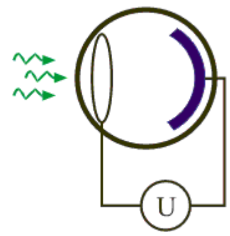
PEP 3 – Übungsblatt 5 – WS 2013/2014

Besprechung am 21./22. November 2013

5.1 Photoeffekt (10)

Eine Vakuumphotozelle wird nacheinander mit Licht unterschiedlicher Wellenlänge λ bestrahlt. Mit einem Voltmeter wird festgestellt, daß sich zwischen Kathode und Anode jeweils eine andere Spannung U einstellt.



(a) Erklären Sie, warum sich die Spannung U aufbaut. Begründen Sie, daß für die Energie E_{ph} der Photonen der Zusammenhang $E_{ph} = eU + W_a$ gilt, wobei W_a die Austrittsarbeit des Kathodenmaterials ist.

(b) Wie ursprünglich von R.A. Millikan durchgeführt (R.A. Millikan, Phys. Rev., 7 (1916), 355), wird nun eine mit Natrium beschichtete Kathode mit dem Licht einer Quecksilberdampflampe beschienen. Dabei wird mit Hilfe eines Prismenspektrometers jeweils nur eine Spektrallinie zur Beleuchtung ausgewählt und die Photospannung gemessen. Millikan's Ergebnisse sind in folgender Tabelle aufgelistet:

λ (nm)	312.5	365.0	404.7	433.9	546.1
U (V)	2.128	1.595	1.215	1.025	0.467

Erstellen Sie ein Diagramm, in dem die kinetische Energie der emittierten Elektronen (in eV) über der Lichtfrequenz aufgetragen ist. Wie können Austrittsarbeit W_a und Planck'sche Konstante h aus dem Diagramm ermittelt werden? Berechnen Sie die beiden Größen aus den gemessenen Daten.

Lösung:

(a) Das Licht löst aus der Photokathode Elektronen aus. Dank ihrer kinetischen Energie bewegen sich diese zur Anode. Durch diesen Vorgang kommt es zu einer positiven Aufladung der Kathode (Elektronenmangel) und einer negativen Aufladung der Anode (Elektronenüberschuß). Je höher die kinetische Energie der Elektronen ist, desto höher ist die Spannung, die sich zwischen Anode und Kathode aufbauen kann. Beim Photoeffekt gibt ein Photon (Energie E_{ph}) seine Energie an ein Elektron des Kathodenmaterials ab. Ein Teil der Photonenenergie dient dem Herauslösen des Elektrons aus der Kathode (Austrittsarbeit W_a), der restliche Energiebetrag liegt als kinetische Energie des Elektrons ($E_{\text{kin.el}}$) vor. Aufgrund des Energiesatzes gilt:

$$E_{ph} = E_{\text{kin,el}} + W_a. \tag{1}$$

Die kinetische Energie der Elektronen dient der Feldarbeit eU. Es gilt: $E_{\text{kin.el}} = eU$.

Man kann also für Gl.(1) auch schreiben: $E_{ph} = eU + W_a$.

(b) Um Werte für W_a und h zu erhalten, die mit den Meßerwerten konsistent sind: Ausgleichsgerade zeichnen.

$eU = E_{\text{kin.el.}} = E_{ph} - W_a$

$eU = h\nu - W_a$

$U = \frac{h}{e}(\nu - \frac{W_a}{h})$, Spannung U in V gegen Frequenz $\nu = c/\lambda$ in Einheiten von 10^{14} Hz auftragen.

