PEP 3 – Übungsblatt 1 – WS 2013/2014

Abgabe am 24./25. Oktober 2013

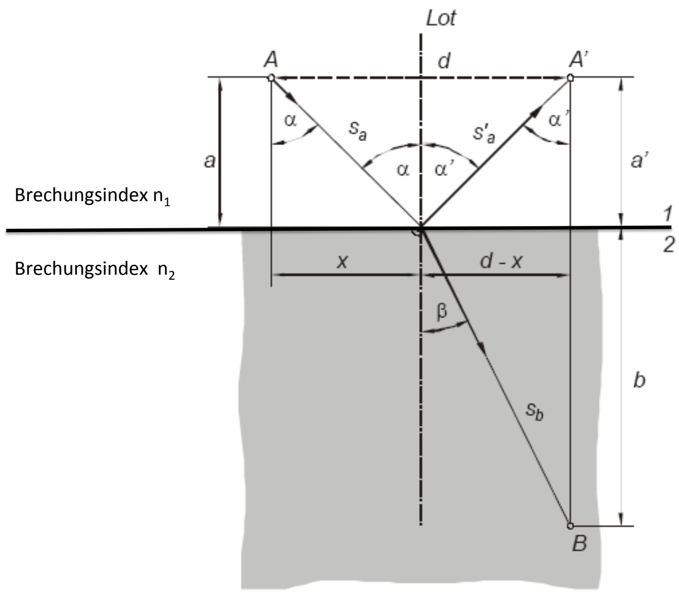
1.1 Prinzip von Fermat 10

Das Fermat'sche Prinzip besagt, daß Lichtstrahlen, die von einem Raumpunkt zum anderen gelangen, den optischen Weg bzw. die Laufzeit minimieren. Dies gilt sowohl für freie Ausbreitung als auch für Spiegelung und Brechung. Zeigen Sie unter Verwendung der in der Skizze bezeichneten Größen, wie daraus

(a) das Reflexionsgesetz, d.h. Licht läuft von Punkt A nach A', und

(b) das Snellius'sche Brechungsgesetz, d.h. Licht läuft von Punkt A nach B,

folgt.



Lösung:

a) Reflexion: Lichtweg von Punkt A nach A':

$$S = n_1(s_a + s'_a) = n_1\left(\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a'^2+(d-x)^2}\right)$$

$$dS/dx = n_1\left(\frac{x}{(\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{a'^2+(d-x)^2}}\right)$$

$= n_1 \sin\alpha - n_1 \sin\alpha' = 0$, und daher

$\alpha = \alpha'$.

b) Brechung: Lichtweg von Punkt A nach B:

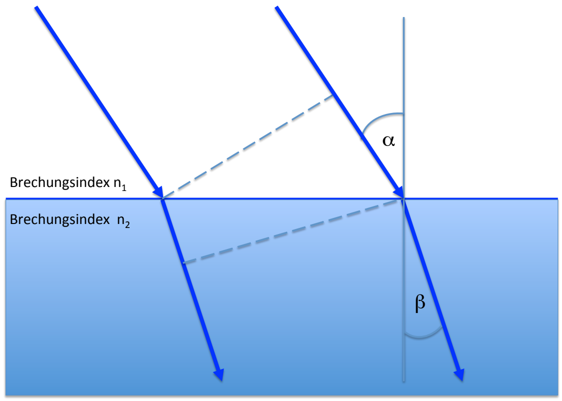
$$S = n_1 s_a + n_2 s_b = n_1\sqrt{a^2+x^2} + n_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}$$

$$dS/dx = n_1\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - n_2\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = n_1\sin\alpha - n_2\sin\beta = 0, \text{ und daher}$$

$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$

1.2 Prinzip von Huygens 10

Benutzen Sie das Huygens'sche Prinzip und die Kenntnis, mit welcher Geschwindigkeit Licht sich in einem Medium ausbreitet, um das Snellius'sche Brechungsgesetz herzuleiten. Die untenstehende Skizze soll dabei Hilfestellung leisten.



Lösung:

Der Laufzeitunterschied t muß derselbe sein für den Weg s_2 in Wasser und s_1 in Luft (Wege jeweils zwischen den beiden gestrichelten Linien), damit die Wellen konstruktiv interferieren.

$s_1 = c_1 t, s_2 = c_2 t$

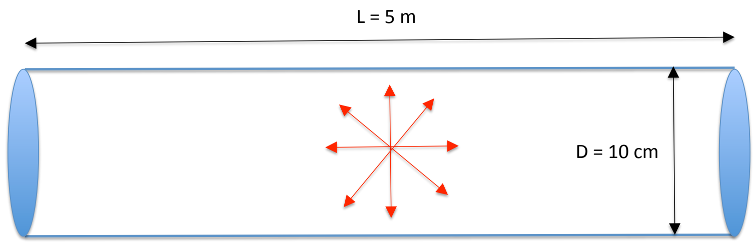
$I : \frac{s_1}{d} = \frac{c_1 t}{d} = \sin\alpha$

$II : \frac{s_2}{d} = \frac{c_2 t}{d} = \sin\beta$

$I/II : \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$

1.3 Totalreflexion 10

In einem zylinderförmigen Plexiglasstab von $D = 10\,\mathrm{cm}$ Durchmesser und $L = 5\,\mathrm{m}$ Länge befindet sich in der Mitte des Stabes eine punktförmige Lichtquelle mit 6 W Leistung. Der Brechungsindex von Plexiglas betrage $n = 1.5$.



(a) Welche Lichtleistung trifft auf eine der beiden Endflächen des Stabes, wenn man Absorption im Stab vernachlässigt? Nehmen Sie zur Vereinfachung an, daß nur totalreflektierte Strahlen die Enden erreichen. Wieso kommt diese Annahme der Realität sehr nahe?

(b) Der Stab wird nun in Wasser mit dem Brechungsindex von $n_W = 1.33$ getaucht. Welche Lichtleistung trifft nun auf eine der beiden Endflächen des Stabes?

Lösung: Alle Strahlen, die unter dem Einfallswinkel $\alpha > \alpha_G$ auf die Zylinderflächen treffen, werden totalreflektiert. Da bei den folgenden Reflektionen der Einfallswinkel erhalten bleibt, erreichen diese Strahlen die Endflächen. Strahlen mit $\alpha < \alpha_G$ werden teilweise reflektiert und erleiden einen erheblichen Intensitätsverlust und sind nach einigen zehn Reflexionen praktisch verschwunden.

(a) Grenzwinkel der Totalreflexion α_G.

Aus $\sin\alpha = 1/n$ und $\beta_G = 90° - \alpha_G$ folgt $\cos\beta_G = \sin\alpha_G = 1/n$.

Der Raumwinkel, für den die Strahlen reflektiert werden ist

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\beta_G} \sin\theta d\theta = 2\pi(1-\cos\beta_G) = 2\pi(1-1/n) = \frac{2}{3}\pi.$$

Die an einer Endfläche auftreffende Leistung ist dann $L = \frac{\Omega}{4\pi}L_0 = \frac{1}{6}L_0 = 1$ W und ist unabhängig von D und L.

(b) $\cos\beta'_G = \sin\alpha'_G = \frac{n_W}{n}$

$\Omega' = 2\pi(1-\frac{n_W}{n}) = 0.113\cdot 2\pi$

$L' = \frac{\Omega'}{4\pi}L_0 = 0.0565\cdot L_0 = 0.34$ W.