PEP 3 – Übungsblatt 6 – WS 2013/2014

Besprechung am 28./29. November 2013

6.1 Wasserstoff Spektrum (10)

(a) Berechnen Sie die Wellenlängen aller Linien im sichtbaren Bereich des Wasserstoff Spektrums ($\lambda =$ 400 nm - 800 nm).

(b) Zeigen Sie, daß im Bohrschen Atommodell für große Werte der Hauptquantenzahl n die Umlauffrequenz des Elektrons gerade der Energie des Photons entspricht, das bei einem Übergang von n nach $n-1$ emittiert wird. Diskutieren Sie die Bedeutung dieses Korrespondenz-Prinzips.

(c) Unter den meisten experimentellen Bedingungen treten im Emissionsspektrum des Wasserstoffs (z.B. das Leuchten in einer Gasentladung) wesentlich mehr Linien auf, als im Absorptionsspektrum des Gases bei Raumtemperatur. In Absorption treten manche dieser zusätzlichen Linien z.B. bei sehr starker Erhitzung des Gases auf. Geben Sie hierfür eine Erklärung.

Lösung:

(a) $\dfrac{1}{\lambda} = R\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{m^2}\right), \quad R = 109\,678\,\mathrm{cm}^{-1}.$

Lyman, $n = 1$, größte Wellenlänge: $R\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2^2}\right) = (121\,\mathrm{nm})^{-1}$ ultraviolett

Balmer, $n = 2$, größte Wellenlänge: $R\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{9}\right) = (656\,\mathrm{nm})^{-1}$ rot

$R\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{16}\right) = (486\,\mathrm{nm})^{-1}$ blau

$R\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{25}\right) = (434\,\mathrm{nm})^{-1}$ violett

$R\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{36}\right) = (410\,\mathrm{nm})^{-1}$ violett

$R\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{49}\right) = (397\,\mathrm{nm})^{-1}$ ultraviolett

Paschen, $n = 3$, kleinste Wellenlänge: $R\left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{\infty}\right) = (820\,\mathrm{nm})^{-1}$ infrarot

(b) (I) $\dfrac{h\nu}{Z^2} = R\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{m^2}\right), n < m$

$= R\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = R\dfrac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{n^2(n+1)^2}$

$= R\dfrac{2n+1}{n^4 + 2n^3 + n^2} = R\dfrac{n(2 + \frac{1}{n})}{n^4(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})} \approx R\dfrac{2}{n^3}, n \to \infty$, und damit

$\nu_n = \dfrac{z^2 R}{h} \cdot \dfrac{2}{n^3}.$

(II) $v_n = \dfrac{zc\alpha}{n}, r_n = \dfrac{n^2\hbar}{z\alpha mc}, \nu_n = \dfrac{v_n}{2\pi r} = \dfrac{zc\alpha z\alpha mc}{2\pi n^3\hbar}$

$= \dfrac{z^2c^2\alpha^2 m}{2\pi n^3\hbar} = \dfrac{z^2 R \cdot 2}{hn^3}.$

Für große Quantenzahlen entsprechen die Ergebnisse der Quantenphysik denen der klassischen Physik. Ein Elektron, das mit der Frequenz ν oszilliert (umläuft), strahlt auch Licht dieser Frequenz ab.

(c) Gas bei Raumtemperatur befindet sich im elektronischen Grundzustand. Daher sind nur Absorptionslinien ausgehend vom Grundzustand zu beobachten. Physik IV: es können außerdem nur Übergänge zu Zuständen beobachtet werden, die durch Dipolstrahlung zugelassen sind: Auswahlregeln Bahndrehimpuls $\Delta l = 1$, Spin $\Delta s = 0$. Um ein Emissionsspektrum zu erhalten, müssen die Atome zunächst angeregt sein. Geschieht dies z.B. in einer Gasentladung, so werden viele hohe Zustände besetzt (Physik IV: auch solche, für die die obigen Dipolauswahlregeln nicht gelten). Diese zerfallen dann nicht nur in den Grundzustand, sondern auch in Zwischenzustände (Kaskaden). Daher ist eine sehr viel größere Zahl von Linien zu beobachten.

