \epsilon$$

Definition 3.3 Die Würfel in \mathbb{R}^n mit Eckpunkten $p2^{-k}$ (für $p \in \mathbb{Z}^n$), Kantenlänge 2^{-k} und Inhalt 2^{-nk} bilden die Menge \mathcal{W}_k der „Würfel k -ter Stufe“.

Bemerkung:

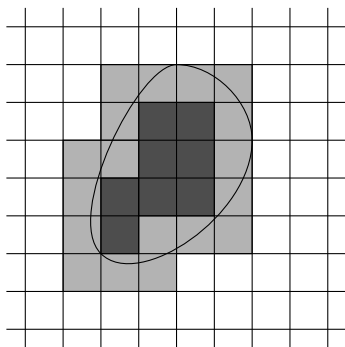
Die Würfel 0-ter Stufe sind gerade die Einheitswürfel mit Eckpunkten $p \in \mathbb{Z}^n$. Die Vereinigung solcher Würfel heißt „Würfelsumme“.

Für beschränkte Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$M_k := \bigcup \{W \in \mathcal{W}_k : W \subset M\},$$

$$M^k := \bigcup \{W \in \mathcal{W}_k : W \cap M \neq \emptyset\}.$$

Wir bekommen $M_k \subset M_{k+1} \subset M \subset M^{k+1} \subset M^k \quad k \in \mathbb{N}$



Ein- und umbeschriebene Würfelsumme (in \mathbb{R}^2)

Lemma 3.4 Für beschränkte Mengen gilt

$$|M|_i = \lim_{k \rightarrow \infty} |M_k|,$$

$$|M|_a = \lim_{k \rightarrow \infty} |M^k|.$$

Bezeichnungen:

- M° : Inneres der Menge M
- \overline{M} : Abschluss der Menge M
- ∂M : Rand der Menge M
- $M_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, M) < \epsilon\}$: (offene) ϵ -Umgebung von M .

Lemma 3.5 Für beschränkte Mengen $M, N \in \mathbb{R}^n$ gilt

- (1) $M \subset N \Rightarrow \begin{matrix} |M|_a \leq |N|_a \\ |M|_i \leq |N|_i \end{matrix}$
- (2) $|M|_a = |\overline{M}|_a \quad |M|_i = |M^\circ|_i$
- (3) $|M \cup N|_a \leq |M|_a + |N|_a$
- (4) $M^\circ \cap N^\circ = \emptyset \Leftrightarrow |M \cup N|_i \geq |M|_i + |N|_i$
- (5) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |M_\epsilon|_a = |M|_a$

Beispiel:

Eine nicht quadrierbare Menge ist beispielsweise gegeben durch

$$M := \{x \in Q := [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 : x_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2\}$$

Wegen

$$|M|_a = |\overline{M}|_a = |[0, 1]^2| = 1, \quad |M|_i = |M^\circ|_i = |\emptyset|_i = 0$$

folgt

$$|M|_a \neq |M|_i.$$

Daher ist diese Menge nicht quadrierbar.

Lemma 3.6 (Nullmengen) Für Jordan-Nullmengen gilt:

- (1) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist Nullmenge.
- (2) Jede endliche Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.
- (3) Jede in einem echten Untervektorraum von \mathbb{R}^n enthaltene beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist Nullmenge.
- (4) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist ihr Graph $G(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}, x \in M\}$ eine $(n+1)$ -dimensionale Nullmenge.

Bemerkung:

Endliche Mengen in \mathbb{R}^n sind Jordan-Nullmengen. Was kann man über abzählbare Mengen sagen? Zum Beispiel: Sei $M = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$, wobei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist, dann ist M eine Nullmenge. Ist hingegen $M = \mathbb{Q}^n \cap [0, a]^n$, $a > 0$ (diese Menge ist auch abzählbar), gilt $|M|_a = a^n > 0$, das heißt M ist keine Nullmenge.

Wenn man bei der Inhaltsdefinition auch abzählbar unendliche Vereinigungen von Intervallen zulässt, dann ist für jede abzählbare Menge $M = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ ihr äußerer Inhalt $|M|_a = 0$: Für alle $\epsilon > 0$ ist jeder Punkt x_k in einem Würfel I_k mit $|I_k| = \epsilon 2^{-nk} \Rightarrow |M|_a \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon 2^{-nk} = \frac{\epsilon}{1-2^{-n}} \Rightarrow |M|_a = 0$.

Wir haben damit eine Schwäche des Jordan-Inhalts identifiziert. Diese wird durch den allgemeineren Lebesgue-Inhalt überwunden (vgl dazu auch Abschnitt 1.6).

Satz 3.7 Eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann quadrierbar, wenn ihr Rand ∂M eine Nullmenge ist.

Beweis:

Wir zeigen, dass $|M|_i + |\partial M|_a = |M|_a$. Ein Würfel $W \subset M^\circ$ kann keinen Punkt von ∂M enthalten. Jede Würfelsumme M^k kann zerlegt werden in $(M^\circ)^k$ und $(\partial M)^k$, sodass gilt:

$$M^k = (M^\circ)^k \cup (\partial M)^k \quad \text{und} \quad (M^\circ)^k \cap (\partial M)^k = \emptyset.$$

Also ist

$$|(M^\circ)^k| + |(\partial M)^k| = |M^k|,$$

und für $k \rightarrow \infty$ bekommen wir

$$|M|_i + |\partial M|_a = |M|_a \Rightarrow |\partial M|_a = 0.$$

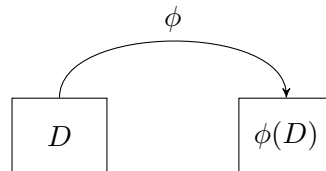
□

Korollar 3.8 Für quadrierbare Mengen $M, N \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

1. $M \subset N \Rightarrow |M| \leq |N|$ (Monotonie)
2. $|M \cup N| \leq |M| + |N|$ (Subadditivität)
3. $M^\circ \cap N^\circ = \emptyset \Rightarrow |M \cup N| = |M| + |N|$ (Additivität)
4. $M \subset N \Rightarrow |N \setminus M| = |N| - |M|$

Abbildungen von Mengen:

Wir betrachten im Folgenden Abbildungen von quadrierbaren Mengen und fragen uns, wann deren Bilder auch quadrierbar sind.



Lemma 3.9 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ (nichtleer) beschränkt und $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Abbildung mit Lipschitz-Konstante L . Dann gilt für die Bildmenge $\phi(D)$

$$|\phi(D)|_a \leq \alpha |D|_a \quad \alpha := (L\sqrt{n})^n$$

Beweis:

- (i) Für einen Würfel $W(x)$ mit Kantenlänge $2\mu > 0$ und Mittelpunkt $x \in D$ gilt:

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2 \leq L\mu\sqrt{n} \quad y \in W(x) \cap D$$

Also ist $\phi(D \cap W(x))$ in einem achsenparallelen Würfel W' mit Mittelpunkt $|\phi(x)|$, Kantenlänge $2\mu L\sqrt{n}$ und Inhalt $|W'| = \alpha |W(x)|$ enthalten.

- (ii) Ist nun $S = \bigcup W_i \supset D$ irgendeine Würfelsumme mit dem Inhalt $|S|$. Dann ist $\phi(D)$ in der Vereinigung von Würfeln W'_j mit einem Inhalt

$$|W'_j| \leq \alpha |W_j|$$

enthalten. Also ist

$$|\phi(D)|_a \leq \left| \bigcup_j W'_j \right| \leq \sum_j |W'_j| \leq \alpha \sum_j |W_j| = \alpha |S| \quad \alpha = \text{const} > 0$$

Dies impliziert

$$|\phi(D)|_a \leq \alpha \inf_{S \in \mathcal{S}, D \subset S} |S| = \alpha |D|_a$$

□

Satz 3.10 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, offen und quadrierbar. Die Abbildung $\phi : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei Lipschitz-stetig in \bar{D} und regulär in D (das heißt stetig differenzierbar mit $\det(\phi'(x)) \neq 0$). Dann gilt:

(i) Die Bildmenge $\phi(D)$ ist offen und quadrierbar, und $\phi(D) = \phi(\bar{D})$ sowie $\partial\phi(D) \subset \phi(\partial D)$.

(ii) Ist ϕ in D injektiv, so gilt $\partial\phi(D) = \phi(\partial D)$, und für alle $A \subset \bar{D}$ ist $\phi(A)$ auch quadrierbar.

Lemma 3.11 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Abbildung. Dann besitzt ϕ eine Lipschitz-stetige Fortsetzung.

$$\bar{\phi} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit } \bar{\phi}|_D = \phi$$

Satz 3.12 Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine quadrierbare Menge und $A \subset \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Bildmenge $\phi(D) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\phi(x) := Ax + b$ (affin-lineare Abbildung) quadrierbar und es gilt

$$|\phi(D)| = |\det A| |D|.$$

Korollar 3.13 Der Jordan-Inhalt ist bewegungsinvariant, das heißt jede affin-lineare Abbildung $\phi(x) = Qx + b$ mit einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ führt quadrierbare Mengen in quadrierbare Mengen über und lässt die Inhalte unverändert, weil $|\det(Q)| = 1$.

Beweis:

Wegen $Q^T = Q^{-1}$ folgt

$$|\det Q| = |\det Q^T| = |\det Q^{-1}| = |\det Q|^{-1} > 0,$$

und es gilt notwendig $|\det Q| = 1$. Aus Satz 3.12 folgt $|\phi(M)| = |M|$. □

3.2 Riemann-Integrale in \mathbb{R}^n

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige (beschränkte, nichtleere) quadrierbare Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir betrachten endliche Zerlegungen $Z = \{B_i, \quad i = 1, \dots, n\}$ der Menge D , wobei die Teilmengen $B_i \in M$ quadrierbar und nicht überlappend sind, das heißt

$$D = \bigcup_{i=1}^n B_i, \quad B_i^\circ \cap B_j^\circ = \emptyset \quad (i \neq j)$$

Die Feinheit der Zerlegung ist definiert als $|Z| := \max_{B_i \in Z} \text{diam } B_i := \max_{B_i \in Z} \sup_{x, \tilde{x} \in B_i} \|x - \tilde{x}\|_2$. Sei $\mathcal{Z}(D)$

die Menge der Zerlegungen von D . Eine Zerlegung $\tilde{Z} = \{B'_j\}$ ist eine Verfeinerung von $Z = \{B_i\}$ (in Symbolen $Z \subset \tilde{Z}$), wenn jedes B'_j Teilmenge eines B_i ist. Für zwei Zerlegungen $Z = \{B_i\}$, $\tilde{Z} = \{\tilde{B}_j\}$ in $\mathcal{Z}(D)$ bezeichnen wir die durch Überlagerung entstehende gemeinsame Verfeinerung als $Z \cup \tilde{Z} := \{B_i \cap \tilde{B}_j\}$. Wir definieren:

- Untersumme: $\underline{S}_Z(f) := \sum_{i=1}^m \inf_{x \in B_i} f(x) |B_i|$

- Obersumme: $\overline{S}_Z(f) := \sum_{i=1}^n \sup_{x \in B_i} f(x) |B_i|$
- Zu den Punkten $\xi_i \in B_i$ gehörige Riemann'sche Summe:

$$RS_Z(f) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) |B_i| \quad \xi_i \in B_i, \quad i = 1, \dots, m$$

- Unterintegral: $\underline{J}(f) = \int_D f(x) dx := \sup_{z \in \mathcal{Z}(D)} \underline{S}_Z$
- Oberintegral: $\overline{J}(f) = \int_D f(x) dx := \inf_{z \in \mathcal{Z}(D)} \overline{S}_Z$

Mit diesen Begriffen gilt:

- $\underline{J}(f) \leq \overline{J}(f)$
- $\overline{J}(f) = -\underline{J}(-f)$
- $|\overline{J}(f)| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| |D|$

Definition 3.14 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Sind die Ober- und Unterintegrale gleich, so heißt der gemeinsame Wert das Riemann-Integral von f über D :

$$\int_D f(x) dx := J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f).$$

In diesem Fall heißt f Riemann-integrierbar.

Bezeichnungen:

$f \in R(D)$ heißt, dass f über D Riemann-integrierbar ist. Der Ausbau der Theorie des n -dimensionalen Riemann-Integrals erfolgt weitgehend analog zum eindimensionalen Fall.

Satz 3.15 (Riemann-Integrabilitätskriterium) Sei $D \in \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Es gilt $f \in R(D)$ genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ Zerlegungen $Z_\epsilon \in \mathcal{Z}(D)$ existieren mit

$$\overline{S}_{Z_\epsilon}(f) - \underline{S}_{Z_\epsilon}(f) < \epsilon$$

Lemma 3.16 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar. Das Riemann-Integral über D besitzt folgende Eigenschaften:

(i) Beziehung zwischen Riemann-Integral und Jordan-Inhalt.

$$\int_D dx = |D|$$

(ii) Ein $f \in R(D)$ ist auch auf jeder quadrierbaren Teilmenge $D_1 \subset D$ Riemann-integrierbar.

(iii) Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned} f, g \in R(D), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \alpha f + \beta g \in R(D) \\ \Rightarrow J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g) \end{aligned}$$

(iv) Monotonie:

$$f, g \in R(D) : \quad f(x) \geq g(x) \quad x \in D \quad \Rightarrow \quad J(f) \geq J(g)$$

(v) Ist $D = D_1 \cup D_2$, und sind D_1, D_2 quadrierbar, so folgt:

$$D_1^\circ \cap D_2^\circ = \emptyset \quad \Rightarrow \quad J_D(f) = J_{D_1}(f) + J_{D_2}(f)$$

Korollar 3.17 Seien $A \subset D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar. Dann ist die charakteristische Funktion χ_A Riemann-Integrierbar und es gilt:

$$\int_D \chi_A(x) dx = |A|$$

Beweis:

χ_A ist integrierbar über A und $D \setminus A$. A und $D \setminus A$ sind disjunkt. Lemma 3.16 liefert:

$$\int_D \chi_A(x) dx = \int_A \chi_A(x) dx + \int_{D \setminus A} \chi_A(x) dx = \int_A dx = |A|$$

□

Lemma 3.18 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar. Ist $f \in R(D)$ mit $m \leq f(x) \leq M, x \in D$ und $\phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion, so ist auch $\phi \circ f$ Riemann-Integrierbar.

Bemerkung:

Dies impliziert auch, dass mit $f, g \in R(D)$ auch die Funktionen $|f|, f_+, f_-, fg, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in R(D)$. Falls $\inf_{x \in D} f(x) > 0$ ist, ist ferner auch $f^{-1} \in R(D)$.

Zum Nachweis von $fg \in R(D)$ und $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in R(D)$ verwenden wir die Beziehungen (wobei $\varphi(x) = x^2$ auf $[m, M]$ Lipschitz-stetig ist)

$$4fg = ((f+g)^2 + (f-g)^2), \quad \max\{f, g\} = f + (g-f)_+, \quad \min\{f, g\} = f + (g-f)_-$$

und die Linearität des Riemann-Integrals.

□

Lemma 3.19

(i) Auf einer Jordan-Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist jede beschränkte Funktion $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit

$$\int_N f(x) dx = 0$$

(ii) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f entweder über allen drei Mengen $D^\circ \subset D \subset \bar{D}$ Riemann-integrierbar oder über keiner von diesen. Falls f integrierbar ist, dann ist

$$\int_D f(x) dx = \int_{D^\circ} f(x) dx = \int_{\bar{D}} f(x) dx.$$

Satz 3.20 (Riemann-Integral stetiger Funktionen) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und in D fast überall stetig. Dann ist $f \in R(D)$. Aus $f \in C(D)$, wobei $C(D)$ die Menge der stetigen Funktionen ist, und $\sup_{x \in D} |f(x)| < \infty$ folgt die Riemann-Integrierbarkeit von f .

Bemerkung: Die Aussage von Satz 3.20 lässt sich nicht herumdrehen, das heißt aus $f \in R(D)$ folgt nicht notwendigerweise, dass die Unstetigkeitsmenge von f eine Jordan-Nullmenge ist. Analog zum eindimensionalen Fall folgt aber, dass N eine Nullmenge im schwächeren Lebesgue'schen Sinne ist.

Korollar 3.21 (Dreiecksungleichung) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $f \in R(D)$. Es gilt

$$\left| \int_D f(x) dx \right| \leq \int_D |f(x)| dx$$

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus der Monotonie des Riemann-Integrals.

□

Satz 3.22 (Mittelwertsatz) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $f \in R(D)$. Dann gibt es eine Zahl $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\inf_{x \in D} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in D} f(x)$, so dass

$$\int_D f(x) dx = \mu |D|.$$

Ist darüber hinaus D kompakt und zusammenhängend und f stetig, so gibt es ein $\xi \in D$ mit $\mu = f(\xi)$.