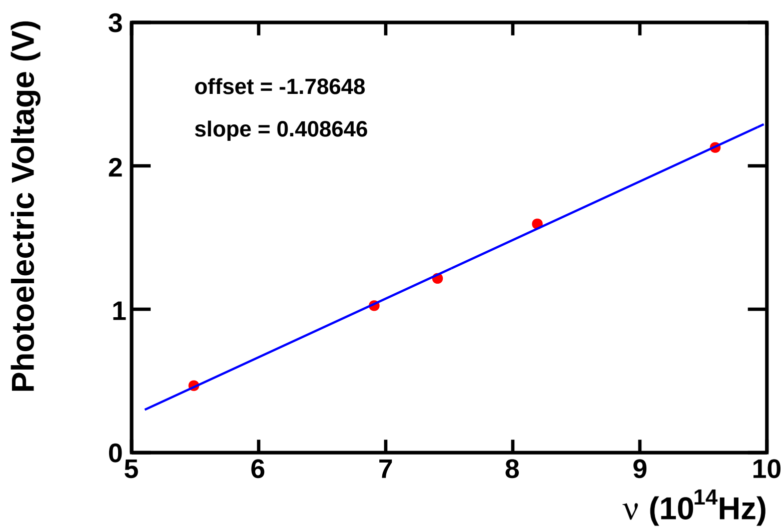
Steigung ist $\frac{h}{e}$, y-Achsenabschnitt ist $\frac{W_a}{e}$

Steigung aus linearer Regression ist 0.408646, Achsenabschnitt ist -1.78648 und damit unter Verwendung von $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$,

$h = 0.408646 \cdot 10^{-14} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}$ Js $= 6.538 \cdot 10^{-34}$Js. (Literaturwert $h = 6.6310^{-34}$ Js.)

Hinweise:

- Man soll sich angewöhnen zu den ermittelten Meßgrößen auch immer die Standardabweichungen anzugeben: $W = 1.78 \pm 0.05$ eV bzw. $h = (6.54 \pm 0.12)10^{-34}$ Js.
- Das Ganze läßt sich natürlich auch graphisch ermitteln.



5.2 Comptoneffekt (10)

(a) Erklären Sie den Compton-Effekt an Hand einer Modellvorstellung. Ist dieses Bild auch auf den Photoeffekt anwendbar? Vergleichen Sie dazu den Impuls eines Photons mit einer Energie von 10 eV mit dem Impuls des erzeugten Photoelektrons mit gleicher Energie (Austrittsarbeit vernachlässigt). Woher kommt der Impuls des Photoelektrons?

(b) Unter welcher Bedingung tritt eine maximale Wellenlängenänderung der einfallenden Strahlung auf? Berechnen Sie diese Wellenlängenänderung. Warum ist der Compton-Effekt bei Verwendung weicher Röntgenstrahlung ($\lambda > 10^{-10}$ m) nur schwer nachzuweisen?

(c) Nun sei die Energie der eingestrahlten Photonen gleich der Ruheenergie des Elektrons. Die Streustrahlung unter dem Winkel $\theta = 120°$ wird untersucht. Stellen Sie für diesen Fall die Wellenlänge λ' und den Impulsbetrag p' der gestreuten Photonen als Vielfache der entsprechenden Größen der einfallenden Strahlung dar. Bestimmen Sie die kinetische Energie des Rückstoßelektrons als Vielfaches der Ruheenergie des Elektrons.

Lösung:

(a) Man erklärt sich den Compton-Effekt als vollelastischen Stoß zwischen einem Photon und einem freien Elektron. Dabei gilt der Energiesatz und der vektorielle Impulssatz.

Photoeffekt: $p_\gamma = E/c = 5 \cdot 10^{-27}$ kg m/s.

$p_e = \sqrt{2mE} = 1.7 \cdot 10^{-24}$ kg m/s $\gg p_\gamma$.

Der Photoeffekt kann nicht als impulsiver Stoß beschrieben werden. Der Impuls des Photoelektrons kommt aus dem gebundenen Anfangszustand. Das zurückbleibende Ion kompensiert diesen Impuls.

(b) Streuwinkel $= 180°$. Die maximale Wellenlängenänderung beim Comptoneffekt ist $2 \cdot \lambda_C = 4.8 \cdot 10^{-12}$ m. Dies ist gegenüber der Wellenlänge von weichem Röntgenlicht, die bei 10^{-10} m liegt, so klein, daß man den Unterschied kaum messen kann.

Compton-Wellenlänge $\lambda_C = \dfrac{h}{mc}, h\nu_c = mc^2$.