6.2 Thomson'sches Atommodel (10)

Im Thomson'schen Atommodell besteht ein Atom aus gleichmäßig verteilter, positiv geladener Masse, in der sich die negativ geladenen Elektronen bewegen. Das Atom sei hier als kugelförmig und damit sphärisch symmetrisch angenommen.

(a) Wie groß müßte das Wasserstoffatom dann sein, damit die Eigenfrequenz eines innerhalb einer homogen geladenen Kugel schwingenden Elektrons gerade der Frequenz des Photons aus der Balmerserie mit der größten Wellenlänge ($\lambda = 656\,\mathrm{nm}$) entspricht? Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Bohr'schen Radius des Wasserstoffatoms.

Hinweis: Für die Rückstellkraft eines vom Mittelpunkt um den Radius r ausgelenkten Elektrons tragen nur die Ladungen bei, welche innerhalb einer Kugelschale mit demselben Radius liegen.

Lösung:

(a) Der Betrag des elektrischen Feldes einer homogen elektrisch geladenen Kugel mit Radius r ergibt sich zu

$E(r) = \dfrac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$, mit Atomradius R.

Auf das Elektrom wirkt die Kraft $eE(r)$. Somit lautet die Bewegungsgleichung

$m\ddot{r} + eE(r) = 0 \quad$ bzw.

$$\ddot{r} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3} = 0$$

Dies ist die Gleichung einer harmonischen ungedämpften Schwingung

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0$$

mit der Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$$

$\omega = 2\pi f = 2\pi c/\lambda$ und damit

$$\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}$$

Mit klassischem Bahnradius

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} = \alpha^2 a_0 = 2,818\,\mathrm{fm}$$

folgt

$$R = \sqrt[3]{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{mc^2}\frac{\lambda^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{r_e \frac{1}{4\pi^2}\lambda^2}$$

$$R = \sqrt[3]{1,44\,\mathrm{MeV\,fm} \times \frac{1}{0,5\,\mathrm{MeV}} \times \frac{1}{4\pi^2} \times 656^2 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{m}^2} = 3,14 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m},$$

$r_{\mathrm{Bohr}} = a_0 = 0,529 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}.$

Anmerkung: Setzt man den Borhr'schen Radius ein, so erhält man für die Resonanzfrequenz im Thomson'schen Atommodell gerade die Umlauffrequenz des Bohr'schen Atommodells.

6.3 Myonische Atome (10)

Das negativ geladene Myon verhält sich wie ein schweres Elektron. Es trägt die gleiche Ladung, hat aber eine 207-fach größere Masse. Kommt ein Myon in einem Festkörper zur Ruhe, fällt es in das Coulomb-Potential eines Atoms und entfernt dabei alle Elektronen, bis es sich im Grundzustand befindet. Ein solches System bestehe aus einem Bleikern (^{208}Pb hat 82 Protonen und 126 Neutronen) und genau einem Myon.

(a) Berechnen Sie die Energie eines Photons, das beim Übergang vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand emittiert wird.

(b) Berechnen Sie den Radius der kleinsten Bohr-Bahn und vergleichen Sie diesen mit dem ungefähren Radius des Bleikerns. Benutzen Sie dazu, daß der Radius eines Protons oder Neutrons ungefähr $1 \cdot 10^{-15}$ m beträgt und daß die Nukleonen im Kern dicht aneinander liegen.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2}\alpha^2 c^2 Z^2 m_\mu \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \\ &= Z^2 \frac{m_\mu}{m_e} Rhc \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \\ &= 14,2\,\mathrm{MeV}. \end{aligned}$$

(b) $r_n = \dfrac{1}{\alpha Z}\dfrac{\hbar}{m_\mu c} n^2 = 2{,}9$ fm.

$r_{\mathrm{Pb}} = 1,2\,\mathrm{fm} \times \sqrt[3]{A_{\mathrm{Pb}}} = 7{,}1\,\mathrm{fm}$, d.h. die Myonenbahn liegt innerhalb des Atomkerns.