Satz 3.23 (Vertauschung von Grenzprozessen) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_k \in R(D)$, welche gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch $f \in R(D)$ und es gilt:

$$\int_D f(x) dx = \int_D \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D f_k(x) dx$$

Beweis: Analog zum eindimensionalen Fall. □

Satz 3.24 (Satz von Fubini) Seien $I_x \subset \mathbb{R}^n$, $I_y \subset \mathbb{R}^m$ kompakte Intervalle mit dem kartesischen Produkt $I = I_x \times I_y \in \mathbb{R}^{n+m}$ und $f \in R(I)$. Ferner seien für jedes feste $y \in I_y$ und $x \in I_x$ die Funktionen $f(\cdot, y)$ bzw. $f(x, \cdot)$ Riemann-integrierbar über I_y bzw. I_x . Dann sind auch die Funktionen

$$F_x(y) := \int_{I_x} f(x, y) dx$$

$$F_y(x) := \int_{I_y} f(x, y) dy$$

Riemann-integrierbar über I_y bzw. I_x , und es gilt

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y) dy \right) dx.$$

Beispiel:

Wir berechnen das Integral $J = \int_I \frac{1}{(x+y)^2} d(x, y)$ auf dem Rechtecksgebiet $I := [1, 2] \times [3, 4]$:

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x+y} \right) \Big|_3^4 dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) dx \\ &= (\ln(|x+3|) - \ln(|x+4|)) \Big|_1^2 \\ &= \ln \left(\frac{25}{24} \right) \end{aligned}$$

Beweis:

Wir betrachten die Zerlegungen $Z_x = \{I_i\}$ von I_x und $Z_y = \{K_j\}$ von I_y , welche die Zerlegung $Z = \{I_i \times K_j\}$ von $I = I_x \times I_y$ erzeugen. Wir setzen

$$m_{ij} := \inf_{I_i \times K_j} f, \quad M_{ij} := \sup_{I_i \times K_j} f.$$

Damit folgt

$$m_{ij} |I_i| \leq \int_{I_i} f(x, y) dx, \quad y \in K_j$$

und weiter

$$\sum_i m_{ij} |I_i| \leq \int_{I_x} f(x, y) dx = F_x(y), \quad y \in K_j$$

Integration in y -Richtung über K_j ergibt:

$$\sum_i m_{ij} |I_i| |K_j| \leq \int_{\underline{K}_j} F_x(y) dy = \int_{\underline{K}_j} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy,$$

und Summation über j liefert

$$\underline{S}_Z(f) = \sum_{i,j} m_{ij} |I_i \times K_j| \leq \int_{\underline{I}_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy.$$

Analog für die Obersumme.

$$\overline{S}_Z(f) = \sum_{i,j} M_{ij} |I_i \times K_j| \geq \int_{\overline{I}_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy$$

Gehen wir links zum Supremum und rechts zum Infimum bezüglich der Zerlegung Z über, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\underline{I}} f(x, y) d(x, y) &\leq \int_{\underline{I}_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy \\ &\leq \int_{\overline{I}_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy \\ &\leq \int_{\overline{I}} f(x, y) d(x, y) \end{aligned}$$

Ist nun f Riemann-integrierbar über $I = I_x \times I_y$, so stimmen die linke und rechte Seite mit dem Integral von f über I überein und es folgt die Richtigkeit der Behauptung. Für die vertauschte Integrationsfolge gehen wir analog vor. \square

Bemerkung:

Die Aussage des Satzes von Fubini lässt sich verallgemeinern für $f(x_1, \dots, x_n)$ auf $I = I_1 \times \dots \times I_n$.

Transformation von Integralen

Wir rekapitulieren zunächst das Ergebnis für eine Dimension.

$$I = [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad \varphi(I) = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R},$$

φ sei dabei stetig differenzierbar.

- $\varphi' > 0$, und falls $\varphi(a) = \alpha, \varphi(b) = \beta$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

- $\varphi' < 0$, und falls $\varphi(a) = \beta, \varphi(b) = \alpha$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(y) dy = - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x)) (-\varphi'(x)) dx$$

In beiden Fällen gilt also für $\varphi'(x) \neq 0$

$$\int_{\varphi(I)} f(y) dy := \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx =: \int_I f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx$$

Das heißt:

$$\int dy = \int |\varphi'(x)| dx$$

Für $\varphi(x) = ax + b$

$$\int dy = \int |a| dx$$

Wir wissen auch, dass für $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar, $\phi(x) = Ax + b$:

$$|\phi(D)| = |\det A| |D|$$

Satz 3.25 Die Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und quadrierbar und die Funktion $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, injektiv und Lipschitz-stetig. Dann ist die Menge $\phi(D)$ quadrierbar, für jede Funktion $f \in R(\phi(D))$ ist die Funktion

$$F := f(\phi(\cdot)) |\det \phi'(\cdot)| : D \rightarrow \mathbb{R}$$

Riemann-integrierbar, und für jede quadrierbare Teilmenge $M \subset D$ gilt die Substitutionsregel

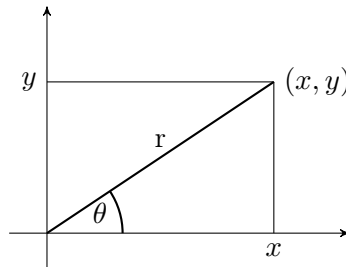
$$\int_{\phi(M)} f(y) dy = \int_M f(\phi(x)) |\det \phi'(x)| dx$$

Bemerkung:

Bei Setzung $f \equiv 1$ folgt für die Inhalte

$$|\phi(M)| = \int_{\phi(M)} dy = \int_M |\det \phi'(x)| dx$$

Beispiel: (Ebene Polarkoordinaten)



Durch die auf der ganzen (r, θ) -Ebene definierte Abbildung

$$(x, y) = \phi(r, \theta) := (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

wird der offene Streifen S der (r, θ) -Ebene bijektiv auf die offene Menge $B := \phi(S)$ der (x, y) -Ebene abgebildet, wobei

$$S := \{(r, \theta) : r \in \mathbb{R}^+, \theta \in (0, 2\pi)\}$$

$$\phi(S) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$$

Die Abbildung ϕ ist auf S ein Diffeomorphismus mit stetiger Jacobi-Matrix.

$$J_\theta(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\det \phi'(r, \theta) = r > 0, \quad (r, \theta) \in S.$$

ϕ ist Lipschitz-stetig auf beschränkten Teilmengen von S

$$\begin{aligned} \|\phi(r, \theta) - \phi(\tilde{r}, \tilde{\theta})\|_2 &\leq \|\phi(r, \theta) - \phi(\tilde{r}, \theta)\|_2 + \|\phi(\tilde{r}, \theta) - \phi(\tilde{r}, \tilde{\theta})\|_2 \\ &= (|(r - \tilde{r}) \cos(\theta)|^2 + |(r - \tilde{r}) \sin(\theta)|^2)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad (|\tilde{r}(\cos \theta - \cos \tilde{\theta})|^2 + |\tilde{r}(\sin \theta - \sin \tilde{\theta})|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2}|r - \tilde{r}| + \sqrt{2}|\tilde{r}||\theta - \tilde{\theta}| \\ &\leq \underbrace{2 \max\{1, |\tilde{r}|\}}_{=:L} \|(r - \tilde{r}, \theta - \tilde{\theta})\|_2 \end{aligned}$$

Die beschränkte, offene Menge $K_r(0) \setminus \{(x, 0), x \leq 0\} \subset S$ ist das Bild des offenen Rechtecks

$$\begin{aligned} Q &:= \{(r, \theta), \subset \mathbb{R}^2 : 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi\} \\ &= (0, R) \times (0, 2\pi) \end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{K_R(0)} f(x, y) d(x, y) &\stackrel{\text{Transformation}}{=} \int_Q f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta \end{aligned}$$

Für $f \equiv 1$ erhalten wir

$$|K_R(0)| := \int_{K_r(0)} d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\theta = \pi R^2$$

Beispiel: (Zylinder-Koordinaten)

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z)$$

Die Abbildung $\phi(x, y, z) := (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$ und die offene Menge

$$Z := S \times \mathbb{R} = \{(r, \theta, z) : r \in \mathbb{R}^+, \theta \in (0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\}$$

wird bijektiv auf die Menge $\phi(z)$ abgebildet, mit $S \subset \mathbb{R}^2$ wie im vorherigen Beispiel definiert. Das Bild von \bar{Z} ist der ganze \mathbb{R}^3 . Die Abbildung ist Lipschitz-stetig auf beschränkten Teilmengen und es gilt

$$\det(\phi'(r, \theta, z)) = r > 0$$

Für $Z_{R,H}(0) = \{(r, \theta, z) : r \in (0, R), \theta \in (0, 2\pi), z \in (0, H)\} \subset Z$ gilt

$$\int_{Z_{R,H}(0)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) r dr d\theta dz$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |Z_{R,H}(0)| &:= \int_{Z_{R,H}(0)} d(x, y, z) \\ &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta dz \\ &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\theta dz \\ &= \pi R^2 H \end{aligned}$$

Der Kreiszyylinder ist ein Spezialfall eines Rotationskörpers: Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $\varphi[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion und

$$D_\varphi := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [a, b] : x^2 + y^2 \leq \varphi(z)^2\}$$

$$|D_\varphi| = \int_{D_\varphi} d(x, y, z) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi(z)} r dr d\theta dz = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \varphi(z)^2 d\theta dz$$

Korollar 3.26 Das Volumen $|D_\varphi|$ des Rotationskörpers in \mathbb{R}^3 mit der Randkurve $x = \varphi(z)$, $z \in [a, b]$, ist bestimmt durch

$$|D_\varphi| = \pi \int_a^b \varphi(z)^2 dz$$

3.3 Uneigentliches Riemann-Integral

Definition 3.27 Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine monoton wachsende Folge $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von quadrierbaren Teilmengen

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots \subset M_k \subset M$$

ausschöpfend, wenn für jede r -Kugel

$$K_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < r\}$$

gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |(M \cap K_r(0)) \setminus M_k|_a = 0$$

Bemerkung:

Die Existenz einer ausschöpfenden Folge $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ für die Menge M impliziert die Quadrierbarkeit der Menge $M \cap K_r(0)$. Im Fall $M = \mathbb{R}^n$ bilden zum Beispiel die Kugeln $K_r(0)$ ausschöpfende Folgen. Ist M quadrierbar und $p \in \bar{M}$, so ist die Folge $M_k := M \setminus K_{\frac{1}{k}}(p)$ ausschöpfend.

Definition 3.28 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge (nicht notwendigerweise beschränkt). Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt über D uneigentlich Riemann-integrierbar, wenn gilt

$$\sup_{M \in Q_f} \int_M |f(x)| dx < \infty \quad \text{wobei } Q_f := \{M \subset D : M \text{ quadrierbar}, f \in R(M)\}$$

und wenn es eine bezüglich D ausschöpfende Folge von Mengen $D_k \subset Q_f$ gibt mit

$$\int_D f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(x) dx.$$

Der Limes heißt dann das uneigentliche Riemann-Integral von f über D .

Satz 3.29 Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Dann ist für jede ausschöpfende Folge $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$\int_D f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(x) dx,$$

das heißt das uneigentliche Riemann-Integral ist unabhängig von der gewählten ausschöpfenden Folge.

Beispiel:

$$1) M = [0, 1]^2, \quad J = \int_M \frac{1}{\sqrt{x}} d(x, y)$$

Die Mengen $M_k := \{(x, y) \in M, x \geq \frac{1}{k}\}$ bilden eine ausschöpfende Folge von M . Für diese gilt nach dem Satz von Fubini:

$$\int_{M_k} \frac{1}{\sqrt{x}} d(x, y) = \int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right) dy = \int_0^1 (2\sqrt{x} \Big|_{\frac{1}{k}}^1) dy = 2 - \frac{2}{\sqrt{k}}$$

Für $k \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\int_{M_k} \frac{1}{\sqrt{x}} d(x, y) \rightarrow 2 = \int_M \frac{1}{\sqrt{x}} d(x, y)$$

$$2) M = \mathbb{R}^2, J = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|_2^2} dx$$

$$\begin{aligned} \int_{K_k(0)} e^{-\|x\|_2^2} dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^k e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^k \right) d\theta \\ &= \pi(1 - e^{-k^2}) \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pi \end{aligned}$$

$$J = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-k^2}) = \pi$$

3.4 Parameterabhängige Integrale

Wir betrachten $F(x) := \int_{D_y} f(x, y) dy \quad x \in D_x, D_x \subset \mathbb{R}^m, D_y \subset \mathbb{R}^n$

Satz 3.30 Seien $D_x \subset \mathbb{R}^m$, $D_y \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und D_y kompakt. Dann gilt

(i) Ist f in $D_x \times D_y$ stetig, so ist F in D_x stetig.

(ii) Ist D_x offen und sind f und $\nabla_x f$ stetig in $D_x \times D_y$, so ist F in D_x stetig partiell differenzierbar, und es gilt:

$$\nabla F(x) = \int_{D_y} \nabla_x f(x, y) dy \quad x \in D_x$$

(iii) Ist D_x offen und ist f in $D_x \times D_y$ k -mal stetig differenzierbar bezüglich x , so ist F k -mal stetig partiell differenzierbar in D_x

Beispiel:

$$F(x) = \int_0^1 y^x dy = \frac{y^{x+1}}{x+1} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x+1}$$

$f(x, y) = y^x$ ist stetig auf $\mathbb{R}^+ \times [0, 1]$ und erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 3.30. Also kann nach x abgeleitet werden.

Wir nutzen das, um

$$\int_0^1 y^x \ln(y) dy$$

zu berechnen.

Weil $y^x = e^{x \ln(y)}$, $\frac{d}{dx} y^x = e^{x \ln(y)} \ln(y) = y^x \ln(y)$, gilt dann:

$$\int_0^1 y^x \ln(y) dy = \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} y^x \right) dy \stackrel{\text{Satz 3.30}}{=} \frac{d}{dx} \int_0^1 y^x dy = F'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

Korollar 3.31 Eine auf einer offenen Kugel $B \subset \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbare Vektorfunktion $v : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist genau dann Gradient einer stetig differenzierbaren Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ (das heißt $v = \nabla f$), wenn $\nabla \times v = 0$ gilt.

Beweis:

(\Rightarrow) Wenn auf der Kugel eine Funktion $f \in C^n(B)$ existiert mit $v = \nabla f$
 $\Rightarrow \partial_i v_j = \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f = \partial_j v_i, \quad i, j = 1, \dots, 3$
 das heißt

$$\nabla \times v = (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) = 0$$

(\Leftarrow) Sei nun $\nabla \times v = 0$ auf $B = B_r(0)$ das heißt $\partial_j v_i = \partial_i v_j$.
 Wir definieren für $x \in B$ eine Funktion

$$f(x) := \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 v_j(tx) dt \right) x_j$$

Nach Satz 3.30 ist $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$\begin{aligned} \partial_j f(x) &= \sum_{i=1}^n \left(\partial_j \int_0^1 v_i(tx) dt \right) x_i + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 v_i(tx) dt \right) \partial_j x_i \\ &= \int_0^1 \left(t \sum_{i=1}^n (\partial_j v_i)(tx) x_i + v_j(tx) \right) dt \end{aligned}$$

Bei Berechnung von

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(tv_j(tx)) &= v_j(tx) + t \frac{d}{dt} v_j(tx) \\ &= v_j(tx) + t \sum_{i=1}^n (\partial_i v_j)(tx) x_i \\ &= v_j(tx) + t \sum_{i=1}^n (\partial_j v_i)(tx) x_i \end{aligned}$$

für festes $x \in B$ folgt

$$\begin{aligned} \partial_j f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (tv_j(tx)) dt \\ &= tv_j(tx) \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= v_j(x) \end{aligned}$$

das heißt

$$\nabla f(x) = v(x).$$

□

4 Integralsätze

In einer Dimension gilt für eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ einer Variablen der Fundamentalsatz

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Wir wollen nun diese Aussage auf Integrale in mehreren Dimensionen verallgemeinern.

4.1 Kurven in \mathbb{R}^n

Beispiel:

Ein physikalisches Partikel durchläuft in einem Zeitintervall $[a, b]$ einen Weg $\{x(t), t \in [a, b]\}$ in \mathbb{R}^n . Dabei kann es passieren, dass die Bahnkurve gewisse Punkte mehrfach durchläuft, zum Beispiel die ebenen Bahnkurven

- $x(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$ $t \in \mathbb{R} \rightarrow$ hier ist $x(1) = x(-1)$ ein sog. Doppelpunkt.
- $x(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ $t \in [0, 2\pi] \rightarrow$ hier wird der Einheitskreis zweimal durchlaufen.

Definition 4.1

- (1) Unter einem Weg verstehen wir eine stetige Abbildung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem abgeschlossenen (nicht degenerierten) Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$
- (2) Die Bildmenge

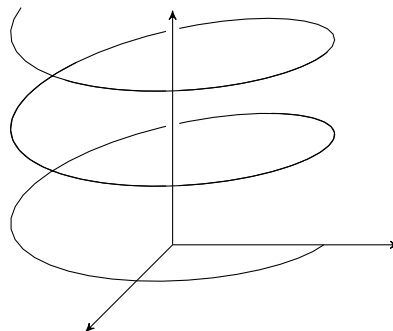
$$\Gamma_\varphi = \{\varphi(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$$

eines Weges $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird als Kurve im \mathbb{R}^n mit der Parameterdarstellung φ bezeichnet.

Im Falle $I = [a, b]$ nennen wir $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ den Anfangspunkt beziehungsweise den Endpunkt der Kurve. Im Falle $\varphi(a) = \varphi(b)$ heißt die Kurve geschlossen. Ist $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ für zwei Parameterwerte $t_1 \neq t_2$, so hat die Kurve dort einen Doppelpunkt.

Beispiel:

- 1) Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kann die Abbildung $\varphi(t) := (t, f(t))$, $t \in [a, b]$ als ein Weg im \mathbb{R}^2 aufgefasst werden. Die zugehörige Kurve ist der Graph der Funktion f .
- 2) $\varphi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (a_1 + v_1 t, a_2 + v_2 t)$ beschreibt eine Gerade in der Ebene durch den Punkt (a_1, a_2) in Richtung des Vektors (v_1, v_2)
- 3) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, mit $\varphi(t) = (r \cos(t), r \sin(t), t)$ beschreibt eine sogenannten Schraubenkurve im \mathbb{R}^3 .

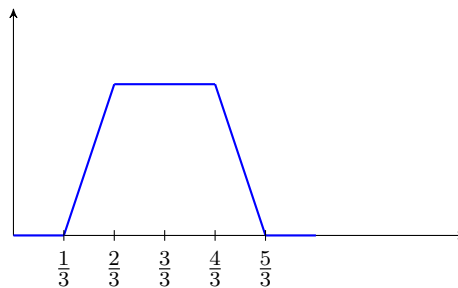


- 4) Die stetige Parametrisierung $\varphi(t) = \varphi_0$, $t \in [a, b]$ ergibt eine einpunktige Menge $\{\varphi_0\} \in \mathbb{R}^3$.

