Wdh. Theo

(1) QM Zustand $|\Psi\rangle$ "ket" → Strahl im Hilbertraum

(2) Messgrößen ("Observable") → selbstadj. Operatoren (reelle Eigenwerte)
mögliche Messwerte ≙ Eigenwerte des Operators → Spektraldarstellung $A = \sum_n |a_n\rangle a_n \langle a_n|$ $a_n \in \mathbb{R}$ bzw. $\in \mathbb{C}$
Zustand $|\Psi\rangle$ WK, dass ich a_m messe: WK $|\langle m|n\rangle|^2$
Direkt nach der Messung ist das System im Zustand $|m\rangle$

(3) Zeitentwicklung → Lösung der SGL $i\hbar\partial_t|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle$ mit $|\Psi(0)\rangle = |\Psi_0\rangle$ (deterministische Zeitentwicklung)

→ spezielle Basis Ortsdarstellung: Wellenfkt. $\Psi(x,t) = \langle \vec{x}|\Psi(t)\rangle$; $\langle \phi|\Psi\rangle = \int \phi^* \Psi \, d^3x$ $\phi^* = \overline{\Phi}$
Impulsoperator in Ortsdarstellung: $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, Eigenfkt.: $e^{i\frac{\vec{x}\vec{p}}{\hbar}}$ ebene Wellen
$\cdot\ \vec{p}$ linear ⇒ Superposition von Eigenfkt. ist auch Lösung → $\Psi(x) = \int d^3p\, \Phi(p)\, e^{-i\frac{\vec{x}\cdot\vec{p}}{\hbar}}$ "Wellenpaket"
← Gewichtsfkt.

$\overset{SGL}{\Rightarrow}$ $i\hbar\,\partial_t \Psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)\right)\Psi(x,t)$ AW $\Psi(x,0) = \Psi_0(x)$
$\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$ ist Wkeit $\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\vec{\nabla}\vec{j}$ $\vec{j} = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}(\overline{\Psi}\nabla\Psi)$

$V(x) \propto x^2$, ~~harm. Oszillator~~

(1) harm. Osz. $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$, Dimensionslos $L = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\omega}}$, $E_{h.o.} = \hbar\omega$, $\xi = \frac{x}{L}$, $\varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$

→ dml. SGL $\varepsilon\phi(\xi) = -\phi''(\xi) + \frac{\xi^2}{4}\phi(\xi)$ $a_+ = a_-^\dagger$
Auf- u. Absteigeoper. $a_\pm = \mp\frac{d}{d\xi} + \frac{1}{2}\xi$, $a_- = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{1}{m\omega}p\right)$, Kommutator $[a_-, a_+] = 1 \overset{\text{"identisch"}}{\sim} [x,p] = i\hbar$
⇒ $H = \hbar\omega\left(a_+a_- + \frac{1}{2}\right)$, $E = \langle\Psi|H|\Psi\rangle = \hbar\omega\langle\Psi|a_+a_- + \frac{1}{2}|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega + \langle a_-\Psi|a_-\Psi\rangle$
Eigenfkt. $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}a_+^n\phi_0$, $\phi_0 = (2\pi)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\xi^2}{4}}$, $a_-\phi_0 = 0$ (Grundzustand), $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$, $a_+\phi_n = \sqrt{n+1}\,\phi_{n+1}$, $a_-\phi_n = \sqrt{n}\,\phi_{n-1}$
$H\phi_n = \hbar\omega\left(a_+\sqrt{n}\,\phi_{n-1} + \frac{1}{2}\phi_n\right) = \hbar\omega\left(n\phi_n + \frac{1}{2}\phi_n\right)$

Kohärente Zustände: Eigenzustände von a_- → $a_- V_\alpha = \alpha V_\alpha$, $V_\alpha = e^{\alpha a_+}\phi_0$

Wasserstoffatom $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{|\vec{x}|}$, $[H, \hat{L}^2] = [H, \hat{L}_z] = 0$ ⇒ gem. Eigenbasis
Eigenzustände von $\hat{L}^2$ $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ Kugelflächenfkt. → Separationsansatz $\Psi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$
→ Effektive Gl. für r (die von l abhängt)

$\cdot$ QM im Phasenraum → Wignerfkt. $W_\Psi(x,p) = \int d^4y\, \overline{\Psi(x - \frac{y}{2})}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}\, \Psi(x + \frac{y}{2})$
$\cdot$ Ehrenfest theorem $\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{1}{m}\langle p\rangle$, $\frac{d}{dt}\langle p\rangle = \langle -\nabla V(x)\rangle$

$\cdot$ Streutheorie ⇒ freie Zustände $E > 0$ Raten/Wirkungsquerschnitt
stationäre Streutheorie (kurzreichweitiges Potential ⇒ $r \to \infty$ freie Teilchen)
– einlaufende Welle $\sim e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, $E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$, – gestreute Welle Kugelwelle $\sim \frac{e^{ikr}}{r}$

$$\Psi_k(x) \propto e^{ikr} + \underbrace{f(k,\vec{e},\vec{e}\,')}_{\text{Streuamplitude}}\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\frac{d\sigma(\vartheta,\varphi)}{d\Omega} = \lim_{r\to\infty}\frac{r^2 J_{aus}}{J_{ein}} = |f(k,\vec{e},\vec{e}\,')|^2 \text{ Wirkungsquerschnitt} \quad \to \sigma = \int_{Kugel}\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega$$

