PEP 3 – Übungsblatt 4 – WS 2013/2014

Besprechung am 14./15. November 2013

4.1 Fabry-Perot Interferometer (10)

Die Natrium-D-Linie ist die dominante Linie im Spektrum von Natrium und führt z. B. zu der charakteristischen Farbe von Natriumdampflampen bei einer Wellenlänge von 589 nm (orange). Die Linie ist zunächst durch die Feinstrukturaufspaltung (Physik IV) in zwei benachbarte Linien mit 0.6 nm Abstand aufgespalten (Dublett). Jede dieser Linien besteht wiederum aus zwei Einzellinien mit einem Frequenzabstand von 1772 MHz (Hyperfeinstruktur).

(a) Wie groß ist die Hyperfeinaufspaltung in nm?

(b) Sie wollen die Hyperfeinlinien mit einem Fabry-Perot Interferometer trennen. Dazu benutzen Sie eine 1 mm dicke planparallele Glasplatte (Brechungsindex $n = 1.5$). Berechnen Sie den Freien Spektralbereich, also den Frequenz-/Wellenlängenabstand zweier benachbarter Transmissionsmaxima (bei 589 nm).

(c) Welches Reflexionsvermögen R muß die beidseitige Oberflächenverspiegelung der Glasplatte aufweisen, damit die Hyperfeinaufspaltung aufgelöst werden kann? Bestimmen Sie zunächst die Auflösung $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ nahe des Transmissionsmaximums m-ter Ordnung, indem Sie die Halbwertsbreite $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$ durch $I_T(\nu_1) = I_T(\nu_2) = \frac{1}{2} I_T(\nu_m)$ berechnen.

Hinweis: Verwenden Sie die Näherung $\sqrt{R} \approx 1$ für R nahe 1.

Lösung:

a)
In Luft bzw. im Vakuum gilt für die Beziehung zwischen Frequenz und Wellenlänge

$$\nu = c/\lambda, \text{bzw. d}\lambda = -\frac{\lambda^2}{c} d\nu = 0.002\,\text{nm}. \tag{1}$$

b)
Der Freie Spektralbereich FSR gibt den Frequenz- $\delta\nu$ bzw. Wellenlängenabstand $\delta\lambda$ zwischen zwei Transmissionsmaxima des Fabry-Perots an. Im Fall dieser Glasplatte gilt:

$$FSR = \delta\nu = \frac{c}{2nd} = 10^{11}\,\text{Hz} = 100\,\text{GHz bzw.} \tag{2}$$

$$FSR = \delta\lambda = -\frac{\lambda^2}{c} d\nu = 0.12\,\text{nm}. \tag{3}$$

Der Freie Spektralbereich ist also wesenlich größer als der Frequenzabstand der Hyperfeinstruktur (1.772 GHz) und kann daher aufgelöst werden.

c)
Damit die Hyperfeinstruktur beobachtet werden kann, müssen beide Linien in den Bereich eines Transmissionsmaximums fallen. Wir gehen hier davon aus, dass der Frequenzabstand $\Delta\nu$ beider Linien die Halbwertsbreits der Transmissionskurve markiert. Für das Verhältnis $F^\star = \delta\nu\ /\Delta\nu$ gilt dann:

$$F^\star = \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}, \tag{4}$$

wobei R das Reflexionsvermögen der reflektierenden Schichten der Glasplatten ist. Die Größe $F^\star$ wird auch *Finesse* des Fabry-Perots genannt. Mit (2) ist dann

$$\frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \text{ bzw.} \tag{5}$$

$$\Delta\nu = \frac{c}{2nd}\frac{1-R}{\pi\sqrt{R}} \tag{6}$$

Mit $\sqrt{R} \approx 1$ gilt dann

$$R = 1 - \Delta\nu\frac{2\pi nd}{c} \tag{7}$$

Mit den angegebenen Werten für das Fabry-Perot ergibt sich dann für das benötigte Refexionsvermögen

R=0.944.