- 5) Ein Beispiel für eine pathologische, sog. flächenfüllende Kurve stellt die folgende Peano-Kurve dar:

$$\tilde{g}(t) := \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ 3t - 1 & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \leq t \leq \frac{4}{3} \\ 5 - 3t & \frac{4}{3} \leq t \leq \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} \leq t \leq 2 \end{cases}$$

g sei die 2-periodische Funktion die durch 2-periodische Fortsetzung von \tilde{g} erhalten wird, also $g(2k + \alpha) := \tilde{g}(\alpha)$ für $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha < 2$.



Die Funktion g ist stetig und beschränkt, und es gilt:

$$0 \leq g(t) \leq 1 \quad t \in \mathbb{R}$$

Damit definieren wir die Abbildung $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi(t) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g(4^{2k-1}t), \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g(4^{2k}t) \right).$$

Die Reihen konvergieren absolut und gleichmäßig, sodass die Limesfunktion φ stetig ist. Die zugehörige Kurve wird Peano-Kurve genannt. φ bildet $[0, 1]$ stetig auf das gesamte Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ ab.

Beweis: Dies sieht man wie folgt: Wegen $0 \leq g \leq 1$ ist

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g(4^{2k}t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$$

das heißt $\varphi[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$. Wir wollen zeigen, dass φ surjektiv ist. Dazu beachten wir, dass jede reelle Zahl $a \in [0, 1]$ eine sogenannte *dyadische Entwicklung* besitzt:

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k 2^{-k} \quad \delta_k \in \{0, 1\}.$$

Also gibt es zu jedem Punkt $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ eine $(0, 1)$ -Folge $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ derart, dass

$$(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2k-2} 2^{-k}, \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2k-1} 2^{-k} \right).$$

Dieser $(0, 1)$ -Folge ordnen wir die folgende Zahl zu

$$t := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\delta_j}{4^{j+1}} \in [0, 1]$$

Für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ ist dann

$$4^{k+1}t = \sum_{j=0}^{k-1} 4^{k-j}\delta_j + \delta_k + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\delta_j}{4^{j-k}}$$

Die erste Summe ist ein Vielfaches von 2, und für die letzte gilt:

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\delta_j}{4^{j-k}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^j} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}$$

Also $g(4^{k+1}t) = \delta_k$ gemäß der Konstruktion von g . Dies ergibt wie gewünscht

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g(4^{2k-1}t), \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g(4^{2k}t) \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \delta_{2k-2}, \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \delta_{2k-1} \right) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

Bemerkung:

Wir sehen, dass die bloße Annahme der Stetigkeit der Parametrisierung einer Kurve auch sehr pathologische Objekte zulässt; um solche Pathologien auszuschließen, benötigen wir daher stärkere Voraussetzungen.

Definition 4.2 Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine Kurve mit Parametrisierung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ist φ injektiv (was insbesondere Doppelpunkte ausschließt), so nennen wir die Kurve eine Jordan-Kurve und die Parametrisierung einen Jordan-Weg. Ist $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv mit $\varphi(a) = \varphi(b)$ als einzigem Doppelpunkt, so sprechen wir von einer geschlossenen Jordan-Kurve.

Satz 4.3 (Jordan'scher Kurven Satz) Jede geschlossene ebene Jordan-Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ zerlegt \mathbb{R}^2 in zwei Gebiete, die von ihr berandet werden, d. h. es gilt:

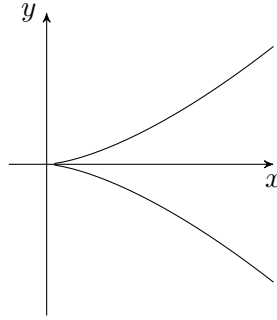
$$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = G_1 \cup G_2 \text{ mit } G_1 \cap G_2 = \emptyset \text{ und } \partial G_1 = \partial G_2 = \Gamma$$

G_1 ist beschränkt und wird Innengebiet genannt. Das Außengebiet G_2 ist unbeschränkt.

Definition 4.4 Eine Kurve heißt stetig differenzierbar, wenn für sie eine stetig differenzierbare Parametrisierung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (C^1 -Parametrisierung) existiert. Eine C^1 -Parametrisierung mit der Eigenschaft $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ wird als regulär (oder glatt) bezeichnet. Singuläre Parameterwerte $t \in [a, b]$ sind solche mit $\varphi'(t) = 0$. Eine Kurve heißt stückweise differenzierbar, wenn sie aus endlich vielen differenzierbaren Kurvenstücken besteht.

Beispiel: (Neil'sche Parabel)

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (t^2, t^3) \quad t \in (-\infty, \infty) \\ \Gamma &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \geq 0, \quad y = \pm x^{\frac{3}{2}}\} \end{aligned}$$



$\varphi'(t) = (2t, 3t^2) = 0$ für $t = 0 \Rightarrow (0, 0)$ ist singulärer Punkt.

Kurvenlänge

Wir beschränken uns auf die Teilklasse der Jordan-Kurven mit Parameterabbildung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem kompakten Intervall $I = [a, b]$. Wir approximieren das Kurvenstück durch einen Polygonzug $P_Z(\Gamma)$ zu den Stützpunkten $\varphi(t_k), k = 0$ mit

$$|P_{Z_m}(\Gamma)| := \sum_{k=1}^m \underbrace{\|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\|}_{\text{euklidischer Abstand}}$$

Falls $L := \sup_{Z_m \in \mathcal{Z}(a,b)} |P_{Z_m}(\Gamma)| < \infty$, dann konvergieren für alle $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}(a,b)$ mit $|Z_k| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, die zugehörige Polygonzuglängen gegen L .

Definition 4.5 Ein Kurvenstück Γ heißt rektifizierbar mit der Länge $|\Gamma|$, wenn die Längen aller Polygonzüge $|P_Z(\Gamma)|$ gleichmäßig beschränkt sind mit

$$|\Gamma| := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a,b)} |P_Z(\Gamma)| = \lim_{\substack{Z \in \mathcal{Z}(a,b) \\ |Z| \rightarrow 0}} |P_Z(\Gamma)|$$

Satz 4.6 (Kurvenlänge) Ist die Parameterdarstellung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Kurvenstückes Γ stetig differenzierbar, so ist es rektifizierbar und seine Länge ist gegeben durch

$$|\Gamma| = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

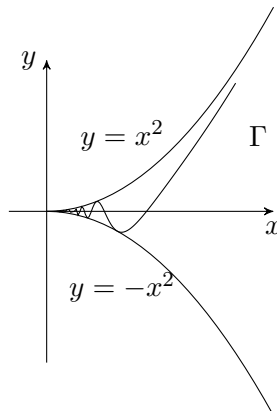
Diese Definition ist unabhängig von der stetig differenzierbaren Parametrisierung von Γ .

Beispiel: (Nicht rektifizierbare Jordan-Kurve)

$$\begin{cases} \varphi(t) = (t, t^2 \cos(\frac{\pi}{t^2})) \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ beschreibt eine ebene Jordan-Kurve Γ

Graph: $y = x^2 \cos(\frac{\pi}{x^2})$.



Die Abbildung φ ist offen stetig und wegen

$$\varphi'(t) = \left(1, 2t \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right) + 2\pi \frac{\sin\left(\frac{\pi}{t^2}\right)}{t}\right)$$

auch in $(0, 1]$ differenzierbar, aber mit nicht beschränkter Ableitung.

Wir betrachten die Zerlegung $Z_m = \{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}, t_2 = \frac{1}{\sqrt{m-1}}, \dots, t_{m-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, t_m = 1\}$ von $[0, 1]$ mit

$$\varphi(t_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{k} \cos(\pi k)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{(-1)^k}{k}\right) \quad k = 1, \dots, m$$

Es gilt aber für den zugehörigen Polygonzug

$$\begin{aligned} |P_{Z_m}(\Gamma)| &= \sum_{k=1}^m \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\| \\ &= \sum_{k=2}^m \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k-1}}\right)^2 + \left(\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\right)^2} \\ &\geq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \\ \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |P_Z(\Gamma)| &= \infty \end{aligned}$$

Definition 4.7 Für eine Funktion $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ von $[a, b]$ definieren wir die Variation von f bezüglich Z als

$$V_a^b(f; Z) := \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

und die totale Variation von f als

$$V_a^b(f) := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} V_a^b(f; Z).$$

Im Falle $V_a^b(f) < \infty$ wird f als Funktion von beschränkter Variation bezeichnet. Die Menge der Funktionen von beschränkter Variation auf I wird als $BV(I)$ bezeichnet.

Lemma 4.8 Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Es gilt:

(i) Eine monotone Funktion ist in $BV(I)$ und

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|.$$

(ii) Eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante L ist in $BV(I)$ und

$$V_a^b(f) \leq L|b - a|.$$

(iii) Eine stetig differenzierbare Funktion ist in $BV(I)$ und

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

(iv) Stückweise monotone oder stückweise stetige Funktionen sowie endliche Summen und Produkte solcher Funktionen sind in $BV(I)$.

(v) Sei $f \in BV(I)$ und $I = [a, b] = [a, c] \cup [c, b]$ mit $[a, c] \cup [c, b]$ nicht überlappend. Dann gilt

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Satz 4.9 Eine Kurve Γ mit Parametrisierung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann rektifizierbar, wenn die Koordinaten φ_i , $i = 1, \dots, n$ von beschränkter Variation sind.

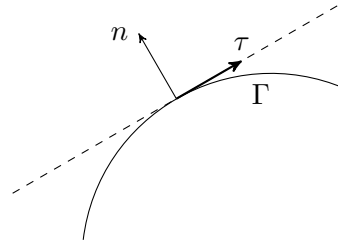
Beweis:

Sei $Z = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$. Für den zugehörigen Polygonzug gilt aufgrund der Beziehung

$$\begin{aligned} |x_i| \leq \|x\| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \max_{i=1, \dots, n} V_a^b(\varphi_i, Z) &= \max_{i=1, \dots, n} \sum_{k=1}^m |\varphi_i(t_k) - \varphi_i(t_{k-1})| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\| = |p_Z(\varphi)| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n |\varphi_i(t_k) - \varphi_i(t_{k-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n V_a^b(\varphi_i, Z) \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Betrachtung des Grenzüberganges $|Z| \rightarrow 0$, die behauptete Charakterisierung. \square

Definition 4.10 (Tangente) Sei Γ eine stetig differenzierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Für $t_0 \in [a, b]$ wird der Vektor $\varphi'(t_0)$ Tangentenvektor an die Kurve Γ im Punkt $\varphi(t_0)$ und die Gerade durch $\varphi(t_0)$ in Richtung $\varphi'(t_0)$ Tangente genannt.



Falls $\varphi'(t_0) \neq 0$ ist, ist der Tangenten-Einheitsvektor gegeben durch

$$\tau(t_0) := \|\varphi'(t_0)\|^{-1} \varphi'(t_0)$$

Definition 4.11 (Normalenebene) Sei Γ eine stetig differenzierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die zum Tangentenvektor $\varphi'(t_0)$ orthogonale Hyperebene durch den Punkt $\varphi(t_0)$ heißt Normalenebene und jeder im Punkt $\varphi(t_0)$ angeheftete Vektor in dieser Ebene heißt Normalenvektor zur Kurve Γ .

Definition 4.12 (Bogenlängenfunktion und Parametrisierung mit der Bogenlänge)

- (i) *Bogenlängenfunktion:* Sei Γ eine rektifizierbare Kurve mit regulärer Parametrisierung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Für $t \in [a, b]$ bezeichnen wir die Teilkurve mit der Parametrisierung $\varphi|_{[a,t]}$ als $\Gamma_{[a,t]}$. Die Bogenlängenfunktion ist definiert durch

$$s(t) := |\Gamma_{[a,t]}| = \int_a^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau, \quad t \in [a, b].$$

- (ii) *Parametrisierung mit der Bogenlänge:* Sei $t(s)$ die Umkehrfunktion der Bogenlängenfunktion. Dann ist $\psi(s) := \varphi(t(s))$, $s \in [0, |\Gamma|]$ ebenfalls eine Parametrisierung der Kurve Γ . Diese spezielle Parameterisierung wird als "Parameterisierung der Kurve Γ mit der Bogenlänge" bezeichnet.

Bemerkung:

Die Bogenlängenfunktion $s(t)$ ist stetig und wegen $\|\varphi'(t)\| > 0$, streng monoton wachsend. Daher existiert ihre Umkehrfunktion. Dies gilt auch für stückweise stetig differenzierbare φ .

Lemma 4.13 (Bogenlänge) Für die Parametrisierung $\psi : [0, |\Gamma|] \rightarrow \mathbb{R}^n$ einer Kurve mit der Bogenlänge gilt

$$\|\psi(s)'\| = 1$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= \psi'(t) \frac{d}{ds} t(s) \\ &= \varphi'(t) \left(\frac{d}{dt} s(t) \right)^{-1} \\ &= \varphi'(t) \|\varphi'(t)\|^{-1} \quad , \text{ da } s(t) = \int_a^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Für die zur Parametrisierung mit der Bogenlänge gehörende Bogenlängenfunktion gilt

$$|\Gamma_{[a,s]}| = \int_0^s \|\psi'(t)\| dt = s.$$

Definition 4.14 (Krümmung) Für eine Kurve $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ mit Bogenlänge $|\Gamma|$ und Parameterisierung $\psi : [0, |\Gamma|] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi \in C^2$ ist die Krümmung definiert durch

$$\kappa(s) := \|\psi''(s)\|, \quad s \in [0, |\Gamma|].$$

Beispiel:

Sei $K(0, r)$ die Kreislinie mit Radius r und Mittelpunkt 0. Dann gilt $|K| = 2\pi r$.

Wir betrachten folgende Parameterisierung: $x(s) = r \cos(\frac{s}{r})$, $y(s) = r \sin(\frac{s}{r})$ für $s \in [0, 2\pi r]$. Daraus folgt $\kappa(s) = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2} = \frac{1}{r}$. Die Krümmung einer Kreislinie nimmt also ab, wenn der Radius zunimmt.

Bemerkung:

$1 = \langle \psi'(s), \psi'(s) \rangle \Rightarrow \langle \psi''(s), \psi'(s) \rangle = 0 \Rightarrow \psi''(s) \perp$ Tangentenvektor $\psi'(s)$.

Im Fall $\psi''(s) \neq 0$ ist $n(s) := \|\psi''(s)\|^{-1} \psi''(s)$ der Hauptnormalenvektor zur Kurve Γ im Punkt $\psi(s)$.

Definition 4.15 (Kurvenintegral) Sei Γ eine rektifizierbare Kurve in \mathbb{R}^n mit einer C^1 -Parameterisierung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und Bogenlängenfunktion $s(t)$. Ist $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ entlang Γ stückweise stetig, so existiert das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} f(x(s)) ds := \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt$$

und hat für alle C^1 -Parameterisierungen von Γ denselben Wert.

Bemerkung:

Ein Kurvenintegral (Kurvenintegral erster Art) beschreibt die Integration einer reellwertigen Funktion entlang einer Kurve. Oft wird auch folgende (abkürzende) Notation verwendet: $\int_{\Gamma} f = \int_{\Gamma} f(x) ds$.

Definition 4.16 (Gradientenfeld) Ein Vektorfeld $v : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Gradientenfeld, wenn v der Gradient einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist:

$$v = \nabla f.$$

Die Funktion f wird als Stammfunktion von v bezeichnet, v wird auch Potentialfeld und $u = -f$ das Potential von v genannt.

Bemerkung:

Nicht jedes stetig differenzierbare Vektorfeld v hat eine Stammfunktion.

Beispiel: $v(x, y) := (y, 0)$.

Es muss gelten: $\begin{matrix} \partial_x f = y \\ \partial_y f = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \partial_y \partial_x f = 1 \\ \partial_x \partial_y f = 0 \end{matrix} \not\Leftarrow$ wegen Regularität von f .

Definition 4.17 (Wegintegral) Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbarer Jordan-Weg und $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ das durch diesen parametrisierte Jordan-Kurvenstück. Sei $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld mit $v = (v_1, \dots, v_n)$. Dann heißt

$$\int_{\Gamma} v(x(s)) \cdot ds := \int_a^b v(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b v_i(\varphi(t)) \varphi'_i(t) dt$$

das Wegintegral von v über Γ .

Das Vorzeichen des Wegintegrals hängt dabei von der Orientierung des Weges ab.

Bemerkung:

Das Wegintegral (Kurvenintegral 2. Art) beschreibt die Integration der Projektion einer vektorwertigen Funktion auf eine Kurve (genauer auf die Tangentialvektoren einer Kurve). Äquivalente Notationen sind $\int_{\Gamma} \langle v(x(s)), ds \rangle = \int_{\Gamma} \langle v(s), ds \rangle = \int_{\Gamma} v(s) \cdot ds = \int_{\Gamma} \langle v(x), ds \rangle = \int_{\Gamma} v(x) \cdot ds$.

Satz 4.18 (Wegunabhängigkeit)

- (i) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein nicht leeres, offenes und zusammenhängendes Gebiet und $v : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Für eine beliebige orientierte Jordan-Kurve $\Gamma \subset G$ ist das Wegintegral

$$I_{\Gamma}(v) = \int_{\Gamma} v(s) \cdot ds$$

genau dann wegunabhängig (das heißt der Wert hängt nur von den Endpunkten der Kurve ab), wenn v ein Gradientenfeld ist.

- (ii) Ist f eine Stammfunktion von v , so hat das Wegintegral über ein beliebiges Kurvenstück Γ mit den Endpunkten x^a, x^b den Wert

$$I_{\Gamma}(v) = f(x^b) - f(x^a).$$

Insbesondere gilt für alle geschlossenen Kurven μ : $I_{\mu}(v) = 0$.

