

PEP 3 – Übungsblatt 8 – WS 2013/2014

Besprechung am 12./13. Dezember 2013

8.1 Materiewelle (10)

Bei der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen und Materiewellen unterscheidet man zwischen der Phasengeschwindigkeit, mit der sich ebene Wellen ausbreiten, und der Gruppengeschwindigkeit, mit der sich Wellenpakete ausbreiten.

- (a) Zeigen Sie an Hand der relativistischen Energie-Impuls Beziehung $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, daß die Phasengeschwindigkeit eines Teilchens größer als c ist.
- (b) Zeigen Sie, daß die Gruppengeschwindigkeit eines Teilchens gleich der klassischen Geschwindigkeit des Teilchens ist.

Lösung:

- (a) Die Phasengeschwindigkeit ist gegeben als ω/k .

Mit $E = \hbar\omega$ und $p = \hbar k$ folgt $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}}{p} = c\sqrt{1 + \frac{m^2c^2}{p^2}}$, mit $p = \gamma mv$, wobei γ der Lorentzfaktor, v die Geschwindigkeit und m die Ruhemasse ist. Es folgt mit $\gamma = (1 - (\frac{v}{c})^2)^{-\frac{1}{2}}$ dass $v_p = \frac{c^2}{v} > c$.

- (b) Die Gruppengeschwindigkeit ist gegeben über $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$. Wieder mit $E = \hbar\omega$ und $p = \hbar k$ folgt $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} = \frac{c^2}{E}p = \frac{c^2\gamma mv}{\gamma mc^2} = v$, klassische Teilchengeschwindigkeit.

8.2 Erwartungswerte (10)

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für ein klassisches Teilchen in einem ein-dimensionalen Kasten $0 \leq x \leq d$ lautet $P(x) = 1/d$.

(a) Zeigen Sie, daß damit die Erwartungswerte $\langle x \rangle = d/2$ und $\langle x^2 \rangle = d^2/3$ betragen.

(b) Die Wellenfunktion für ein quantenmechanisches Teilchen im selben Kasten lautet

$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{d}} \cdot \sin \frac{n\pi x}{d}$, wobei $n = 1, 2, 3, \dots$ die Quantenzahl des jeweiligen Zustands ist. Zeigen Sie, daß sich für die Quantenzahlen n die Erwartungswerte $\langle x \rangle = d/2$ und $\langle x^2 \rangle = d^2/3 - d^2/(2n^2\pi^2)$ ergeben.

(c) Wie vergleichen sich die Ausdrücke von a) und b) für große Werte von n ?

Lösung:

$$(a) \langle x \rangle = \int_0^d P(x) \cdot x dx = \int_0^d \frac{1}{d} x dx = \frac{1}{2} d^2 \frac{1}{d} = \frac{d}{2}.$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^d P(x) \cdot x^2 dx = \int_0^d \frac{1}{d} x^2 dx = \frac{d^2}{3}.$$

$$(b) \langle x \rangle = \langle \psi^* x \psi \rangle = \int_0^d \frac{2}{d} x \sin^2 \frac{n\pi x}{d} dx,$$

lösen mit www.wolframalpha.com

Die Lösung kann aber auch über $u = x$ und $v' = \sin^2(ax)$ und partieller Integration gefunden werden.

$$\langle x \rangle = -\frac{d(-2\pi^2 n^2 + 2\pi n \sin(2\pi n) + \cos(2\pi n) - 1)}{4\pi^2 n^2} = d \frac{2\pi^2 n^2 - 0 + 1 - 1}{4\pi^2 n^2} = \frac{d}{2}.$$

$$\langle x^2 \rangle = \langle \psi^* x^2 \psi \rangle = \int_0^d \frac{2}{d} x^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{d} dx, \dots,$$

$$= d^2 \frac{2\pi^2 n^2 - 3}{6\pi^2 n^2} = d^2/3 - d^2/(2n^2\pi^2).$$

Für n gross kann der zweite Term vernachlässigt werden und es verbleibt der klassische Erwartungswert.

8.3 Reflexion an Potentialbarriere (10)

Klassisch betrachtet wird ein Teilchen mit einer bestimmten kinetischen Energie an einer Potentialbarriere entweder stets reflektiert oder stets transmittiert (z.B. Ball rollt den Berg hoch). Dies ändert sich in der Quantenwelt wesentlich: Ein quantenmechanisches Teilchen mit der kinetischen Energie E_0 bewege sich in einem Bereich, in dem die potentielle Energie Null ist. Es trifft dabei auf eine Potentialbarriere der Höhe $0.2 \cdot E_0$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der das Teilchen an der Barriere reflektiert wird.