(c) $\Delta\lambda = \lambda_C \cdot (1 - \cos(120°)) = 1.5 \cdot \lambda_C$

$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 2.5\lambda$, da $\lambda = \lambda_C$.

$$p' = \frac{h}{\lambda'} = \frac{p}{2.5}$$

$$E_{\text{kin}} = E_{ph} - E'_{ph} = \frac{hc}{\lambda_C} - \frac{hc}{2.5\lambda_C} = 0.6 E_{0,el.}.$$

5.3 Photonen (10)

(a) Ein Helium-Neon Laser habe 10 mW Ausgangsleistung, die Wellenlänge betrage 632 nm und der Strahldurchmesser betrage 1 mm. Berechnen Sie die folgenden Größen: Strahlungsdichte, mittlere quadratische elektrische Feldstärke, die mittlere Energiedichte im Strahl sowie die Photonendichte und Photonenflußdichte; außerdem die vom Laser auf eine vollständig absorbierende Fläche ausgeübte Kraft und den erzeugten Druck.

Hinweis: Intensität, Strahlungsdichte, Leistungsdichte und Betrag des Poyntingvektors sind Synonyme für die gleiche physikalische Größe.

(b) Sie fokussieren einen Helium-Neon Laserstrahl mit 1 mW Leistung auf ein 1 μm großes Bakterium (kugelförmig, seine Dichte entspreche der von Wasser), welches das Licht isotrop in alle Richtungen streut. Welche Geschwindigkeit hätte das Bakterium nach 0.1 s erreicht, wenn es nicht durch das umgebende Wasser gebremst werden würde?

(c) Nun eine Überlegung im Photonenbild: In einer Vakuumkammer wird Lithium in einem Ofen verdampft und durch eine kleine Düse im Ofen emittiert. Mit Hilfe eines Laserstrahls sollen die Li-Atome, die eine mittlere Geschwindigkeit von 500 m/s haben, zum völligen Stillstand gebracht werden. Welche Geschwindigkeitsänderung verursacht die Absorption eines einzelnen Photons? Wie viele Photonen der Wellenlänge 671 nm müssen dazu aus dem Laserstrahl, der dem Atomstrahl entgegen gerichtet ist, absorbiert werden?

Lösung:

(a) Strahlungsdichte: $I = S = \dfrac{P}{A} = \dfrac{10^{-2}}{\pi(5\,10^{-4})^2} = 12.7$ kW/m^2,

mittlere quadratische elektrische Feldstärke: $I = c\epsilon_0 < E^2 >= \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2$ für harmonische Wellen.

$E_{rms} = \sqrt{< E^2 >} = \sqrt{\dfrac{I}{c\epsilon_0}} = 2191$ V/m,

mittlere Energiedichte im Strahl: $w = \dfrac{I}{c} = \epsilon_0 < E^2 >= 4.23 \cdot 10^{-5}$ J/m^3,

Photonendichte: $\rho_\gamma = \dfrac{w}{E_\gamma} = \dfrac{w}{\frac{hc}{\lambda}} = 1.34 \cdot 10^{14}$ Photonen / m^3.

Photonenfluß:$\rho_\gamma \cdot c = 4.0 \cdot 10^{22}$ m^{-2}s^{-1},

Impulsdichte: $\vec{\pi} = \rho_\gamma \cdot c \cdot p_\gamma = \rho_\gamma \cdot c \cdot \dfrac{E_\gamma}{c} = \rho_\gamma \cdot E_\gamma = \dfrac{w}{c} = 1.41 \cdot 10^{-13}$ N/m$^3/s$,

Strahlungsdruck: $P = \dfrac{F}{A} = \dfrac{\Delta p}{A\Delta t} = |\vec{\pi}|c = \dfrac{S}{c} = w = 4.23 \cdot 10^{-5}$ J/m$^3 = 4.23 \cdot 10^{-5}$ Pa, N.B. nur fr massenlose Teilchen sind Strahlungsdruck und mittlere Energiedichte gleich.

Kraft:$F = PA = 3.32 \cdot 10^{-11}$ N,

(b) $mv = Ft, v = \dfrac{Ft}{m} = \dfrac{3.32 \cdot 10^{-12} \cdot 0.1s}{\frac{4}{3}\pi(5 \cdot 10^{-7})^3 \cdot 1000kg/m^3} = 634$ m/s.