↳ SGL $E>0$ $\left(-\Delta + \underbrace{\frac{2m}{\hbar}V(x)}_{U(x)}\right)\Psi_k(x) = k^2\Psi_k(x)$ ⇒ $(\Delta + k^2)\Psi_k(x) = U(x)\Psi_k(x)$
Greensfkt. $G(x,x') = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(\pm ik|x-x'|)}{|x-x'|}$

⇒ Lippmann Schwinger Gleichung $\Psi_k(x) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \int G(x,x')U(x')\Psi_k(x')d^3x'$
$f(k,e,e') = -\frac{2m}{\hbar}\frac{1}{4\pi}\int e^{-ik\vec{e}\,'\cdot y}V(y)\Psi(y)dy$

---

allg. Unschärfe A, B Observablen $\langle A\rangle_\phi = \langle\phi|A|\phi\rangle$ Unschärfe $\Delta_\phi A = \sqrt{\langle A^2\rangle_\phi - \langle A\rangle_\phi^2}$
⇒ $\Delta_\phi A\, \Delta_\phi B \geq \frac{1}{2}|\langle\phi|[A,B]|\phi\rangle|$

- Zeitabh. QM $\Rightarrow$ SGL lösen $i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$

Zeitentwicklung? Wenn $H \neq H(t)$ $\rightarrow U = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$ $\quad |\psi(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle$

$\Rightarrow$ finde die EW(?) von H, $|n\rangle, E_n$, $|\psi_0\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$, $\psi(t) = \sum_n e^{-\frac{itE_n}{\hbar}}|n\rangle$

Wenn $H = H(t)$ Produktintegral / Dysonserie für $U(t)$

Was können wir messen? Übergangsamplitude $\langle\psi|A|\phi\rangle \rightarrow$ in beiden Bildern gleich

- Schrödingerbild: $|\psi(t)\rangle$ zeitabh. Zustandsvektoren, Operatoren zeitlich konstant
$\langle\psi(t)|A|\phi(t)\rangle = \langle\psi_0|U^+(t)\,A\,U(t)|\phi_0\rangle$

- Heisenbergbild: $|\psi_0\rangle$ zeitunabh. Zustandsvektoren, Operatoren ändern sich zeitlich
$A_H(t) = U^+(t)\,A_S\,U(t) \qquad \langle\psi_0|A_H(t)|\phi_0\rangle = \langle\psi_0|U^+(t)A_S U(t)|\phi_0\rangle$

$\Rightarrow$ Dynamik in Operatoren $\quad H \neq H(t)$

Bewg. $\frac{d}{dt}A_H(t) = \frac{i}{\hbar}[H, A_H(t)] + \left(\frac{\partial A_S}{\partial t}\right)_H$

Zeitunabh. Störungstheorie (nicht exakt lösbare Systeme), $H = \underset{\text{bekannt mit } |n^0\rangle,\, E_n^{(0)}}{H_0} + \lambda H_1 \quad \lambda \ll 1 \rightarrow$ kleine Störung

E_n nicht entartet $\quad \Delta E_n^{(1)} = \lambda\langle n^0|H_1|n^0\rangle$, $\quad |n^1\rangle = \sum_{m\neq n}\frac{\lambda\langle m^0|H_1|n^0\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}|m^0\rangle$

$\Delta E_n^{(2)} = \sum\frac{\lambda^2|\langle m^0|H_1|n^0\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$

Variationsrechnung $\quad E_0 \leq E_{var} = \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$

Erhältl: ~~Drehimpuls~~, Em-Feld, $\quad [J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$ kommutformel.

$[J^2, J_i] = 0 \quad \Rightarrow 1$ komp. $|\vec{J}|^2$ scharf messbar

$|j, m_j\rangle$ mit $J^2|j,m_j\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m_j\rangle$, $J_z|j,m_j\rangle = \hbar m_j|j,m_j\rangle$, $|m|\leq j$

$=2j+1$-fach Entartet in J^2

J entspricht Dimension

$J_\pm = J_1 \pm iJ_2 \quad , [J_\pm, J^2] = 0$

Problem: Wie addiere ich Drehimpulse? $\vec{J} = \vec{J}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes\vec{J}_2 \overset{\text{kurz}}{=:} \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \leftarrow$ eig. falsch

alte Basis $\{|j_1, m_{z1}, j_2, m_{z2}\rangle\}$ Eigenbasis von $J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}$

neue Basis $\{|j, m, j_1, j_2\rangle\}$ $\quad J^2, J_z, J_1^2, J_2^2 \Rightarrow$ gemeinsame ONB, J_{1z} kommutiert nicht mit J^2

$J^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2 = \vec{J}_1^2\otimes\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{3}\underset{}{\overset{\text{Komponente}}{J_1^k}}\otimes J_2^k + \mathbb{1}\otimes\vec{J}_2^2 \qquad , [J_1^k, J_2^k] \neq 0$ f. $k \neq z$

$\Rightarrow \vec{J}^2$ hat Eigenwerte $\hbar^2 j(j+1)$ mit $j_1 + j_2 \geq j \geq |j_1 - j_2|$, $\Delta j = 1$