Hinweis: Berechnen Sie in beiden Bereichen die Wellenzahlen k_1 und k_2 . Es gilt $E_{\text{kin}} = p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m$. Der Reflexionskoeffizient R ergibt sich zu $R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$ (Herleitung: siehe Vorlesung).

Lösung:

- (a) Es sind die Wellenzahlen k_1 und k_2 zu berechnen und in die angegebene Gleichung für den Reflexionskoeffizienten einzusetzen. Es gilt $E_{\text{kin}} = p^2/2m = \hbar^2 k^2/(2m)$.

$$E_0 = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m}, k_1 = \sqrt{2mE_0/\hbar^2}.$$

$$\frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} = E_{\text{kin},2} = E_0 - 0.2E_0 = 0.8E_0.$$

$$k_2 = \sqrt{2m(0.8E_0)/\hbar^2} = 0.894 \cdot \sqrt{2mE_0/\hbar^2} = 0.894k_1.$$

$$\text{Einsetzen liefert } R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{(1 - 0.894)^2}{(1 + 0.894)^2} = 0.3\%.$$

Die Reflexionswahrscheinlichkeit beträgt nur 0.3%. Sie ist deshalb so klein, weil die Barrierenhöhe die kinetische Energie um lediglich 20% reduziert. Weil k proportional zur Quadratwurzel aus der kinetischen Energie ist, ändert sich die Wellenzahl und daher die Wellenlänge um nur 10%.

8.4 Gaußsches Wellenpaket (10)

Ein freies Elektron werde durch ein Gaußsches Wellenpaket beschrieben gemäß

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^2}} \exp\left(-\frac{8\alpha(x - v_g t)^2}{16\alpha^2 + \beta^2 t^2}\right), \text{ mit der Unschärfe im Impulsraum } \sigma_k = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \text{ und } \beta = \frac{\hbar}{2m} \text{ (siehe Vorlesung).}$$

- (a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ betrage die Unschärfe im Ortsraum $\Delta x = 1\mu\text{m}$. Wie groß ist die Unschärfe $\Delta p (= \sigma_k)$ im Impulsraum?
- (b) Wie lange dauert es, bis durch das Auseinanderlaufen des Wellenpakets sich die Unschärfe im Ortsraum verdoppelt hat?

Lösung:

Allgemein gilt: Wenn (aus Vorlesung)

$A(k) = \exp(\alpha(k - k_o)^2)$ dann folgt

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial k A(k) \exp(i(kx - \omega(k)t)) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + i\beta t}} \exp\left(-\frac{(x - v_g t)^2}{4(\alpha - i\beta t)}\right) \exp(i(k_o x - \omega(k_o)t))$$

mit $v_g = \partial\omega/\partial k|_{k=k_o}$ und $\beta = \hbar/(2m)$. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilungen im Orts- und Impulsraum sind dann:

$$|A(k)|^2 = \exp(2\alpha(k - k_o)^2) \text{ und}$$

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^2}} \exp\left(-\frac{\alpha(x - v_g t)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}\right)$$

Man kann nun die Breite der Wahrscheinlichkeitsverteilungen angeben: Aus $2\Delta k^2 = (2\alpha)^{-1}$ folgt

$$\Delta k = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

und aus $2\Delta x^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)/\alpha$ erhält man:

$$\Delta x = \sqrt{\alpha + \frac{(\beta t)^2}{\alpha}}$$

die Unschärfe ergibt sich aus: $\Delta x \Delta p = \hbar \Delta x \Delta k$ zu

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\beta t}{\alpha}\right)^2}$$

(a) Heisenberg: $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ für $t = 0$, $\Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x} = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} / (2 \cdot 10^{-6} \text{ m}) = 5.27 \cdot 10^{-29} \text{ J} \cdot \text{s} / \text{m}$.

(b) Mit $\Delta x = \sqrt{\alpha + \frac{(\beta t)^2}{\alpha}}$ und $\Delta x(t = 0) = \sqrt{\alpha}$ gilt $\Delta x = \sqrt{\Delta x_o^2 + \frac{(\beta t)^2}{\Delta x_o^2}}$. Nach einer Zeit t soll Δx

$$\text{dann gerade zwei mal } \Delta x_o \text{ sein: } 2\Delta x_o = \sqrt{\Delta x_o^2 + \frac{(\beta t)^2}{\Delta x_o^2}} \Rightarrow$$

$$t = \sqrt{3} \frac{2m\Delta x_o^2}{\hbar} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}} = 30 \text{ ns}$$