- (iii) Umgekehrt erhält man ausgehend von einem festen Punkt $a \in G$ durch die Formel

$$f(x) := \int_{\Gamma(a,x)} v(s) \cdot ds \quad x \in G$$

eine Stammfunktion des Vektorfeldes v . Hierbei ist $\Gamma(a, x) \subset G$ eine beliebige Jordan-Kurve, die a mit x verbindet.

- (iv) Die Stammfunktion eines Vektorfeldes ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

4.2 Flächen in \mathbb{R}^3

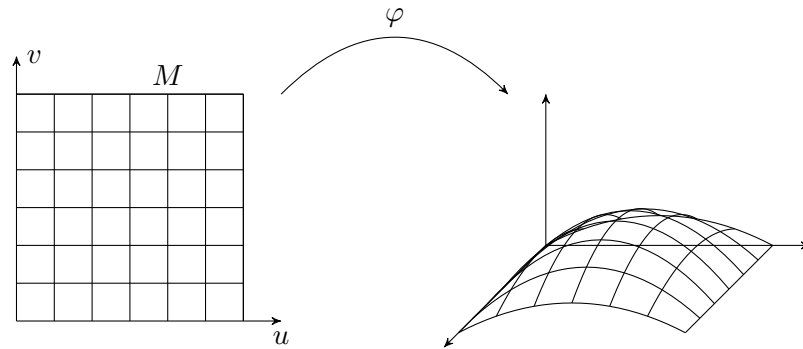
Definition 4.19

- (i) Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ ein quadrierbarer (=messbarer), offener Parameterbereich und $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine injektive, stetig differenzierbare (d. h. insbesondere Lipschitz-stetige) Abbildung mit der Eigenschaft:

$$\text{Rang}(\varphi(u, v)) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_x & \partial_u \varphi_y & \partial_u \varphi_z \\ \partial_v \varphi_x & \partial_v \varphi_y & \partial_v \varphi_z \end{pmatrix} = 2, \quad (u, v) \in M$$

Dann wird die Bildmenge $\Gamma = \varphi(M)$ eine offene reguläre Fläche mit Parametrisierung φ genannt.

(ii) Die Lipschitz-stetige Parameterabbildung $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ lässt sich zu einer ebenfalls Lipschitz-stetigen Abbildung $\bar{\varphi} : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ fortsetzen. Im Falle $\varphi(M) \cap \bar{\varphi}(\partial M) = \emptyset$ heißt dann $\bar{\Gamma} := \bar{\varphi}(\bar{M})$ eine abgeschlossene Fläche. Eine abgeschlossene Fläche ohne Rand heißt geschlossen.



Bemerkung:

Flächen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ können auf die folgenden Weisen gegeben sein:

- Durch eine Parameterdarstellung mit $M \subset \mathbb{R}^2$, $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\Gamma = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in M\}$$

Beispiel: Oberfläche $\Gamma(a, b, c)$ des Ellipsoids mit den Halbachsen $a, b, c > 0$ im \mathbb{R}^3

Parametrisierung: $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ (Kugelkoordinaten)

$$\varphi(u, v) := \begin{pmatrix} a \cos u \sin v \\ b \sin u \sin v \\ c \cos v \end{pmatrix}.$$

- Als Graph einer Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^2$

$$\Gamma = \{(u, v, F(u, v)) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in M\}$$

Beispiel: $(x, y) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, (\frac{u}{a})^2 + (\frac{v}{b})^2 \leq 1\}$, $z = F(x, y) := \pm c \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2}$

- Als Null-Niveaulinie einer Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x, y, z) = 0\}$$

Beispiel: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $\phi(x, y, z) := (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 - 1$

- Als Rand eines Gebietes $G \subset \mathbb{R}^3$ $\Gamma = \partial G$

Beispiel: $G := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3, (\frac{u}{a})^2 + (\frac{v}{b})^2 + (\frac{w}{c})^2 < 1\}$, $\Gamma = \partial G$.

Definition 4.20 (Koordinatenlinie, Tangentialebene, Normale) Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine offene reguläre Fläche mit der Parametrisierung $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $M \subset \mathbb{R}^2$

- (i) Für ein festes v ist $\varphi(\cdot, v)$ die Parametrisierung einer Kurve, welche in der Fläche verläuft und die Koordinatenlinie (u -Linie) genannt wird. Entsprechend ist die v -Linie für festes u definiert.
- (ii) Der Tangentialvektor der u -Linie im Flächenpunkt $\hat{x} = \varphi(\hat{u}) \in \Gamma$, $\hat{u} \in \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch $\partial_u \varphi(\hat{u})$. Entsprechend ist $\partial_v \varphi(\hat{u})$ der Tangentialvektor der v -Linie. Aufgrund der Rangbedingung sind die beiden Tangentialvektoren linear unabhängig und spannen die Tangentialebene $T(\hat{x})$ in \hat{x} auf:

$$T(\hat{x}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \hat{x} + \lambda \partial_u \varphi(\hat{u}) + \mu \partial_v \varphi(\hat{u}), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

(iii) Jeder in \hat{x} auf der Tangentialebene senkrecht stehende Vektor $n \neq 0$ heißt Normalenvektor oder Normale. Ein Normalenvektor mit $\|n\| = 1$ heißt Einheitsnormalenvektor und

$$n(\hat{u}) = \frac{\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi}{\|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\|}(\hat{u})$$

Bemerkung: $a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ ist das (äußere) Vektorprodukt von a und b .

Lemma 4.21

(i) Das Vektorfeld $a \times b$ steht senkrecht auf a und b , d. h.

$$a \times b \perp \text{span}\{a, b\}$$

(ii)

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin(\theta),$$

wobei θ der Winkel $\theta \in [0, 2\pi]$ zwischen a und b ist.

Beweis:

(i) Für Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$c \cdot (a \times b) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det(a, b, c),$$

wobei die Vektoren als Spaltenvektoren zu verstehen sind. Hieraus folgt, dass

$$a \cdot (a \times b) = 0 = b \cdot (a \times b).$$

(ii) Der Winkel θ zwischen $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist bestimmt durch

$$\cos(\theta) = \frac{a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|}.$$

Durch direktes Nachrechnen bestätigt man

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2.$$

Also folgt

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2(\theta) = \|a\|^2 \|b\|^2 \sin^2(\theta).$$

□

Definition 4.22 Eine offene reguläre Fläche Γ heißt orientierbar, wenn es möglich ist, auf ihr eine stetige Einheitsnormalenfunktion

$$n : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \|n(x)\| = 1, \quad x \in \Gamma$$

zu definieren.

Beispiel:

Das Möbius-Band ist eine nicht orientierbare Fläche, da die Parametrisierung ϕ nicht injektiv ist.

Lemma 4.23 Sei $\bar{\Gamma}$ eine abgeschlossene Fläche mit der Parametrisierung $\varphi : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf einem zusammenhängenden Parameterbereich \bar{M} . Die Parameterabbildung φ sei auf einer offenen Umgebung U von \bar{M} definiert, stetig differenzierbar und injektiv. Dann ist die abgeschlossene Fläche $\bar{\Gamma}$ orientierbar.

Definition 4.24 Für eine reguläre, abgeschlossene Fläche $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ mit Parametrisierung $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist der Flächeninhalt $|\Gamma|$ wie folgt definiert:

$$|\Gamma| := \int_M \|\partial_u \varphi(u, v) \times \partial_v \varphi(u, v)\| d(u, v).$$

Bemerkung:

Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von φ existiert das Riemann-Integral.

Satz 4.25 Der Inhalt $|\Gamma|$ einer regulären Fläche $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ ist unabhängig von ihrer (stetig differenzierbaren) Parametrisierung.

Definition 4.26 (Flächenintegral) Sei Γ ein (offenes, reguläres) Flächenstück in \mathbb{R}^3 mit der Parametrisierung $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M \subset \mathbb{R}^2$ und $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte (stückweise stetige) Funktion. Ein Flächenintegral von f über Γ ist erklärt durch

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds := \int_M f(\varphi(u, v)) \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| d(u, v),$$

falls das rechte Integral existiert.

Bemerkung:

Da ∂M eine Nullmenge ist, spielt es dabei keine Rolle, ob über M oder \bar{M} integriert wird. Der Wert des Flächenintegrals ist unabhängig von der speziellen Parametrisierung.

Korollar 4.27 Ist das Flächenstück Γ als Graph einer Funktion $z := \psi(x, y)$, $(x, y) \in M$ gegeben, so lautet die Formel für das Flächenintegral:

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_M f(x, y, \psi(x, y)) \cdot \sqrt{1 + \partial_x \psi^2 + \partial_y \psi^2} d(x, y).$$

Beweis:

Für das Flächenintegral mit allgemeiner Parametrisierung $\varphi = \varphi(u, v)$ ist

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_M f(\varphi(u, v)) \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| d(u, v)$$

Für $\varphi(x, y) = (x, y, \psi(x, y))$ gilt

$$\begin{aligned} \|\partial_x \varphi \times \partial_y \varphi\| &= \|(1, 0, \partial_x \psi) \times (0, 1, \partial_y \psi)\| \\ &= \|(-\partial_x \psi, -\partial_y \psi, 1)\| \\ &= \sqrt{(\partial_x \psi)^2 + (\partial_y \psi)^2 + 1} \end{aligned}$$

□

4.3 Integralsatz von Gauß in \mathbb{R}^2

Wir erklären folgende Notation im \mathbb{R}^n für Funktionen $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: $\nabla \cdot v(x) := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v_i(x)$. Wir wollen nun zeigen:

$$\int_M \nabla \cdot v(x(s)) ds = \int_{\partial M} v(x(s)) \cdot n(x(s)) ds$$

Definition 4.28 (Normalbereich) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ heißt y -Normalbereich, wenn es ein Intervall $[a, b]$ und zwei stetige Funktionen $\varphi_*, \varphi^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi_* \leq \varphi^*$ gibt, so dass

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi_*(x) \leq y \leq \varphi^*(x)\}$$

Entsprechend ist ein x -Normalbereich definiert. Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich, wenn sie sowohl x -Normalbereich, als auch y -Normalbereich ist.

Bemerkung:

- Ein Normalbereich ist abgeschlossen und quadrierbar.
- Konvexe Mengen mit stückweise glatten Rändern sind in endlich viele Normalbereiche zerlegbar.

Satz 4.29 (Gauß'scher Integralsatz in \mathbb{R}^2) Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich, dessen Rand ∂M eine stückweise glatte (rektifizierbare) Jordan-Kurve ist, und sei $v : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_M \nabla \cdot v(x) dx = \int_{\partial M} v(x(s)) \cdot n(x(s)) ds,$$

wobei n der äußere Normalenvektor zu ∂M ist.

Beispiel:

Auf einer kompakten Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit glattem Rand wird das Vektorfeld $v(x) = x$ betrachtet. Es gilt

$$\nabla \cdot v = \partial_x x + \partial_y y = 2$$

und somit nach dem Satz von Gauß

$$|M| = \frac{1}{2} \int_M \nabla \cdot v(x) dx \stackrel{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{2} \int_{\partial M} x \cdot n \, ds$$

Speziell für den Einheitskreis $K_1(0)$ ist $n = x$ entlang $\partial K_1(0)$ und somit

$$|K_1(0)| = \frac{1}{2} \int_{\partial K_1(0)} x' n ds = \frac{1}{2} \int_{\partial K_1(0)} \|x\|^2 ds = \pi$$

Beweis:

- (i) Ein y -Normalbereich M ist quadrierbar, und für das Integral einer Funktion $f \in C(M, \mathbb{R})$ gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int_M f(\xi) d\xi = \int_a^b \int_{\varphi_*(x)}^{\varphi^*(x)} f(x, y) dy dx$$

$$\xi = (x, y)$$

Die geschlossene Randkurve ∂M besteht aus den folgenden 4 Jordan-Kurvenstücke.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &:= \{\xi \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b], y = \varphi_*(x)\} \\ \Gamma_2 &:= \{\xi \in \mathbb{R}^2; x = b; y \in [\varphi_*(b), \varphi^*(b)]\} \\ \Gamma_3^- &:= \{\xi \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b], y = \varphi^*(x)\} \\ \Gamma_4^- &:= \{\xi \in \mathbb{R}^2, x = a; y \in [\varphi_*(b), \varphi^*(b)]\} \\ \partial M &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3^- \cup \Gamma_4^- \end{aligned}$$

„-“ bedeutet, dass der Weg in negative Richtung durchlaufen wird.

Seien nun $f \in C(M, \mathbb{R}), \partial_y f \in C(M, \mathbb{R})$. Durch Anwendung des Satzes von Fubini und des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir

$$\int_M \partial_y f(\xi) d\xi = \int_a^b \int_{\varphi_*(x)}^{\varphi^*(x)} \partial_y f(x, y) dy dx = \int_a^b f(x, \varphi^*(x)) dx - \int_a^b f(x, \varphi_*(x)) dx.$$

Die rechte Seite kann als ein Kurvenintegral entlang $\Gamma_1 \cup \Gamma_3^-$ interpretiert werden (s.u.). Die Randkomponente Γ_1 sei mit $\varphi(x) := (x, \varphi_*(x))$, $x \in [a, b]$ parametrisiert. Bezüglich dieser Parametrisierung ist der äußere Normaleinheitsvektor zu Γ_1 gegeben durch

$$n = \frac{(\varphi'_y, -\varphi'_x)}{\|\varphi'\|} = \frac{(\varphi'_*, -1)}{\sqrt{1 + |\varphi'_*|^2}} =: (n_x, n_y)^T$$

Nach der Definition des Kurvenintegrals gilt:

$$\int_{\Gamma_1} f(x(s))n_y(s)ds = \int_a^b f(x, \varphi_*(x))n_y(x)\|\varphi'(x)\|dx = - \int_a^b f(x, \varphi_*(x))dx.$$

Analog finden wir wegen der Orientierung der äußeren Normalen entlang Γ_3^-

$$\int_{\Gamma_3^-} f(x(s))n_y(s)ds = \int_a^b f(x, \varphi^*(x))n_y\|\varphi'(x)\|dx = \int_a^b f(x, \varphi^*(x))dx.$$

Entlang der vertikalen Randkomponenten $\Gamma_2 \cup \Gamma_4^-$ ist $n_y = 0$. Wir bekommen

$$\int_M \partial_y f(\xi)d\xi = \int_{\partial M} f(x(s))n_y(s)ds$$

Da M auch x -Normalbereich ist, erhalten wir analog für $g \in C(M, \mathbb{R})$ mit $\partial_x g \in C(M, \mathbb{R})$

$$\int_M \partial_x g(\xi)d\xi = \int_{\partial M} g(x(s))n_x(s)ds.$$

Ist $(v_x, v_y) := v : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so erhalten wir für $g := v_x$, $f := v_y$ die Gauß'sche Integralformel für Normalbereiche:

$$\int_M (\partial_x v_x + \partial_y v_y)(\xi)d\xi = \int_{\partial M} \{v_x(x(s))n_x(s) + v_y(x(s))n_y(s)\}ds.$$

- (ii) Sei M durch endlich viele glatte Jordan-Kurvenstücke in Normalbereiche zerlegbar, dann gilt die Gauß'sche Integralformel für jeden einzelnen dieser Normalbereiche.

□

4.4 Integralsatz von Gauß in \mathbb{R}^3

Definition 4.30 (Normalgebiet) Eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^3$ heißt z -Normalgebiet, wenn es eine differenzierbare, quadrierbare Menge G_z der (x, y) -Ebene mit stückweise glatter Randkurve ∂G_z und zwei (stückweise) stetig differenzierbare (und somit Lipschitz-stetige) Funktionen $\varphi_*, \varphi^* : \bar{G}_z \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi_* < \varphi^*$ gibt, so dass

$$G := \{\xi = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in G_z, \varphi_*(x, y) < z < \varphi^*(x, y)\}.$$

Entsprechend sind x - und y -Normalgebiete definiert.

Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^3$ heißt Normalbereich, wenn sie ein Normalbereich bezüglich aller drei Raumrichtungen ist.

Satz 4.31 (Gauß'scher Integralsatz in \mathbb{R}^3) Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ offen und Normalgebiet und $v : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges und in G stetig differenzierbares Vektorfeld mit beschränkter Ableitung. Dann gilt

$$\int_G \nabla \cdot v(x)dx = \int_{\partial G} v(x(s)) \cdot n(x(s))ds,$$

wobei n der äußere Normaleneinheitsvektor zu ∂G ist.

Bemerkung:

Die Aussage gilt auch, wenn sich G durch endlich viele reguläre Flächenstücke in Normalgebiete zerlegen lässt.

Bemerkung:

Für eine skalare Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_G \partial_i f(x) dx = \int_{\partial G} f(x(s)) n_i(x(s)) ds \quad (i = 1, \dots, n)$$

mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor $n = (n_1, \dots, n_n)$.

