PEP 3 – Blatt 12 – WS 2013/2014

Besprechung am 23./24. Januar 2014

12.1 Lande'scher g-Faktor, zu Fuß (10)

Der Erwartungswert des magnetischen Gesamtmoments $\vec{\mu}_J = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S$ in Richtung der Quantisierungsachse $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ wird durch den Lande'schen g-Faktor beschrieben:

$$g_J \frac{\mu_B \vec{J}}{\hbar} = \langle \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S \rangle$$

Leiten Sie her, wie g_J von L, S und J abhängt.

Lösung:

$\langle \vec{\mu}_J \rangle = \langle \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S \rangle = \langle g_L \mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar} + g_S \mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar} \rangle.$

$g_J \vec{J} = \langle g_L \vec{L} + g_S \vec{S} \rangle = \langle \vec{L} + 2\vec{S} \rangle = \langle \vec{J} + \vec{S} \rangle.$

Anschaulich stellt der Erwartungswert eine Projektion der Vektorsumme $\vec{\mu}_J = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S$ auf die Quantisierungsachse $\vec{J}$ dar.

$g_J \vec{J} \cdot \vec{J} = \langle \vec{J} \cdot \vec{J} + \vec{S} \cdot \vec{J} \rangle = \vec{J} \cdot \vec{J} + \langle \vec{S} \cdot \vec{L} \rangle + \langle \vec{S} \cdot \vec{S} \rangle.$

Wegen $\vec{J}^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$ läßt sich das Skalarprodukt schreiben als

$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2).$

Operatoren auf Eigenzustände $|J, M_J, L, S\rangle$ loslgeassen:

$g_J J(J+1)\hbar^2 = J(J+1)\hbar^2 + \frac{1}{2}(J(J+1) - L(L+1) - S(S+1))\hbar^2 + S(S+1)\hbar^2$ und damit

$g_J J(J+1) = \frac{3}{2} J(J+1) + \frac{1}{2}(-L(L+1) - S(S+1))$ und damit

$g_J = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$

12.2 Zeemaneffekt im Na-Atom (10)

Im Natrium-Atom finden Übergänge innerhalb der Hauptquantenzahl $n = 3$ zwischen den Zuständen mit Drehimpulsquantenzahl von $l = 1$ nach $l = 0$ statt. Die dazugehörigen Spektrallinien sind die sogenannten D-Linien bei Natrium und haben Wellenlängen von $\lambda_1 = 5889.6$ Åund $\lambda_2 = 5895.9$ Å.

Bestimmen Sie die Magnetfeldstärke, bei der das unterste Zeeman-Niveau des Zustands mit $n = 3, l = 1, j = 3/2$ mit dem obersten Niveau des Zustands $n = 3, l = 1, j = 1/2$ zusammenfallen würde.

Hinweis: Sie benötigen zur Lösung dieser Aufgabe keine weiteren Kenntnisse über das Na-Atom.

Lösung:

Die Energiedifferenz ΔE zwischen den beiden Zuständen lautet

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = 2.23 \text{ meV}.$$

Damit nun das unterste Zeeman Niveau von $n = 3, l = 1, j = 3/2$ mit dem obersten Niveau des Zustands $n = 3, l = 1, j = 1/2$ zusammenfällt, muß die zusätzliche Energie, um welche die m_j-Zustände insgesamt verschoben werden, gleich diesem ΔE sein.

Die Verschiebung lautet dabei $E_{m_j} = g_j m_j \mu_B B$.

Das heißt, es muß für die beiden Zustände $n = 3, l = 1, j = 3/2$ und $n = 3, l = 1, j = 1/2$ das kleinstmögliche bzw. das größtmögliche m_j gefunden werden, um damit den Landefaktor zu berechnen.

Für $n = 3, l = 1, j = 3/2$ lautet der Landefaktor

$$g_{3/2} = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} = \frac{4}{3}$$

und die kleinstmögliche magnetische Quantenzahl $m_j = -3/2$.