Zur Herleitung von F^*:

Aus der Vorlesung:

$I_T = I_0\dfrac{1}{1+F\sin^2(\delta/2)}$

FWHM:

$I_T(\delta) = \dfrac{1}{2}I_0$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+F\sin^2(\delta/2)}$

$F\sin^2(\delta/2) = 1$

$\dfrac{1}{F} = \sin^2(\delta/2)$

$\dfrac{1}{\sqrt{F}} = \pm\sin(\delta/2)$, $\sin(\delta/2) \approx \delta/2$

$\delta/2 = \pm 1/\sqrt{F}$, mit $F = \dfrac{4R}{(1-R)^2}$

$\delta = \pm 2 \cdot \sqrt{\dfrac{(1-R)^2}{4R}}$

$\delta = \pm\dfrac{1-R}{\sqrt{R}}$, FWHM $= 2 \cdot \dfrac{1-R}{\sqrt{R}}$

Der Abstand zwischen zwei Transmissionsmaxima beträgt 2π und damit

$\dfrac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \dfrac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$.

4.2 Beugung am Gitter (10)

Das Licht einer Natriumdampflampe wird mittels eines Beugungsgitters analysiert. Das durch die Feinstrukturaufspaltung verursachte Natrium-Dublett hat die Wellenlängen 589.59 nm und 588.99 nm.

(a) Wie weit sind diese Linien im Spektrum erster Ordnung voneinander entfernt, wenn dieses Spektrum von einem Gitter mit 600 Linien/mm erzeugt und auf einem $D = 1$ m entfernten Schirm beobachtet wird?

(b) Welcher Bereich des Gitters muss mindestens ausgeleuchtet werden, damit das Natrium-Dublett in erster Ordnung aufgelöst werden kann? Wie groß müßte ein Gitter sein, mit dem die Hyperfeinaufspaltung des Natriums (siehe Aufgabe 4.1) aufgelöst werden kann?

Lösung:

(a) 1. Ordnung: $\sin\alpha \approx \alpha = \frac{\lambda}{d} = \frac{y}{D}, y = D\frac{\lambda}{d}$

$\Delta y = D\frac{\Delta\lambda}{d} = 0.36$ mm.

(b) Auflösung des Gitters: $A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$, mit N: Zahl der beleuchteten Gitterstriche, m: Ordnung.

Dublett: $N = 980$, entsprechend etwa 1.6 mm des Gitters.

Hyperfeinstruktur: $N = 294500$, Gittergröße 490 mm.

4.3 Stefan-Boltzmann Gesetz (10)

Die von einem schwarzen Körper der Fläche A abgestrahlte Leistung beträgt $P = \sigma \cdot A \cdot T^4$, mit der Stefan-Boltzmann Konstanten $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$.

(a) Ein Einfamilienhaus habe insgesamt 20 m^2 Fensterfläche. Berechnen Sie die Leistung, die durch Wärmestrahlung an einem Wintertag bei -5° C Außentemperatur verloren geht, wenn die Fenster die Strahlung der Innenräume vollständig durchlassen. Die Temperatur der wie schwarze Körper emittierenden Innenräume betrage 20° C. Wie läßt sich dieser Energieverlust verringern?

(b) Ein kugelförmiger schwarzer Körper mit Radius R sei außerhalb der Erdatmosphäre im Strahlungsgleichgewicht. Berechnen Sie seine Temperatur. Die vom Sonnenlicht eingestrahlte Leistung beträgt $S_0 = 1368\ \mathrm{W/m^2}$ (Solarkonstante). Berücksichtigen Sie, daß die gesamte Oberfläche der Kugel abstrahlt.

Lösung:

(a) $P = \sigma \cdot A \cdot T^4, \Delta P = A\sigma(T^4_{\text{innen}} - T^4_{\text{außen}})$ =2.6 kW,
mit $T_{\text{innen}} = 293\,K, T_{\text{außen}} = 267$ K.