Korollar 4.32 (Green'sche Formel) *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.31 seien $f, g : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit beschränkten stetigen zweiten Ableitungen auf G . Dann gilt:*

1. Green'sche Formel

$$\int_G \Delta f(x) g(x) dx = \int_{\partial G} \partial_n f(x(s)) g(x(s)) ds - \int_G \nabla f(x) \nabla g(x) dx.$$

2. Green'sche Formel

$$\int_g (\Delta f(x) g(x) - f(x) \Delta g(x)) dx = \int_{\partial G} (\partial_n f(x(s)) g(x(s)) - f(x(s)) \partial_n g(x(s))) ds.$$

Beweis:

Wer wenden den Gauß'schen Satz auf das stetige Vektorfeld $v := (\nabla f)g$ an.

$$\int_G \nabla \cdot ((\nabla f)g) dx = \int_G (g \Delta f + \nabla f \cdot \nabla g) dx = \int_{\partial G} \underbrace{g n \cdot \nabla f}_{g \partial_n f} ds = \int_{\partial G} g \partial_n f ds.$$

Die 2. Green'sche Formel erhalten wir durch zweimalige Anwendung der Ersten.

$$\begin{aligned} \int_G (g \Delta f - f \Delta g) dx &= \int_{\partial G} g \partial_n f ds - \int_G \nabla \cdot f \nabla g dx - \int_G f \partial_n g ds + \int_G \nabla f \cdot \nabla g dx \\ &= \int_{\partial G} (g \partial_n f - f \partial_n g) ds. \end{aligned}$$

□

Beispiel:

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, ein Normalgebiet mit glattem Rand. Anwendung der 1. Green'schen Formel auf eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit beschränkter Ableitung und $g \equiv 1$ ergibt die Gleichung

$$\int_G \Delta f(x) dx = \int_{\partial G} \partial_n f(x) ds.$$

4.5 Integralsatz von Stokes

Voraussetzungen:

Wir betrachten ein Gebiet G in der Parameterebene (u, v) , das von einer stückweise glatten geschlossenen Jordan-Kurve $\gamma = \partial G$ begrenzt wird (G hat also keine Löcher). Sei

$$\varphi(\tau) = (u(\tau), v(\tau)), \quad 0 \leq \tau \leq |\gamma|$$

eine Parametrisierung von γ mit der Bogenlänge, welche eine positive Orientierung von γ erzeugt.

Auf einer offenen Umgebung U des Abschlusses \bar{G} sei $\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetige Abbildung derart, dass $\phi(U)$ eine offene Fläche in \mathbb{R}^3 ist.

Wir betrachten die abgeschlossene Fläche $\Gamma := \phi(\bar{G})$. Der Rand $\partial \Gamma$ ist dann eine geschlossene, stückweise glatte Jordan-Kurve $C = \partial \Gamma$ mit der Parametrisierung $x = \psi(\tau) := \phi(\varphi(\tau))$, $0 \leq \tau \leq |\gamma|$.

Satz 4.33 (Stokes'scher Integralsatz) Für eine abgeschlossene Fläche $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ mit zweimal stetig differenzierbarer Parametrisierung $\phi : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sollen die obigen Voraussetzungen gelten. Für ein auf einer offenen Umgebung V von Γ stetig differenzierbares Vektorfeld $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt dann

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times f(x(s))) \cdot n(x(s)) ds = \int_{\partial\Gamma} f(x(s)) ds$$

bzw.

$$\int_G (\nabla \times f)(\phi(u, v)) (\partial_u \phi \times \partial_v \phi)(u, v) d(u, v) = \int_0^{|\gamma|} f(\psi(\tau)) \psi'(\tau) d\tau.$$

Beispiel (Anwendung):

Auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ sei ein Vektorfeld $v : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben (zum Beispiel ein Magnetfeld). Die Größe

$$F_v(\Gamma) := \int_{\Gamma} v(x) \cdot n(x) ds$$

bezeichnet man als den Fluss des Feldes durch die Fläche und das Wegintegral entlang der geschlossenen Jordan-Kurve $\gamma \subset G$, $Z_v(\gamma) := \int_{\gamma} v(x(s)) \cdot ds$, als Zirkulation des Feldes längs der Kurve.

Der Integralsatz von Stokes besagt dann: Die Zirkulation des Feldes v entlang einer geschlossenen Kurve ist gleich dem Fluss durch die in der Kurve eingespannte Fläche.

- Sei v ein Kraftfeld. Die Zirkulation bedeutet eine Arbeit angewendet bei der Verschiebung eines Massenpunktes entlang der Kurve. Ist das Feld rotationsfrei (konservativ), so ist diese Arbeit Null.
- Beispiel aus der Elektrodynamik: Sei $E = E(x, t)$ die Stärke eines elektrischen Felds, $H = H(x, t)$ die magnetische Feldstärke. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} E(x, t) d\tau = -\frac{\mu}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} H(x, t) \cdot n(x) ds \quad (\text{Induktionsgleichung}).$$

Mit dem Stokes-Integralsatz folgt hieraus

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times E(x, t)) \cdot n(x) ds = -\frac{\mu}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} H(x, t) \cdot n(x) ds.$$

Da diese Gleichung für jede reguläre Fläche $\Gamma \subset G$ gelten soll, folgt die punktweise Beziehung mit der Rotation des Feldes

$$\nabla \times E(x, t) = -\frac{\mu}{c} \frac{dH}{dt}(x, t) \quad x \in G, t \geq 0.$$

Dies wird manchmal als 2. Hauptgleichung der Elektrodynamik bezeichnet. Es ist μ die magnetische Permeabilität und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

5 Das Lebesgue Integral

Der Riemann'sche Integralbegriff im \mathbb{R}^n , den wir im ersten (für $n = 1$) und dritten Kapitel kennengelernt haben, eröffnet uns die Möglichkeit zur Berechnung einer sehr großen Klasse von Integralen und reicht für viele praktisch relevante Konfigurationen aus. Es ermöglicht darüber hinaus eine sehr anschauliche und intuitive Einführung. Es hat jedoch auch einige wesentliche Schwachpunkte. So ist die Notwendigkeit der Unterscheidung zwischen eigentlichen und uneigentlichen Integralen oftmals beschwerlich, und gerade in höheren Dimensionen ($n \geq 2$) gestalten sich zahlreiche Beweise sehr technisch (man denke etwa an den Transformationssatz). Der zentrale Nachteil besteht jedoch in der Unvollständigkeit gewisser Funktionenmengen (etwa des Raumes $C(\Omega)$ der stetigen Funktionen auf einer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) bezüglich der Konvergenz in gewissen Integralnormen (etwa der L^2 -Norm, die die Konvergenz im quadratischen Mittel beschreibt). Die Vollständigkeit ist jedoch insbesondere für Existenzaussagen, z. B. Existenz von Lösungen bestimmter partieller Differentialgleichungen, oftmals unverzichtbar. Aus diesem Grund müssen wir den Raum $C(\Omega)$ erweitern, doch auch der Raum der Riemann-integrierbaren Funktionen erweist sich noch als zu klein. Erst der Raum $L^2(\Omega)$ der im Quadratsinne Lebesgue-integrierbaren Funktionen ist reichhaltig genug. Wir wollen daher in diesem Kapitel den Riemann'schen Integralbegriff erweitern. Wesentliche Unterschiede im Vergleich zum bislang bekannten Riemann-Integral sind wie folgt gegeben:

- An einigen Stellen sind anstatt endlicher Zerlegungen (etwa des Integrationsbereichs Ω) abzählbar unendliche Zerlegungen zugelassen.
- Unbeschränkte Integrationsgebiete Ω sind zugelassen.
- Unbeschränkte Integranden $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sind zugelassen.

Es gibt mehrere alternative Zugänge zum Lebesgue-Integral. Alle führen aber zu denselben Ergebnissen. Wir verfahren in weitgehender Analogie zur Einführung des Riemann-Integrals.

5.1 Lebesgue-Maß und messbare Mengen.

Wir wollen einer möglichst großen Klasse von Mengen A des \mathbb{R}^n einen Inhalt beziehungsweise ein *Maß* zuordnen. Wir verwenden dazu endliche oder abzählbar unendliche Überdeckungen

$$\bigcup_i I_i \supset A$$

durch (beschränkte offene, abgeschlossene oder auch halb-offene) kartesische Intervalle, d. h.

$$I_i = I_i^1 \times \cdots \times I_i^n \subset \mathbb{R}^n.$$

Dabei sind auch degenerierte Intervalle zugelassen. Für den Inhalt eines Intervalls I gilt:

$$|I| := |I^1| \cdot \cdots \cdot |I^n|$$

Definition 5.1 (Äußeres Lebesgue-Maß) *Das äußere Lebesgue-Maß einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert durch*

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_i |I_i|, A \subset \bigcup_i I_i \right\}$$

Bemerkung:

- Dabei darf die Indexmenge im Gegensatz zur Definition des äußeren Jordan-Inhaltes auch unbeschränkt sein. In diesem Fall kann das äußere Lebesgue-Maß auch den Wert $\mu^*(A) = \infty$ annehmen.
- Es wird $\mu^*(\emptyset) = 0$ gesetzt.

- Wir erweitern die Arithmetik der reellen Zahlen auf $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, sodass

$$\begin{aligned} a + \infty &:= \infty & \forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ a \cdot \infty &:= \infty & \forall a \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \\ 0 \cdot \infty &:= 0 \end{aligned}$$

Damit ist die Multiplikation in $\overline{\mathbb{R}}$ immer definiert. Dagegen bleiben Ausdrücke der Form „ $\infty - \infty$ “ undefiniert.

- Das Lebesgue-Integral wird wieder mit Hilfe von Ober- und Untersumme bezüglich endlicher oder auch abzählbar unendlicher Zerlegungen definiert werden.
- Im Fall von unbeschränkten Funktionen benötigen wir hierfür Regeln für Reihen mit Gliedern aus $\overline{\mathbb{R}}$. Für $0 \leq a_k \leq \infty$ ist $S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wohldefiniert mit dem Wert $S_\infty = \infty$ im Falle von divergenten Reihen, oder wenn ein $a_k = \infty$ ist.

Für $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Wir werden außerdem unendliche doppelt indizierte Summen betrachten:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right)$$

Diese Beziehung gilt, falls mindestens eine der Summen in \mathbb{R} (!) absolut konvergiert oder falls $0 \leq a_{ij} \leq \infty$ für alle Summanden gilt.

Bemerkung:

- $0 \leq \mu^*(A) \leq \infty$
- $\mu^*({a}) = 0$

Lemma 5.2 Für das äußere Lebesgue-Maß gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Aus $A \subset B$ folgt $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (Monotonie)
- (ii) Für endliche oder abzählbare Mengen $(A_i)_i$ gilt $\mu^*(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mu^*(A_i)$ (σ -Subadditivität)
- (iii) Für beschränkte Mengen $|A|_i \leq \mu^*(A) \leq |A|_a$ (das heißt für Jordan-quadrierbare Mengen) ist $\mu^*(A) = |A|$, d. h. hier stimmen Jordan-Inhalt und äußeres Lebesgue-Maß überein.
- (iv) Das äußere Lebesgue-Maß ist bewegungs-invariant, das heißt invariant gegenüber Translationen, Spiegelungen und Drehungen.

Definition 5.3 (Lebesgue-Nullmenge) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit äußerem Lebesgue-Maß $\mu^*(A) = 0$ wird Lebesgue-Nullmenge (oder einfach Nullmenge) genannt .

Bemerkung:

Gilt eine Aussage „fast überall in A “, so gilt sie für alle Punkte von A bis auf die aus einer Nullmenge.

Lemma 5.4 Die Vereinigung von abzählbar vielen Lebesgue-Nullmengen ist wieder eine Lebesgue-Nullmenge. Insbesondere sind abzählbare Mengen Lebesgue-Nullmengen.

Beweis:

Dies folgt aus der σ -Subadditivität des äußeren Lebesgue-Maßes μ^* . \square

Bemerkung:

Aus dem Lemma 5.4 folgt, dass zum Beispiel die Menge $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Mit Hilfe des äußeren Lebesgue-Maßes wollen wir ein Mengen-Maß definieren, welches zusätzlich zu den Eigenschaften des Jordan-Inhaltes (Positivität, Bewegungsinvarianz, Normierung und endliche Additivität) noch die σ -Additivität besitzt, das heißt

$$A_i \subset \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{N}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j) \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

„Ähnlich wie der Jordan-Inhalt kann auch das Lebesgue-Maß nicht für alle Mengen des \mathbb{R}^n definiert werden, nicht einmal für $n = 1$ und $n = 2$. Wir beschränken uns daher sogleich auf eine geeignete Teilklasse von Mengen des \mathbb{R}^n .

Definition 5.5 (Mengenalgebra) Die Menge von nichtleeren Teilmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ (Potenzmenge) heißt Algebra auf X , wenn sie X und \emptyset enthält und wenn mit $A, B \in \mathcal{A}$ auch $A \setminus B$, $A \cup B$, $A \cap B \in \mathcal{A}$. Sie heißt σ -Algebra, wenn zusätzlich mit $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ auch $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Bemerkung:

Eine Algebra ist nach Definition abgeschlossen bezüglich (mengentheoretischer) Differenzenbildung, das heißt mit $A \in \mathcal{A}$ ist auch $X \setminus A \in \mathcal{A}$, und bezüglich endlicher Vereinigung, das heißt $A, B \in \mathcal{A}$, ist auch $A \cup B \in \mathcal{A}$

Eine σ -Algebra ist zusätzlich noch abgeschlossen bezüglich abzählbar unendlicher Vereinigung.

Für beliebige, paarweise disjunkte Mengen $A_i \in \mathcal{A} \quad (i \in \mathbb{N})$ ist

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}.$$

Beispiel:

- (i) Für eine Menge X ist $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ die kleinste Algebra und die Potenzmenge $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ die größte σ -Algebra auf X .
- (ii) Für $X = \mathbb{R}^n$ heißt die kleinste σ -Algebra, die alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen von X enthält, die Borel'sche σ -Algebra (Borel-Mengen)
- (iii) Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-quadrirbare Menge, so ist die Menge der Jordan-quadrirbaren Teilmengen von X eine Algebra (aber keine σ -Algebra).
- (iv) Für eine Menge X und Teilmenge $A \subset X$ ist $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c := X \setminus A, X\}$ die kleinste σ -Algebra, die A enthält.

Bemerkung:

Die Menge $A := [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, die ein nichtleeres äußeres Maß ($\mu^*(A) = 1$) hat, kann nicht durch Intervallsummen von innen approximiert werden.

Wir kommen nun zur Definition des Lebesgue-Maßes. Obwohl man auch hier ein inneres Lebesgue-Maß μ_* definieren könnte (das aber *nicht* analog zum inneren Jordan-Inhalt erklärt sein kann), beschreiten wir hier einen etwas anderen Weg, der von Caratheodory angegeben wurde und nur das äußere Maß μ^* benutzt.

Definition 5.6 (Lebesgue Maß) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt Lebesgue-messbar (oder schlicht messbar), wenn mit jeder Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

In diesem Fall wird $\mu(A) := \mu^*(A)$ das Lebesgue-Maß von A genannt. Die Menge der Lebesgue-messbaren Teilmengen des \mathbb{R}^n sei mit \mathcal{L}_μ bezeichnet.

Lemma 5.7 Für die Menge $\mathcal{L}_\mu \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ der Lebesgue-messbaren Mengen des \mathbb{R}^n gelten folgende Aussagen:

- (i) Jede Lebesgue-Nullmenge ist in \mathcal{L}_μ .
- (ii) \mathcal{L}_μ ist eine Algebra.
- (iii) Alle Jordan-quadrierbaren Mengen sind in \mathcal{L}_μ .

Satz 5.8 (i) Die Menge $\mathcal{L}_\mu \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ der Lebesgue-messbaren Mengen des \mathbb{R}^n bildet (über Aussage (ii) des obigen Lemmas hinaus) eine σ -Algebra, das heißt mit $A, B, A_i \in \mathcal{L}_\mu$ sind auch

$$A^c, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, \bigcap_i A_i, \bigcup_i A_i \text{ in } \mathcal{L}_\mu.$$

Diese enthält alle Jordan-quadrierbaren Mengen.

(ii) Das Lebesgue-Maß ist auf \mathcal{L}_μ bewegungsvariant und stimmt auf den Jordan-quadrierbaren Mengen mit dem Jordan-Inhalt überein. Für $A, B, A_i \in \mathcal{L}_\mu$ gilt:

$$\begin{aligned} \mu(A \setminus B) &= \mu(A) - \mu(B) \text{ für } B \subset A, \mu(B) \leq \infty \\ \mu\left(\bigcup_i A_i\right) &= \sum_i \mu(A_i) \text{ für } A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \\ \mu\left(\bigcup_i A_i\right) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) \text{ für } A_i \subset A_{i+1} \\ \mu\left(\bigcap_i A_i\right) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) \text{ für } A_{i+1} \subset A_i, \mu(A_1) < \infty \end{aligned}$$

Lemma 5.9

- (i) Für die Differenz zweier beliebiger Intervalle $I, J \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine endliche, disjunkte Darstellung $I \setminus J = \bigcup_{i=1}^m I_i$ als Intervallsumme.
- (ii) Jede endliche oder abzählbar unendliche Vereinigung von Intervallen $S = \bigcup_i I_i$ besitzt eine Darstellung als Vereinigung $S = \bigcup_j J_j$ endlich beziehungsweise abzählbar unendlich vieler paarweise disjunkter Intervalle J_j .
- (iii) Jede offene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich als Vereinigung von höchstens abzählbar vielen, paarweise disjunkten Intervallen I_i darstellen, so dass gilt:

$$A = \bigcup_i I_i, \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

Korollar 5.10 Die Menge $\mathcal{L}_\mu \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ enthält alle offenen und abgeschlossenen Mengen des \mathbb{R}^n sowie die abzählbaren Schnitte (sogenannte G_σ -Mengen) und Vereinigungen (sogenannte F_γ -Mengen).

Bemerkung:

Dennoch gibt es Teilmengen des \mathbb{R}^n , die nicht Lebesgue-messbar sind, d. h. $\mathcal{L}_\mu \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Derartigen Mengen muss man aber mit dem Auswahl-Axiom bzw. dem Zorn'schen Lemma konstruieren.

5.2 Das Lebesgue-Integral

Das Lebesgue-Integral wird analog wie das Riemann-Integral mit Hilfe von Unter- und Obersummen eingeführt, wobei die Arithmetik in $\overline{\mathbb{R}}$ ist, und Zerlegungen in abzählbar viele messbare Mengen statt endlich viele quadrierbare Mengen verwendet werden.