(c) $p_\gamma = \dfrac{h}{\lambda}, p_{Li} = m_{Li}v, N_\gamma = \dfrac{p_{Li}}{p_\gamma} = 5880$, mit $m_{Li} = 7$ amu.

5.4 Rutherford-Streuung (10)

Ein Tandem-Beschleuniger liefert einen Strahl von α-Teilchen mit einer Energie von $E_\alpha = 5$ MeV und einem Strahlstrom von $I = 2$ nA. Im Strahl befindet sich eine Goldfolie von 1 μm Dicke. Ein um dieses Target in 10 cm Abstand schwenkbarer, 1cm^2 großer Detektor weist gestreute Teilchen nach. Gehen Sie im folgenden von Rutherford-Streuung aus.

(a) Wie groß ist der differentielle Wirkungsquerschnitt bei den Streuwinkeln $\theta = 10°, 90°$ und $150°$?

(b) Berechnen Sie bei diesen Streuwinkeln die Anzahl der Teilchen, die pro Sekunde in den Detektor gelangen.

(c) Experimentell sind ab einem Streuwinkel von 150° Abweichungen von der Rutherford-Streuung zu beobachten. Schätzen Sie eine obere Grenze R_N für den Kernradius von Gold ab. Berechnen Sie dazu den Stoßparameter b bei $\theta = 150°$ ($R_N \approx b(\theta_{\text{crit}})$).

Lösung:

(a) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_P Z_T e^2}{4\pi\epsilon_0 4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$

mit $Z_P = 2, Z_T = 79, E_\alpha = 5$ MeV und $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44$ MeV fm, folgt

Damit ergibt sich

$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 10°) = 22426$ b/srad,

$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 90°) = 5.17$ b/srad,

$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 150°) = 1.49$ b/srad.

(b) Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung in ein Raumwinkelelement $\Delta\Omega$ beträgt $\frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \Delta\Omega$.

$\Delta\Omega = \frac{A}{r^2} = 10^{-2}$ srad.

Die Targetdichte ρ_{target} bzw. die Zahl der Streuzentren pro Fläche berechnet man aus der Dichte von Gold $\rho = 19,3$ g/cm^3, der molaren Masse $m_{\text{mol}} = 197$g/mol und der Targetdicke d $= 1\mu$m zu

$rho_{\text{target}} = \rho \cdot d \cdot \frac{N_A}{m_{\text{mol}}} = 5.88 \cdot 10^{18}\ \text{cm}^{-2} = 5.88 \cdot 10^{-6}\ \text{barn}^{-1}$.

Die Zahl der Strahlteilchen pro Sekunde ist gegeben durch ($I = 2$ nA, Ladung pro Teilchen $q = 2$)

$I = N_\alpha \cdot \frac{q}{\Delta t}, \frac{N_\alpha}{\Delta t} = \frac{I_\alpha}{q_\alpha} = \frac{I}{2e} = 6.25 \cdot 10^9 \text{s}^{-1}$.

Differenteller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N_{\text{Reaktionen}}}{\Delta\Omega \cdot \rho_{\text{target}} \cdot N_{\text{Strahl}}}$

$\dot{N}_{\text{Reaktionen}} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \Delta\Omega \cdot \rho_{\text{target}} \dot{N}_{\text{Strahl}} = 367\ \text{srad b}^{-1}\text{s}^{-1} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$.

$\dot{N}(\theta = 10°) = 8.24 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1}$,

$\dot{N}(\theta = 90°) = 1.90 \cdot 10^3\ \text{s}^{-1}$,

$\dot{N}(\theta = 150°) = 547\ \text{s}^{-1}$.

(c) Aus der Vorlesung: $b = \frac{a}{2\tan(\frac{\theta}{2})}$

Abstand nächster Annäherung $a = \frac{A}{E}$, mit $A = \frac{Z_P Z_T e^2}{4\pi\epsilon_0}$

$R_N = 6.1$ fm.

Empirische Formel: $R = R_0 \cdot \sqrt[3]{A}$, mit A der Anzahl der Nukleonen und $R_0 = 1.2$ fm erwartet man für ^{197}Au einen Wert von 6.98 fm.