(b) (war bereits dran in PEP2).
im Strahlungsgleichgewicht gilt: Absorption = Emission,
$\pi R^2 S_0 = 4\pi R^2 \sigma T^4$
$T = \sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}} = 278.7$ K.

4.4 Schwarzkörperstrahler (10)

Eine Glühlampe, in der ein Wolframdraht der Länge l=30 cm mit einem Durchmesser D=0.024 mm erhitzt wird, strahle Licht gemäß der Planck'schen Strahlungsformel aus.

(a) Bei welcher Wellenlänge liegt jeweils das Intensitätsmaximum des ausgestrahlten Lichts für eine Temperatur von $T = 2000°$C bzw. $3000°$C?

(b) Welche Gesamtleistung wird dabei abgestrahlt, wenn Sie annehmen, daßnur die Oberfläche des Drahts beiträgt?

(c) Welcher Bruchteil der abgestrahlten Leistung liegt dabei im optischen Bereich, d.h. im Wellenlängenbereich $\lambda = 400$ nm bis 800 nm, wiederum für eine Temperatur von $T = 2300°$C bzw. $3300°$C?

Lösung:

a)
Das Maximum λ_{max} der der Strahlungsintensität bei einer Temperatur T ergibt sich aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{max} = 2897.8\,\mu\mathrm{K} \cdot \frac{1}{T}, \text{ d.h.} \tag{8}$$

$$\lambda_{max}(T = 2300\mathrm{K}) = 1260\,\mathrm{nm} \text{ und } \lambda_m(T = 3300K) = 878\,nm.$$

b)
Die gesamte Leistung, die ein schwarzer Strahler abstrahlt, ergibt sich aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz gemäß

$$P = \sigma \cdot A \cdot T^4 \tag{9}$$

wobei σ=$5.670{\cdot}10^{-8}$ $\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ die Stefan-Boltzmann-Konstante ist und A die Oberfläche des Strahlers. Also

$$P = \sigma \cdot \pi \cdot l \cdot D \cdot T^4 \tag{10}$$

und damit

$$P(2300\mathrm{K}) = 36\,\mathrm{W},\ P(3300K) = 152\,\mathrm{W}$$

c)
Wir berechnen zunächst die gesamte, bei den jeweiligen Temperaturen abgestrahlte Leistung. Dazu ist die durch die Plancksche Strahlungskurve gegebene spektrale spezifische Ausstrahlung des schwarzen Körpers in $\mathrm{W\,m^{-2}}\,\mu\mathrm{m}$ über den gesamten Wellenlängenbereich zu integrieren. Hierzu kann man einen online-Rechner verwenden (siehe z.B. www.spectralcalc.com). Damit ergibt sich

$$P_{gesamt}(2300K) = 1.5868 \cdot 10^6\,\mathrm{W/m^2}$$
$$P_{gesamt}(3300K) = 6.7248 \cdot 10^6\,\mathrm{W/m^2}$$

Um den Anteil $P_{optisch}$ von P_{gesamt} zu berechnen, der im Optischen emittiert wird, integriert man die Planck-Kurve im genannten Frequenzbereich von $\nu(400\text{ nm}) = 7.5 \cdot 10^{14}$Hz bis $\nu(800\text{ nm}) = 3.75 \cdot 10^{14}$Hz. Man erhält

$$P_{optisch}(2300K) = 6.9 \cdot 10^4\mathrm{W\ m^{-2}} \Rightarrow \text{Bruchteil} = 4.4\%$$
$$P_{optisch}(3300K) = 125.0 \cdot 10^4\mathrm{W\ m^{-2}} \Rightarrow \text{Bruchteil} = 18.7\%.$$

(Bei der Umrechnung von sr^{-1} auf den gesamten Raumwinkel bitte das Lambertsche Gesetz beachten, siehe www.spectralcalc.com/blackbody/integrate_planck.html)