Konstruktion:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge. Wir betrachten abzählbare Zerlegungen $Z = \{B_i\}$ von D in messbare Teilmengen $B_i \in \mathcal{L}_\mu$, sodass

$$D = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Die Menge aller derartiger Zerlegungen Z wird mit $\mathcal{Z}(D)$ bezeichnet. Die Feinheit der Zerlegung Z ist definiert durch

$$|Z| := \sup_{B_i \in Z} \mu(B_i)$$

Wir sagen $Z' \succ Z$ (Z' ist Verfeinerung von Z), wenn alle B'_j Teilmengen gewisser B_j sind. Sei $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, dann definieren wir eine Unter- und Obersumme durch

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) &:= \sum_{i=1}^{\infty} \inf_{x \in B_i} f(x) \mu(B_i), \\ \overline{S}_Z(f) &:= \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{x \in B_i} f(x) \mu(B_i). \end{aligned}$$

Eine Lebesgue'sche Summe ist mit Punkten $\xi_i \in B_i$ weiterhin gegeben durch

$$LS_Z(f, \xi) := \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i) \mu(B_i).$$

Bemerkung:

Für eine unbeschränkte Funktion kann es passieren, dass $\overline{S}_Z(f) = \infty$, während $\sup_{k \in \mathbb{N}} \overline{S}_{Z_k}(f) < \infty$ für andere Zerlegungen gilt.

Beispiel: $D = (0, 1]$ $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$

Im Allgemeinen wird $\overline{S}_Z(f) = \infty$ sein (zum Beispiel für jede endliche Zerlegung). Für die Zerlegung

$$Z^* := \left\{ B_i = \left(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i} \right], i \in \mathbb{N} \right\}$$

gilt $\sup_{x \in B_i} f(x) = \sqrt{i+1}$. Dies impliziert

$$\overline{S}_{Z^*}(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \sqrt{i+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\sqrt{i+1}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{3}{2}}} < \infty.$$

Der eben beschriebene Sachverhalt erfordert die ausdrückliche Formulierung der folgenden Bedingung.

Definition 5.11 (Bedingung (Z)) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Wir sagen, dass eine Funktion $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die Eigenschaft (Z) besitzt, wenn eine Zerlegung $Z^* := \{B_i^*\} \subset \mathcal{Z}(D)$ existiert, sodass die zugehörige Obersumme von $|f|$ endlich ist:

$$\overline{S}_{Z^*}(|f|) < \infty.$$

Damit sind dann auch die Ober- und Untersummen von f zu jeder Verfeinerung von Z^* endlich und konvergieren absolut. Diese Klasse von Zerlegungen $Z^* \in \mathcal{Z}(D)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{Z}_f^*(D)$.

Lemma 5.12 (i) Die Eigenschaft (Z) einer Funktion $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ impliziert, dass die Menge der Singularitäten $\sum_f := \{x \in D : f(x) = \pm\infty\}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, das heißt $\mu^*(\sum_f) = 0$.

(ii) Ferner gilt mit einer Zerlegung $Z^* \in \mathcal{Z}_f^*(D)$:

(a) Für Verfeinerungen $Z, Z' \in \mathcal{Z}(D)$ von Z^* mit $Z' \succ Z$ gilt

$$-\infty < \underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z'}(f) \leq \overline{S}_{Z'}(f) \leq \overline{S}_Z(f) < \infty.$$

(b) Für beliebige Verfeinerungen $Z, Z' \in \mathcal{Z}(D)$ von Z^* gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_{Z'}(f).$$

(c) Für jede Verfeinerung $Z \in \mathcal{Z}(D)$ von Z^* gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq LS_Z(f, \xi) \leq \overline{S}_Z(f),$$

und für alle $\epsilon > 0$ gibt es Sätze von Punkten $\xi_i \in B_i^*$ und $\eta_i \in B_i^*$, so dass für die zugehörigen Lebesgue-Summen gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - LS_Z(f, \xi) &\leq \epsilon \\ LS_Z(f, \eta) - \underline{S}_Z(f) &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Wir definieren für Funktionen mit Eigenschaft (Z) das Unter- und Oberintegral:

$$\begin{aligned} \underline{J}(f) &= \int_D f(x) dx := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(D), Z \succ Z^*} \underline{S}_Z \\ \overline{J}(f) &= \int_D f(x) dx := \inf_{Z \in \mathcal{Z}(D), Z \succ Z^*} \overline{S}_Z \end{aligned}$$

Wir bekommen:

$$\begin{aligned} \underline{J}(f) &\leq \overline{J}(f) \\ \overline{J}(f) &= -\underline{J}(-f) \end{aligned}$$

Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Zerlegungen $Z^* \in \mathcal{Z}_f^*(D)$

Definition 5.13 (Lebesgue-Integral) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Sind für eine Funktion $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit Eigenschaft (Z) ihr Ober- und Unterintegral gleich, so heißt der gemeinsame Wert das Lebesgue-Integral von f über D ,

$$\int_D f(x) dx := J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f),$$

und die Funktion f wird Lebesgue-integrierbar genannt. Man schreibt dann: $f \in L(D)$.

Alle Riemann-integrierbaren Funktionen sind Lebesgue-integrierbar. Der Integralwert ist gleich.

Lemma 5.14 (Eigenschaften des Lebesgue-Integrals)

(i) $f \in L(D)$ genau dann, wenn die Bedingung (Z) gilt und für alle $\epsilon > 0$ eine Zerlegung $Z_\epsilon \in \mathcal{Z}(D)$ existiert mit

$$\overline{S}_{Z_\epsilon}(f) - \underline{S}_{Z_\epsilon}(f) < \epsilon \quad (\text{Lebesgue'sches Integrationskriterium}).$$

(ii) Ist $f \in L(D)$ fast überall in D gleich $g : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, so ist auch $g \in L(D)$ und $J(f) = J(g)$.

(iii) Für $f, g \in L(D)$ mit $f \leq g$ fast überall in D gilt $J(f) \leq J(g)$ (Monotonie).

(iv) $L(D)$ ist ein Vektorraum, und das Lebesgue-Integral ist ein lineares Funktional auf $L(D)$, das heißt für $f, g \in L(D)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in L(D)$ und

$$J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g).$$

(v) Ist $f \in L(D)$ und $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit $\varphi(0) = 0$, so ist $\varphi \circ f \in L(D)$. Also gilt auch $|f|, f^+, f^- \in L(D)$.

(vi) Sei $Z = \{B_k\} \in \mathcal{Z}(D)$ eine disjunkte Zerlegung und $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \cup \{0\}$ eine beliebige Funktion. Ist $f \in L(D)$, so ist für $k \in \mathbb{N}$ auch $f \in L(B_k)$, und umgekehrt

$$\int_D f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} f(x) dx$$

Satz 5.15 Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist f auf D auch Lebesgue-integrierbar, und die entsprechenden Integrale haben denselben Wert.

Bemerkung:

Das Lebesgue-Integral ist eine echte Erweiterung des Riemann-Integrals; es gilt zum Beispiel:

$$f(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar, aber wegen $f = 0$ fast überall ist f Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Bemerkung:

Das Lebesgue-Integral lässt sich analog zum Riemann-Integral auch für $f = (f_1, \dots, f_d) : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^d$ komponentenweise definieren.

Satz 5.16 (Dreiecksungleichung) Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^d$ Lebesgue-integrierbar, so ist für jede Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^d auch $\|f(\cdot)\|$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\left\| \int_D f(x) dx \right\| \leq \int_D \|f(x)\| dx.$$

Integrabilitätskriterium

Wir führen nun das wichtige Konzept der Messbarkeit von Funktionen ein.

Definition 5.17 (Messbare Funktion) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt Lebesgue messbar (messbar), wenn für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden Mengen Lebesgue-messbar sind:

$$N_\alpha^>(f) := \{x \in D : f(x) > \alpha\}.$$

Lemma 5.18 Sind $f_k, f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, so sind auch die folgenden Funktionen messbar:

- $\inf_k f_k(x), \sup_k f_k(x), \liminf_k f_k(x), \limsup_k f_k(x)$
- $f^+ := \max\{f, 0\}, f^- := \max\{-f, 0\}$
- $|f|^p$ für $p > 0$
- $f + g, \alpha f$ für $\alpha \in \mathbb{R}, f \cdot g, \frac{1}{f}$ für $f \neq 0$

sofern die Funktionen von D nach $\overline{\mathbb{R}}$ wohldefiniert sind.

Lemma 5.19 Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar, so ist f messbar.

Satz 5.20 Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, so ist eine messbare Funktion $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit Eigenschaft (Z), für die $J(f) < \infty$ gilt, Lebesgue-integrierbar. Insbesondere ist eine messbare Funktion $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar, falls sie eine Lebesgue-integrierbare Majorante $g \in L(D)$ besitzt, das heißt falls $|f| \leq g$ gilt.

5.3 Konvergenzsätze

In der Einleitung dieses Kapitels hatten wir versucht, die Erweiterung des Integrals hin zur Lebesgue'schen Integrationstheorie zu motivieren. Ein weiterer Nachteil des Riemann-Integrals, aus dem sich letztlich die bereits erwähnte Unvollständigkeit des Raumes $R(\Omega)$ der auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Riemann-integrierbaren Funktionen bzgl. der L^2 -Norm ergibt, ist die nur unter starken Einschränkungen mögliche Vertauschung von Riemann-Integral und Limesbildung.

Wir wenden uns daher nun der Vertauschbarkeit des Lebesgue-Integrals mit Konvergenzprozessen zu und führen die wichtigsten diesbezüglichen Konvergenzsätze an. Dabei werden wir sehen, dass die genannte Vertauschung von Integral und Limes in der Lebesgue'schen Theorie unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen gilt.

Satz 5.21 (Beppo Levi, monotone Konvergenz) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge nicht negativer Funktionen $f_k \in L(D)$, $f_k \geq 0$ mit $\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_D f_k(x) dx < \infty$. Dann konvergieren die f_k fast überall in D gegen eine Lebesgue-integrierbare Grenzfunktion $f \in L(D)$, und es gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_D f_k(x) dx = \int_D \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int_D f(x) dx.$$

Dies bedeutet gerade, dass Integral und Limesbildung vertauscht werden dürfen.

Korollar 5.22 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge nicht negativer Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f_k : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_D \sum_{k=1}^n f_k(x) dx < \infty.$$

Dann ist die Reihe

$$s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \in L(D),$$

und es gilt

$$\int_D s(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_D f_k(x) dx.$$

Korollar 5.23 (Satz von Beppo-Levi für Funktionen ohne Vorzeichenbedingung) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monotone Folge von Funktionen $f_k \in L(D)$ mit $f_k : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \int_D f_k(x) dx \right| < \infty.$$

Dann ist $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ Lebesgue-integrierbar und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_D f_k(x) dx = \int_D \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int_D f(x) dx.$$

Korollar 5.24 (Lemma von Fatou) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge nicht negativer Funktionen $f_k \in L(D)$ mit der Eigenschaft

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_D f_k(x) dx < \infty.$$

Dann gilt

$$\int_D \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_D f_k(x) dx.$$

Ist zusätzlich

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \leq g$$

mit einem $g \in L(D)$, so gilt

$$\int_D \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_D f_k(x) dx.$$

6 Grundlagen der Funktionentheorie*

WICHTIG: Das gesamte folgende Kapitel wurde ausschließlich in der Zentralübung besprochen und ist daher NICHT relevant für die Klausur!!!

Der gesamte bisherige Stoff der Vorlesung gründet auf der Annahme, dass wir als Grundmenge den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen wählen. Deshalb spricht man spezifischer auch von *reeller Analysis*. Legt man alternativ der Differential- und Integralrechnung den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen zugrunde, so lässt sich völlig analog eine *komplexe Analysis* aufbauen, die auch als *Funktionentheorie* bekannt ist. In diesem Kapitel besprechen wir die Grundzüge dieser Theorie, die gegenüber der reellen Analysis manche Veränderung bringt, oftmals sogar eher im Sinne einer Vereinfachung.

6.1 Der Körper der komplexen Zahlen*

Zunächst wiederholen wir die wesentlichen Begriffe im Zusammenhang mit komplexen Zahlen. Die komplexen Zahlen entstehen durch eine Erweiterung der Menge der reellen Zahlen. Warum sollte man diese Menge aber erweitern wollen? Gehen wir dazu einen Schritt zurück und erinnern uns, warum wir die reellen Zahlen aus der Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen konstruiert haben. Nachdem in den rationalen Zahlen die einfachen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) mit Ausnahme der (verbotenen) Division durch 0 uneingeschränkt ausführbar sind, stört uns aber nach wie vor die Unlösbarkeit der Gleichung

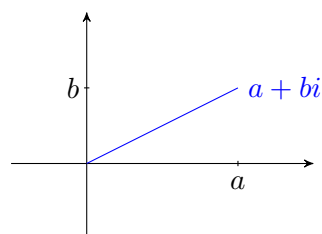
$$x^2 = 2$$

in \mathbb{Q} . Tatsächlich lässt sich einfach zeigen, dass eine Lösung dieser Gleichung nicht rational sein kann. Deshalb erweitert man \mathbb{Q} durch Bildung von Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen zur grösseren Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen, die zusätzlich auch noch die irrationalen Zahlen enthält. Man kann in \mathbb{R} auch eine Unterscheidung treffen zwischen den reell-algebraischen Zahlen (alle rationalen Zahlen und generell alle (reellen) Nullstellen von Polynomen mit rationalen Koeffizienten, also insbesondere auch Wurzeln aus rationalen Zahlen) und den transzendenten Zahlen, zu denen etwa die Kreiszahl π oder die Euler-Konstante e gehören.

Leider gibt es Gleichungen, die auch in \mathbb{R} keine Lösung besitzen. Das einfachste Beispiel ist die Gleichung

$$x^2 = -1.$$

Da in \mathbb{R} die Anordnungsaxiome erfüllt sind, kann man folgern, dass das Quadrat einer jeden reellen Zahl stets nichtnegativ sein muss. Um nun obige Gleichung lösen zu können, definiert man das Symbol $i := \sqrt{-1}$, die sogenannte imaginäre Einheit. Mithilfe dieses Symbols ordnet man jedem Paar (a, b) reeller Zahlen die neue 'Zahl' $z := a + bi$ zu, man interpretiert also den zweidimensionalen Raum \mathbb{R}^2 um in die sog. Gauß'sche Ebene \mathbb{C} der komplexen Zahlen.



Hierbei nennt man a den Realteil von z (kurz: $\operatorname{Re}z$) und b den Imaginärteil von z (kurz: $\operatorname{Im}z$). Ohne auf die Details einzugehen, führen wir nun die wesentlichen Begriffe auf der Menge

$$\mathbb{C} := \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

der komplexen Zahlen ein, um dort rechnen zu können. Dabei sind wichtig die Rechenoperationen der Addition und Multiplikation, die komplexe Operation der Konjugation sowie die komplexe Betragsbildung.

Im Folgenden seien $z = a + bi$, $z_1 = a_1 + b_1i$ und $z_2 = a_2 + b_2i$ komplexe Zahlen. Wir definieren unter Verwendung der reellen Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze sowie der Definition $i := \sqrt{-1}$ die folgenden Operationen:

1. Addition: $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = a_1 + b_1i + a_2 + b_2i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.
2. Multiplikation:
 $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.
3. Konjugation: $z = a + bi \implies \bar{z} := a - bi$.
4. Betragsbildung: $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Wir verzichten darauf, Beispiele zu geben, da sich diese aus den Definitionen leicht gewinnen lassen.

Bemerkung 6.1 *Alle oben genannten Operationen lassen sich in der komplexen Ebene veranschaulichen. So ist die Konjugation gerade die Spiegelung einer komplexen Zahl an der reellen Achse, und der Betrag einer komplexen Zahl misst deren Abstand zum komplexen Nullpunkt. Beachte die Übereinstimmung der komplexen Betragsdefinition mit der euklidischen Norm in \mathbb{R}^2 .*

6.2 Holomorphe Funktionen; die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen*

Wir betrachten im Folgenden komplexwertige (kurz: komplexe) Funktionen $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, wobei D eine offene Teilmenge von \mathbb{C} ist. Ist D darüber hinaus zusammenhängend, so heißt D Gebiet. Dieses ist im Folgenden unsere Standardvoraussetzung an den Definitionsbereich der Funktion f und gilt, sofern wir nicht explizit etwas anderes annehmen. Damit eine Funktion komplexwertig sein kann, muss jeder Bildwert wieder einen Real- und einen Imaginärteil haben. Wir schreiben daher mit zwei reellen Komponentenfunktionen u und v :

$$z = x + yi \mapsto u(x, y) + v(x, y)i =: f(z),$$

d. h. es gilt $\operatorname{Re}(f) = u$ und $\operatorname{Im}(f) = v$.

Beispiel 6.2

- 1) $f(z) = e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x (\cos(y) + \sin(y)i) = e^x \cos(y) + e^x \sin(y)i$,
- 2) $f(z) = z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

Im zweiten Beispiel ist etwa $u(x, y) = x^2 - y^2$ und $v(x, y) = 2xy$.

Bevor wir nun die Stetigkeit einer komplexen Funktion definieren, wollen wir zunächst klären, was es bedeutet, dass eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ komplexer Zahlen gegen eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ konvergiert.

Definition 6.3 *Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen. Diese Folge heißt konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn $|z_n - z| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dies ist gleichbedeutend mit $\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z$, also mit komponentenweiser reeller Konvergenz.*

Ist nun $D \subset \mathbb{C}$ eine Umgebung des Punktes $a \in \mathbb{C}$, und ist f in $D \setminus \{a\}$ erklärt, so schreiben wir kurz $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = b$ für alle Folgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

Definition 6.4 *Eine komplexe Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt stetig in einem Punkt $a \in D$, falls $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$. Sie heißt stetig in D , falls sie in jedem Punkt aus D stetig ist.*

Definition 6.5 *Eine komplexe Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt (komplex) differenzierbar in einem Punkt $a \in D$, wenn die komplexe Ableitung*

$$f'(a) := \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad \left(= \frac{d}{dz} f(a) \right)$$

existiert.