Für $n = 3, l = 1, j = 1/2$ lautet der Landefaktor

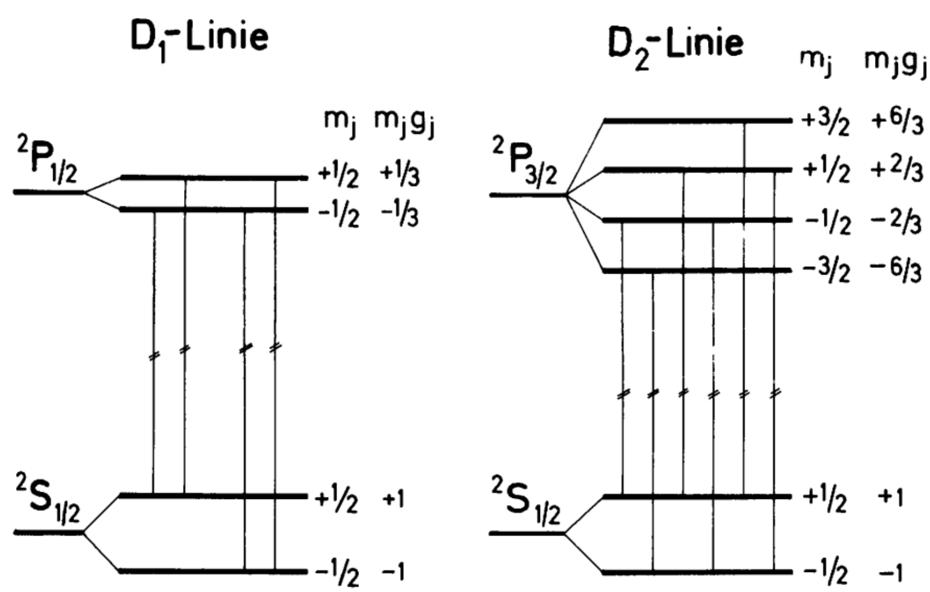
$$g_{1/2} = 2/3$$

und das größtmögliche $m_j = 1/2$.

Aus der Bedingung

$\Delta E = g_{1/2} m_{1/2} \mu_B B - g_{3/2} m_{3/2} \mu_B B$ ergibt sich

$$B = \frac{\Delta E}{(g_{1/2} m_{1/2} - g_{3/2} m_{3/2})\mu_B} = 16.53 \text{ T}.$$



12.3 Kernspinresonanz-Tomographie (10)

Zur medizinischen Bildgebung werden Patienten in der Kernspinresonanz-Tomographie in ein starkes äußeres Magnetfeld von etwa 3 T gebracht, wo die im körpereigenen Wasser gebundenen Protonen ($S = 1/2$) zwei verschiedene Energieniveaus für ihre Kernspins erfahren.

(a) Wie groß ist das Bohr'sche Magneton und das magnetische Moment des Protons, wenn die Masse des Protons $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, d.h. $m_p/m_e = 1836$, und der g-Faktor $g_p = 5.6$ betragen?

(b) Welche Frequenz und Wellenlänge müssen hier Photonen haben, um einen Übergang zu induzieren? Vergleichen Sie das kurz mit typischer Röntgenstrahlung.

Lösung:

(a) Bohr'sches Magneton für das Proton: $\mu_p = \frac{e}{2m_p}\hbar = \frac{1}{1836}\mu_B = 5.1 \cdot 10^{-27}\,\text{J/T}$.

Das magnetische Moment beträgt

$\vec{\mu} = g_S \frac{\mu_p}{\hbar}\vec{S}$.

(b) Somit gilt für die Energieaufspaltung im Magnetfeld

$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \pm g_S \mu_p B$.

Deswegen müssen Photonen die Freuqenz

$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{5.6 \cdot \mu_B \cdot 3\text{T}}{1836 \cdot h} = 1.3 \cdot 10^8\,\text{Hz}$ besitzen.

Dies entspricht einer Wellenlänge von $\lambda = c/f = 2.3\,\text{m}$ (Radiowellen).

Im Vergleich dazu Röntgenstrahlung: Wellenlängen von 10 nm und kleiner, und damit Frequenzen von $3 \cdot 10^{16}$ Hz und höher.