Es gelten folgende Eigenschaften:

1. Ist f in a komplex differenzierbar, so ist f in a stetig.
2. Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ in $a \in D$ komplex differenzierbar, so existieren

$$\begin{aligned} (i) \quad & (\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a), \\ (ii) \quad & (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \\ (iii) \quad & (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a). \end{aligned}$$

Letzteres setzt hierbei zusätzlich voraus, dass $g : D \rightarrow D'$ in $a \in D$ und $f : D' \rightarrow \mathbb{C}$ in $g(a) \in D'$ differenzierbar sind.

Definition 6.6 (Holomorphie) Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph in D , wenn f in jedem Punkt von D komplex differenzierbar ist und $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$ in D stetig ist. Die Menge aller in D holomorphen Funktionen bildet einen Vektorraum, der mit $\mathcal{O}(D)$ bezeichnet wird. Es gilt: $\mathcal{O}(D) \subset C^1(D; \mathbb{C})$.

Wir kommen nun zu einem wichtigen Satz, der deutlich macht, warum wir explizit von komplexer Differenzierbarkeit gesprochen haben und inwiefern sich diese von der bereits bekannten reellen Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^2 unterscheidet.

Satz 6.7 (Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen) Eine komplexe Funktion $f : z = x + yi \mapsto u(x, y) + v(x, y)i = f(z)$ ist genau dann holomorph, wenn u und v als reelle Komponentenfunktionen differenzierbar sind und wenn zusätzlich die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y), \quad \partial_x v(x, y) = -\partial_y u(x, y)$$

erfüllt sind. Dann gilt:

$$f'(x + yi) = \partial_x u(x, y) + \partial_x v(x, y)i = \partial_y v(x, y) - \partial_y u(x, y)i.$$

Beispiel 6.8

$$\begin{aligned} 1) \quad & f(z) = e^z : \quad e^z = e^x \cos(y) + e^x \sin(y)i \\ & \Rightarrow \partial_x u = e^x \cos(y) = \partial_y v \quad \wedge \quad \partial_x v = e^x \sin(y) = -\partial_y u \\ & \Rightarrow f'(z) = e^z = e^x \cos(y) + e^x \sin(y)i = \partial_x u + \partial_x v i, \\ 2) \quad & f(z) = z^2 : \quad z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \\ & \Rightarrow \partial_x u = 2x = \partial_y v \quad \wedge \quad \partial_x v = 2y = -\partial_y u \\ & \Rightarrow f'(z) = 2z = 2x + 2yi = \partial_x u + \partial_x v i. \end{aligned}$$

Beweis (von Satz 6.7):

(\Rightarrow) Sei f holomorph und $z_0 = x_0 + y_0 i \in D$ beliebig. Für reelle $h \neq 0, h \rightarrow 0$ gilt

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{h} \\ &= \partial_x u(x_0, y_0) + \partial_x v(x_0, y_0)i \end{aligned}$$

Andererseits gilt für reelle $h \neq 0$ mit $ih \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{ih} + i \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0) - v(x_0, y_0 + h)}{ih} \\ &= -i \partial_y u(x_0, y_0) + \partial_y v(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Ein Vergleich von Real- und Imaginärteilen ergibt nun, dass die Cauchy-Riemann'schen Gleichungen erfüllt sind.

(\Leftarrow) Seien $u, v : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und die Cauchy-Riemann'schen DGL seien erfüllt. Dann gilt für jedes feste $z_0 = x_0 + y_0i \in D$ und für $h = s + ti, |s|, |t| < 1$:

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) &= u(x_0 + s, y_0 + t) + v(x_0 + s, y_0 + t)i \\ &= u(x_0, y_0) + \partial_x u(x_0, y_0)s + \partial_y u(x_0, y_0)t + r_1(s, t) \\ &\quad + i(v(x_0, y_0) + \partial_x v(x_0, y_0)s + \partial_y v(x_0, y_0)t + r_2(s, t)) \end{aligned}$$

mit $\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{r_1(s, t)}{|h|} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{r_2(s, t)}{|h|} = 0$. Mit $r(s + ti) := r_1(s, t) + r_2(s, t)i$ und den Cauchy-Riemann'schen DGL erhalten wir

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + (\partial_x u(x_0, y_0) + \partial_x v(x_0, y_0)i)(s + ti) + r(h).$$

Daraus folgt wegen $h = s + ti$ mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$:

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \partial_x u(x_0, y_0) + \partial_x v(x_0, y_0)i.$$

□

Zum Schluss geben wir noch ein simples Standard-Beispiel für eine Funktion, die aufgefasst als Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, nicht jedoch komplex differenzierbar.

Beispiel 6.9 Sei $f(x, y) = (x, -y)^\top$. Die Jacobi-Matrix lautet $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Aufgefasst als komplexe Funktion ist f gerade die Konjugation, $f(z) = \bar{z}$. Diese ist wegen $\partial_x f_1(x, y) = 1 \neq -1 = \partial_y f_2(x, y)$ nicht holomorph, da die Cauchy-Riemann'schen DGL nicht erfüllt sind.

6.3 Komplexe Kurvenintegrale*

Wir beschreiben komplexe C^1 -Kurven Γ durch eine Parametrisierung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $t \mapsto \gamma(t) = x(t) + y(t)i$. Tangentenvektoren haben im Komplexen die Darstellung $\dot{\gamma}(t) = \dot{x}(t) + \dot{y}(t)i$. Wir nehmen Γ stets als orientiertes Kurvenstück an, d. h. γ beinhaltet implizit eine Orientierung. $-\Gamma$ bezeichnet dann das umgekehrt durchlaufene Kurvenstück, $-\gamma : [b, a] \rightarrow \mathbb{C}$ die dazugehörige Parametrisierung. Die Länge eines Kurvenstückes Γ mit Parametrisierung γ ist gegeben durch

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Stückweise glatte Kurven und Wege sind wie im reellen Fall definiert durch Aneinanderhängen von orientierten Wegstücken $\gamma_1, \dots, \gamma_N$. Wir schreiben dann $\gamma = \sum_{n=1}^N \gamma_n$ und $L(\Gamma) = \sum_{n=1}^N L(\Gamma_n)$.

Beispiel 6.10 Die Kreislinie mit Radius r um den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt $S_r(z_0)$ und wird z. B. parametrisiert durch $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\alpha(t) = z_0 + re^{it}$.

Es gilt folgende Variante der Kettenregel für eine holomorphe Funktion f auf der Spur $\Gamma \subset D$ des Weges $\gamma(t) \in C^1([a, b]; \mathbb{C})$:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t).$$

Definition 6.11 Für $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ mit $x, y \in C([a, b]; \mathbb{R})$ setzen wir

$$\int_a^b \gamma(t) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt.$$

Daraus folgt nach dem Hauptsatz der Analysis:

$$\int_a^b \dot{\gamma}(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a) = (x(b) - x(a)) + i(y(b) - y(a)).$$

[Komplexes Kurvenintegral] Wir sind nun in der Lage, komplexe Kurvenintegrale zu definieren.

Definition 6.12 Für einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ (stückweise C^1) und eine auf der Spur von γ stetige Funktion $f \in C((\gamma); \mathbb{C})$ wird durch

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

das komplexe Kurvenintegral erklärt.

Mit den Vektorfeldern $v := (\operatorname{Re}f, -\operatorname{Im}f) =: (P, -Q)$ und $w := (\operatorname{Im}f, \operatorname{Re}f) =: (Q, P)$ (wir haben an allen Größen die Argumente (x, y) unterdrückt) gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b [(\operatorname{Re}f \cdot \dot{\gamma}_1 - \operatorname{Im}f \cdot \dot{\gamma}_2) + i(\operatorname{Re}f \cdot \dot{\gamma}_2 + \operatorname{Im}f \cdot \dot{\gamma}_1)] dt \\ &= \int_a^b v(x, y) \cdot d(x, y) + i \int_a^b w(x, y) \cdot d(x, y). \end{aligned}$$

Wir können nun Integrale über Kreislinien berechnen und damit die Grundformeln der komplexen Integrationstheorie herleiten. Wir betrachten zunächst das Kurvenintegral über den Kreisrand $S_r(z)$ mit der Standardparametrisierung $\alpha(t) = z + re^{it}$. Es ergibt sich:

$$\int_{S_r(z)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) rie^{it} dt.$$

Ein Integral über eine Kreislinie wird auch mit dem Symbol $\oint_{\alpha} f(z) dz$ bezeichnet. Dieses Integral werden wir in den folgenden Abschnitten noch häufig brauchen. Mit seiner Hilfe erhalten wir schon jetzt:

$$(i) \oint_{S_r(z_0)} (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i, \quad (ii) \oint_{S_r(z_0)} (z - z_0)^k dz = 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}.$$

Dies rechnen wir direkt nach:

$$\begin{aligned} \oint_{S_r(z_0)} (z - z_0)^k dz &= \int_0^{2\pi} (z_0 + re^{it} - z_0)^k rie^{it} dt = ri \int_0^{2\pi} (re^{it})^k e^{it} dt \\ &= ir^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt = ir^{k+1} \int_0^{2\pi} [\cos((k+1)t) + i \sin((k+1)t)] dt \\ &= \begin{cases} 0, & k+1 \neq 0, \\ 2\pi i, & k+1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir beweisen nun abschließend noch einen Satz über komplexe Stammfunktionen. Diese und ähnliche Aussagen werden uns in den beiden folgenden Abschnitten oft begegnen. Dort werden auch die z. T. möglicherweise noch ungeklärten Begriffe definiert, die der folgende Beweis benötigt.

Satz 6.13 (Komplexe Stammfunktion) Sei $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit wegunabhängigem komplexem Kurvenintegral, d. h. für je zwei Wege γ_0, γ_1 in D mit gleichem Anfangs- und Endpunkt gilt:

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Wählt man nun einen festen Punkt $z_0 \in D$ und setzt

$$F(z) := \int_{z_0}^z f(\tilde{z}) d\tilde{z} := \int_{\gamma} f(\tilde{z}) d\tilde{z}$$

mit irgendeinem stetigen Verbindungsweg γ zwischen z_0 und z , so ist F eine holomorphe Funktion und stellt eine Stammfunktion für f dar. d. h. es gilt $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$.

Beweis: Schreibt man wie oben $F(z) = F(x + yi) = P(x, y) + Q(x, y)i$, dann gilt mit $f(x + yi) = p(x, y) + q(x, y)i$:

$$P(x, y) = \int_{z_0}^z (p dx - q dy), \quad Q(x, y) = \int_{z_0}^z (q dx + p dy).$$

Diese reellen Integrale sind wegunabhängig, also sind die Vektorfelder $(p, -q)$ und (q, p) konservativ, und P bzw. Q liefern zugehörige Potentiale. Also sind P und Q C^1 -Funktionen mit

$$\partial_x P = p, \quad \partial_y P = -q, \quad \partial_x Q = q, \quad \partial_y Q = p.$$

Offensichtlich erfüllen also P und Q die Cauchy-Riemann'schen DGL, d. h. F ist holomorph mit

$$F'(x + yi) = \partial_x P(x, y) + \partial_x Q(x, y)i = p(x, y) + q(x, y)i = f(x + yi).$$

□

6.4 Der Cauchy'sche Integralsatz*

Die Ergebnisse dieses und des nächsten, abschließenden Unterabschnittes sind eng verzahnt mit Ergebnissen aus der reellen Analysis, z. B. dem Integralsatz von Gauß, die Thema dieser Vorlesung waren. Wir wollen versuchen, die Bezüge zur reellen Analysis im Folgenden deutlich zu kennzeichnen, wollen aber anmerken, dass man die wesentlichen Aussagen auch mit rein funktionentheoretischen, d. h. komplexen Mitteln (und dann manchmal sogar schneller und eleganter) erhalten kann.

Wir beginnen mit dem folgenden Satz, der in \mathbb{R}^n die Gradientenfelder klassifiziert.

Satz 6.14 (Wegunabhängigkeit (reell)) Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ und ein stetiges Vektorfeld $v \in C(G; \mathbb{R}^n)$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

- (i) Es gibt ein Potential, d. h. eine Funktion $g \in C^1(G; \mathbb{R})$ mit $v = \text{grad } g$ (d. h. v ist ein Gradientenfeld).
- (ii) Für jeden geschlossenen Weg γ in G ist $\int_{\gamma} v(x) dx = 0$.
- (iii) Für Wege $\gamma_0 : [a_0, b_0] \rightarrow G$ und $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow G$ mit $\gamma_0(a_0) = \gamma_1(a_1)$ und $\gamma_0(b_0) = \gamma_1(b_1)$ gilt: $\int_{\gamma_0} v(x) dx = \int_{\gamma_1} v(x) dx$ (Wegunabhängigkeit des Integrals).

Beweis:

i) \Rightarrow ii)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} v(x) dx &= \int_a^b v(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_a^b \nabla g(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} g(\gamma(t)) dt \\ &= g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = 0. \end{aligned}$$

ii) \Rightarrow iii)

Betrachte die Wege $\gamma_0 : I_0 \rightarrow G$ mit $I_0 = [a, b]$ sowie $\gamma_1 : I_1 \rightarrow G$ mit $I_1 = [b, 2b - a]$. Definiere den Weg $\gamma_2 : I = I_0 \cup I_1 \rightarrow G$ durch $\gamma_2 \equiv \gamma_0$ auf I_0 und $\gamma_2(t) = \gamma_1(2b - t)$ auf I_1 . Dann gilt $\gamma_2(a) = \gamma_2(2b - a)$ (d. h. γ_2 ist geschlossen), und damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_2} v(x) dx = \int_{\gamma_0} v(x) dx + \int_b^{2b-a} v(\gamma_1(t)) \dot{\gamma}_1(t) dt \\ &= \int_{\gamma_0} v(x) dx - \int_a^b v(\gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t) dt = \int_{\gamma_0} v(x) dx - \int_{\gamma_1} v(x) dx. \end{aligned}$$

iii) \Rightarrow i)

Sei $a \in G$ fest gewählt. Sei für beliebiges $x \in G$ der stückweise stetige Weg γ_x mit $\gamma_x(0) = a$ und $\gamma_x(1) = x$ gegeben. Definiere damit die Funktion $g(x) := \int_0^1 v(\gamma_x(t)) \dot{\gamma}_x(t) dt$. Sie ist wohldefiniert, da das Wegintegral nach Voraussetzung nicht vom Weg abhängt, wenn Anfangs- und Endpunkt gleich sind. Für eine Kugel $K_\delta(x) \subset G$ haben wir mit $|h| < \delta$ für $j = 1, \dots, n$:

$$g(x + he_j) - g(x) = \int_{\gamma_{x+\sigma_j}} v(y) dy - \int_{\gamma_x} v(y) dy = \int_{\sigma_j} v(y) dy.$$

Hierbei ist $\sigma_j(\tau) = x + \tau he_j$ mit $\tau \in [0, 1]$ die Strecke von x nach $x + he_j$. Daraus folgt für $h \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{h}(g(x + he_j) - g(x)) = \frac{1}{h} \int_0^1 v(\sigma_j(\tau)) he_j d\tau = \int_0^1 v(x + \tau he_j) d\tau \rightarrow v_j(x).$$

Also ist $\partial_j g(x) = v_j(x)$ und somit $\text{grad } g = v$. □

Definition 6.15 (Wirbelfreies Vektorfeld) Ein Gradientenfeld $v \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ heißt wirbelfrei, wenn die Integrabilitätsbedingungen

$$\partial_i v_j(x) = \partial_j v_i(x)$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$ erfüllt sind.

Definition 6.16 (Homotopie) Zwei geschlossene Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ heißen homotop in G , falls eine stetige Abbildung $H : [0, 1]^2 \rightarrow G$ mit folgenden Eigenschaften existiert (eine solche Abbildung H heißt dann auch Homotopie in G):

- (i) $H(0, t) = \gamma_0(t)$ und $H(1, t) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [0, 1]$,
- (ii) $H(s, 0) = H(s, 1)$ für alle $s \in [0, 1]$.

Ein geschlossener Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ heißt nullhomotop in G , falls γ zu einem konstanten Weg $\gamma_c : [0, 1] \rightarrow x_0 \in G$ homotop ist.

Mit diesen Begriffen sind wir in der Lage, den folgenden Satz zu formulieren:

Satz 6.17 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ ein wirbelfreies Vektorfeld auf G . Für zwei in G homotope, geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Wege γ_0 und γ_1 gilt dann:

$$\int_{\gamma_0} v(x) dx = \int_{\gamma_1} v(x) dx,$$

d. h. das Integral ist wegunabhängig.

Wir wollen nun eine komplexe Fassung von Satz 6.14 anstreben, aus der wir dann ohne Weiteres den Cauchy'schen Integralsatz gewinnen können. Hierzu benötigen wir vorab folgende Definitionen:

Definition 6.18 (Wegzusammenhang) Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten x_0 und x_1 in G einen stetigen Verbindungsweg $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ gibt mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$.

Definition 6.19 (Einfacher Zusammenhang) Eine wegzusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ bzw. $D \subset \mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängend, wenn **jeder** geschlossene Weg in D nullhomotop ist.

Der einfache Zusammenhang einer Menge in \mathbb{R}^2 bedeutet also anschaulich: Im Inneren von D liegt kein Punkt aus dem Komplement von D bzw. D hat keine Löcher.

Wenn $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist, dann sind insbesondere für $(P, Q) := (\text{Re}f, \text{Im}f)$ die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt, d. h. es gilt $\partial_x P - \partial_y Q = 0$ und $\partial_y P + \partial_x Q = 0$. Dann

gilt $f'(z) = \partial_x P(z) + i\partial_x Q(z)$. Wir definieren nun mittels $\partial_x f := \partial_x P + i\partial_x Q$ und $\partial_y f := \partial_y P + i\partial_y Q$ die folgenden komplexen partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\partial_z f &:= \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f) = \frac{1}{2}(\partial_x P + i\partial_x Q - i\partial_y P + \partial_y Q) = \frac{1}{2}[(\partial_x P + \partial_y Q) - i(\partial_y P - \partial_x Q)], \\ \partial_{\bar{z}} f &:= \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f) = \frac{1}{2}(\partial_x P + i\partial_x Q + i\partial_y P - \partial_y Q) = \frac{1}{2}[(\partial_x P - \partial_y Q) + i(\partial_y P + \partial_x Q)].\end{aligned}$$

Damit liefern die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen für die Menge $\mathcal{O}(D)$ der holomorphen Funktionen auf D :

$$\mathcal{O}(D) = \{f \in C^1(D; \mathbb{C}) \mid \partial_{\bar{z}} f(z) = 0\} \text{ sowie } f'(z) = \partial_z f(z) \text{ für } f \in \mathcal{O}(D).$$

Seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f = P + iQ$ stetig. Nach Satz 6.14 sind Wegintegrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ in D genau dann wegunabhängig, wenn die reellen Vektorfelder $v = (P, -Q)$ und $w = (Q, P)$ Potentiale $A, B \in C^1(D; \mathbb{R})$ besitzen. Mit $F := A + iB \in C^1(D; \mathbb{C})$ gilt aber:

$$\text{grad } A = v \text{ und } \text{grad } B = w \iff \partial_{\bar{z}} F(z) = 0 \text{ und } \partial_z F(z) = f(z).$$

Denn mit $\partial_x A = P, \partial_y A = -Q, \partial_x B = Q, \partial_y B = P$ gilt zum Beispiel:

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}} F &= \frac{1}{2}\partial_x F + \frac{1}{2}i\partial_y F = \frac{1}{2}(\partial_x A + i\partial_x B) + \frac{1}{2}(i\partial_y A - \partial_y B) = \frac{1}{2}(\partial_x A - \partial_y B) + \frac{1}{2}i(\partial_y A + \partial_x B) \\ &= \frac{1}{2}(P - P) + \frac{1}{2}i(-Q + Q) = 0.\end{aligned}$$

Die andere Aussage rechnet man analog nach. Mit diesen Vorbereitungen können wir nun Satz 6.14 ins Komplexe übertragen.

Satz 6.20 (Wegunabhängigkeit (komplex)) Für ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ und eine stetige Funktion $f \in C(D; \mathbb{C})$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

- (i) Es existiert eine komplexe Stammfunktion zu f , d. h. es gibt $F \in \mathcal{O}(D)$ mit $F'(z) = f(z)$.
- (ii) Für jeden geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Weg γ in D ist $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.
- (iii) Für Wege $\gamma_0 : [a_0, b_0] \rightarrow D$ und $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow D$ mit $\gamma_0(a_0) = \gamma_1(a_1)$ und $\gamma_0(b_0) = \gamma_1(b_1)$ gilt: $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$ (Wegunabhängigkeit des Integrals).

Mit den obigen Ausführungen sehen wir: Die in der Definition

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b v(x, y) \cdot d(x, y) + i \int_a^b w(x, y) \cdot d(x, y)$$

auftretenden Vektorfelder v und w sind wirbelfrei genau dann, wenn die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen gelten, wenn also f holomorph ist. denn es gilt: $v := (\text{Re}f, -\text{Im}f) =: (P, -Q)$ und $w := (\text{Im}f, \text{Re}f) =: (Q, P)$. Aus dem Satz über die Wegunabhängigkeit der Integrale über wirbelfreie Vektorfelder folgt somit direkt der folgende Cauchy'sche Integralsatz:

Theorem 6.21 (Cauchy'scher Integralsatz) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(D)$. Für die Wegintegrale zweier in D homotoper geschlossener stückweise stetig differenzierbarer Wege γ_0 und γ_1 gilt dann: $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$. Ist γ ein in D nullhomotoper geschlossener stückw. stetig differenzierbarer Weg, so gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Als Folgerung erhalten wir sofort:

Korollar 6.22 Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann besitzt jede Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ eine komplexe Stammfunktion auf D .

6.5 Die Cauchy'schen Integralformeln*

Auch die Herleitung der Cauchy'schen Integralformeln wollen wir auf die reelle Analysis stützen. Wir rekapitulieren daher den Integralsatz von Gauß in der Ebene und leiten daraus den reellen Integralsatz von Green her. Dessen komplexe Formulierung wiederum führt uns auf die Integralformeln.

Theorem 6.23 (Integralsatz von Gauß in \mathbb{R}^2) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und offen mit stückweise glattem Rand ∂G . U sei eine offene Umgebung von \overline{G} und $v = (P, Q) \in C^1(U; \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_G \operatorname{div} v(x, y) d(x, y) = \int_{\partial G} v \cdot n ds.$$

Hierbei ist $\operatorname{div} v := \partial_x P + \partial_y Q$ die sog. Divergenz des Vektorfeldes v , und $n = (n_1, n_2)^\top$ ist der mit Ausnahme endlich vieler Punkte überall auf ∂G erklärte äußere Normalenvektor.

Dieser Satz wurde in ähnlicher Form bereits behandelt. Wir leiten daraus nun zunächst den Integralsatz von Green her (den man nicht mit den Green'schen Formeln verwechseln sollte!). Seien dazu in der Situation des Gauß'schen Satzes $v = (P, Q)$ und $w = (Q, -P)$ Vektorfelder, wobei w im Vergleich zu v um den Winkel $-\frac{\pi}{2}$, d. h. um einen rechten Winkel im Uhrzeigersinn (mathematisch negative Richtung) gedreht ist. Damit gelten mit dem Tangentialvektor $t = (t_1, t_2)^\top = (-n_2, n_1)^\top$, d. h. $t \cdot n = 0$ bzw. $t \perp n$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} w &= \partial_x Q - \partial_y P, \\ w \cdot n &= Qn_1 - Pn_2 = Pt_1 + Qt_2 = v \cdot t. \end{aligned}$$

Fasst man nun noch $v(x, y) = v(x, y, 0) := (P(x, y), Q(x, y), 0)$ als Vektorfeld über $U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ auf, so ist $(\operatorname{rot} v)_3 = \partial_x Q - \partial_y P = \operatorname{div} w$ die z -Komponente der Rotation von v . Dies liefert:

Satz 6.24 (Satz von Green) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und offen mit stückweise glattem Rand ∂G . U sei eine offene Umgebung von \overline{G} und $v = (P, Q) \in C^1(U; \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_G (\operatorname{rot} v(x, y))_3 d(x, y) = \int_{\partial G} v \cdot t ds.$$

Diese Fassung des Satzes von Gauß kann man auch komplex formulieren:

Satz 6.25 Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in C^1(D; \mathbb{C})$ und G beschränkt, offen und glatt berandet mit $\overline{G} \subset D$. Dann gilt:

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 2i \int_G \partial_{\bar{z}} f(z) dz.$$

Beweis:

Mit

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b v(x, y) \cdot d(x, y) + i \int_a^b w(x, y) \cdot d(x, y)$$

gilt für $v := (\operatorname{Re} f, -\operatorname{Im} f) =: (P, -Q)$ und $w := (\operatorname{Im} f, \operatorname{Re} f) =: (Q, P)$:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} v)_3 + i(\operatorname{rot} w)_3 &= -\partial_x Q - \partial_y P + i(\partial_x P - \partial_y Q) \\ &= 2i \left(\frac{1}{2} [(\partial_x P - \partial_y Q) + i(\partial_y P + \partial_x Q)] \right) = 2i \partial_{\bar{z}} f(z). \end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zur allgemeinen Cauchy'schen Integralformel, deren bekannteren Spezialfall (für holomorphe Funktionen) wir direkt im Anschluss ableiten.

Theorem 6.26 (Cauchy'sche Integralformel) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in C^1(D; \mathbb{C})$ und G beschränkt, offen und glatt berandet mit $\overline{G} \subset D$. Für $z \in G$ gilt dann:

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - 2i \int_G \partial_{\bar{\xi}} f(\xi) \frac{1}{\xi - z} d\xi.$$

Beweis:

Es gibt $\varepsilon > 0$ mit $\overline{K_\varepsilon}(z) \subset G$. Für die offene Menge $G_\varepsilon := G \setminus \overline{K_\varepsilon}(z)$, die stückweise glatt berandet ist, gilt $\partial G_\varepsilon = \partial G \cup S_\varepsilon(z)$. Die Funktion $h_z : \xi \rightarrow \frac{1}{\xi - z}$ ist auf G_ε holomorph, und mit der komplexen Fassung des Green'schen Satzes gilt für das Produkt $f \cdot h_z$ auf G_ε (wobei α die Standardparametrisierung der Kreislinie $S_\varepsilon(z)$ bezeichnet):

$$\int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \oint_{\alpha} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2i \int_{G_\varepsilon} \partial_{\bar{\xi}} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\xi = 2i \int_{G_\varepsilon} \partial_{\bar{\xi}} f(\xi) \frac{1}{\xi - z} d\xi,$$

da $\frac{1}{\xi - z}$ auf G_ε holomorph und daher $\partial_{\bar{\xi}} \frac{1}{\xi - z} = 0$. Es gilt nun

$$\oint_{\alpha} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i \varepsilon e^{it} dt = i \int_{-\pi}^{\pi} f(z + \varepsilon e^{it}) dt.$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert dieses Integral gegen $2\pi i f(z)$. Wir nehmen nun ohne Begründung zusätzlich an (dies ist aufwändiger zu zeigen, geht aber z.B. mit einer Ausdehnung der Lebesgue'schen Integrationstheorie auf \mathbb{C}), dass für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgende Konvergenz vorliegt:

$$\int_{G_\varepsilon} \partial_{\bar{\xi}} f(\xi) \frac{1}{\xi - z} d\xi \rightarrow \int_G \partial_{\bar{\xi}} f(\xi) \frac{1}{\xi - z} d\xi.$$

Dann gilt insgesamt:

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - 2i \int_G \partial_{\bar{\xi}} f(\xi) \frac{1}{\xi - z} d\xi.$$

□

Es ist klar, dass für holomorphes F , d. h. $\partial_{\bar{\xi}} f(\xi) = 0$, sofort folgt:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.} \quad (*)$$

In dieser Form trifft man die Cauchy'sche Integralformel zumeist in funktionentheoretischem Zusammenhang, da dort vorwiegend der Fall holomorpher Funktionen von Interesse ist.

Wir sehen an dieser Formel, dass sich die Funktionswerte holomorpher Funktionen f im Inneren von G vollständig durch die Funktionswerte von f auf dem Rand ∂G charakterisieren lassen. Ferner sehen wir anhand dieser Cauchy'schen Integralformel, dass eine einmal komplex differenzierbare (also holomorphe) Funktion f sogleich unendlich oft komplex differenzierbar ist. Wir wollen das kurz begründen:

Differenziert man die Formel (*) nach z (was wegen Holomorphie möglich ist), so ergibt sich

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} -\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \cdot (-1) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Nun sehen wir, dass die rechte Seite ohne Weiteres erneut nach z ableitbar ist (die Singularität z liegt nicht auf der Kurve, entlang derer wir integrieren). Also muss auch die linke Seite, $f'(z)$, wieder nach z differenzierbar sein. Dieses Argument lässt sich nun beliebig oft anwenden, und es ergibt sich die Formel

$$\boxed{f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi.}$$

Dieses Resultat steht in deutlichem Gegensatz zum reellen Fall, wo eine Funktion durchaus einmal differenzierbar sein kann, die Ableitung jedoch nicht erneut differenzierbar sein muss.

Beispiel 6.27 Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{für } x < 0, \\ \frac{x^2}{2} & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Dann ist f einmal stetig differenzierbar (dies liefert gerade die Betragsfunktion, d. h. $f'(x) = |x|$). Da diese jedoch nicht global differenzierbar ist (an der Knickstelle im Nullpunkt existiert die Ableitung nicht), gilt zwar $f \in C^1(\mathbb{R})$, aber $f \notin C^2(\mathbb{R})$.

Abschließend wollen wir uns nun noch kurz mit der Entwicklung einer holomorphen Funktion in eine Potenzreihe beschäftigen, was eine schöne Anwendung der Cauchy'schen Integralformel gestattet.

Satz 6.28 Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(D)$. Dann hat f um den Punkt $c \in D$ mit $K_\rho(c) \subset D$ die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - c)^k \quad \text{für } |z - c| < \rho \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\alpha} \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{k+1}} d\xi,$$

wobei $\alpha(t) = c + re^{it}$ mit $r < \rho$ wieder die Standardparametrisierung der Kreislinie darstellt.

Beweis:

Für $0 < r < \rho$, $z \in K_r(c)$ und $\xi \in S_r(c) := \partial K_r(c)$ gilt:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - c - z + c} = \frac{1}{\xi - c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-c}{\xi-c}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-c)^k}{(\xi-c)^{k+1}}.$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig in $\xi \in S_r(c)$. Aus der Cauchy'schen Integralformel (*) folgt also für $z \in K_r(c)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\alpha} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\alpha} f(\xi) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-c)^k}{(\xi-c)^{k+1}} d\xi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\alpha} \frac{f(\xi)}{(\xi-c)^{k+1}} d\xi \cdot (z-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k. \end{aligned}$$

□

Index

- Überdeckung, 20
- Anfangsbedingung, 25
- Anfangswertproblem, 25
- Banachraum, 17
- Bifurkation, 43
- Bogenlänge, 73
- Borel'sche σ -Algebra, 84
- Borel-Mengen, 84
- Cauchy'sche Integralformel, 99
- Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichung, 93
- Differentialgleichung
 - Fixpunkt, 42
 - gewöhnliche, 23
 - autonome, 25
 - explizite, 25
 - implizite, 25
 - inhomogene, 27
 - Ordnung einer, 25
 - skalare, 25
 - System von, 25
 - Gleichgewichtspunkt, 42
 - Kritischer Punkt, 42
 - lokale Lösung, 28
 - Stabilität, 44
 - Stabilitätsanalyse, 44
 - Stationärer Punkt, 42, 44
- Eigenvektor, 36
- Eigenwert, 36
- fast überall, 20
- Fixpunkt, 45
- Flächen in \mathbb{R}^3 , 74
- Flächeninhalt, 77
- Flächenintegral, 77
- Fundamentalsatz der Analysis, 8
- Fundamentalsystem, 34
- Gauß'scher Integralsatz in \mathbb{R}^2 , 78
- Gauß'scher Integralsatz in \mathbb{R}^3 , 79
- Gradientenfeld, 73
- Green'sche Formel, 80
- holomorphe Funktion, 93
- Homotopie, 97
- Instabilität, 44
- Integrabilitätskriterium, 88
- Integral
 - Integrationsformeln, 9
 - Linearität, 5
 - Mittelwertsatz, 7
 - Monotonie, 5
 - Ober- und Unterintegral, 3
 - Ober- und Untersummen, 2
 - Partielle Integration, 9
 - Riemann'sche Summe, 4
 - Riemann'sches Integrierbarkeitskriterium, 4
 - Riemann-Integral, 3
 - Stammfunktion, 8
 - Substitutionsregel, 10
 - Unbestimmtes, 8
 - Uneigentliches, 12
 - Singularität, 12
 - unendliche Intervalle, 13
 - Zusammengesetztes, 5
- Integralsatz von Cauchy, 98
- Integralsatz von Gauß in \mathbb{R}^2 , 77
- Integralsatz von Gauß in \mathbb{R}^3 , 79
- Integralsatz von Stokes, 80
- Jordan-Kasten, 39
- komplexe Potenzreihenentwicklung, 101
- Konvergenzsätze, 89
- Koordinatenlinie, 75
- Kurve, 15
 - \mathbb{R}^n
 - Jordan-Kurve, 69
 - Peano, 68
 - regulär, 69
 - stetig differenzierbar, 69
 - ebene, 15
 - geschlossene, 15
 - rektifizierbare, 16
 - geschlossen, 67
- Kurve in \mathbb{C} , 94
- Kurven in \mathbb{R}^n , 67
- Kurvenintegral in \mathbb{C} , 95
- Kurvenlänge, 16
- Kurvenlänge, 70, 73
- Kurvenstück, 15
- Lebesgue
 - Integrationskriterium, 87
 - Maß, 82, 84
 - Nullmenge, 83
- Lebesgue-Integral, 19
 - Eigenschaften, 87
 - Monotonie, 87
- Möbius-Band, 76
- Matrizen

- Jordan'sche Normalform, 40
- Lösungsraum, 34
- Menge
 - ausschöpfend, 64
- Messbare Funktion, 88

- Normalbereich, 77
- Normale, 75
- Normalebene, 72
- Normalgebiet, 79
- Nullmenge, 20

- Orientierbarkeit, 76

- Parametrisierung
 - Jordan-Weg, 69
- Phasenraum, 45
- Picard-Iteration, 32
- Polygonzug, 16
- Potential, 73
- Potentialfeld, 73

- Randbedingung, 25
- Randwertaufgabe, 25
- regulär, 57
- Richtungsfeld, 25

- Satz von Green, 99
- Stabilität, 44
 - asymptotische, 44
 - Lyapunov-, 44
- Stabilitätsanalyse, 46
- Stokes'scher Integralsatz, 81
- sukzessive Approximation, 32

- Tangente, 72
- Tangentialebene, 75
- Transformation
 - Integral, 61
- Trennung der Variablen, 26

- Variation, 71
 - beschränkt, 71
 - totale, 71
- Variation der Konstanten, 27
- Vektorfeld
 - wirbelfreies, 97
- Verzweigung, 43
- Vielfachheit
 - algebraische, 40
 - geometrische, 40

- Wegintegral, 74
- Wegunabhängigkeit, 96

- Zusammenfassung für lineare Systeme, 46
- Zusammenhang
 - einfacher, 97
 - Wegzusammenhang, 97
- Zustandsraum, 45