ANA Übg

$$\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{16}$$

$$\sqrt{3}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} \cdot \frac{9}{5}\right) =$$

x^n divergiert $\Leftrightarrow$ $|x| > 1$

$$\sum (\dots) = \frac{1 - (4x+12)^{N+1}}{1 + (4x - 12)}$$

$$\sum(-1) \geq \sum(\dots)$$

$$\sum(-1) \leq \sum(\dots)$$

<u>Umordnungssatz</u>: Sei φ bij. Abb. von $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Sei $\sum a_{\varphi(n)}$ eine Umordnung von $\sum a_n$.

<u>Def.</u> unbedingte Konvergenz $\overset{\text{Def.}}{:\Leftrightarrow}$ $\sum a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum a_{\varphi(n)}$

bedingte Konvergenz $\overset{\text{Def.}}{:\Leftrightarrow}$ nicht unbedingte Konvergenz

$\sum a_n$ ist unbedingt konvergent $\Leftrightarrow$ $\sum a_{\varphi(n)}$ ist konvergent $\forall \varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ $\sum |a_n|$ ist konvergent.

Riemann: Sei $\sum a_n$ bedingt konvergent

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \exists \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, φ bij. mit

$\sum a_{\varphi(n)} = a$

Verdichtungskriterium

Sei (a_n) monotone NF. Dann ist entweder $\sum a_n$ und $\sum 2^n a_{2^n}$ konvergent oder divergent

Abelsche Konvergenzkriterium:

Sei (b_n) monoton und beschränkt und $\sum a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum a_n b_n$ konvergiert.

Dirichletsches Kriterium:

Sei (b_n) monotone NF und die Partialsummen von $\sum a_n$ beschränkt.

$\Rightarrow \sum a_n b_n$ konv.

$$\sum \underbrace{\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}_{a_n} \qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{4}e$$

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{N+1}$$

$$\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$$

$$\sum \frac{n!}{n^n} 2^n \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad \cancel{n+1} \qquad \frac{\frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!\,2^n}{n^n}}$$

$$= \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e}$$

ANA Übung

$\sum \frac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2} 2^k}$ $\quad a_n \to \frac{e}{2}$

$\sum a_n$ mit $\sqrt[n]{a_n} < q$ mit $0 < q < 1$

$\Rightarrow$ konvergent

$\sum \frac{2^{k+1}}{5 - 3^k}$

$\sum \binom{2+n}{n}^{-\frac{2}{n}}$ $\quad a_n = \sqrt[n]{\frac{2}{(n+1)(n+2)}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{n^2}} \to 1$

$\sum \frac{1}{k \ln k}$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{k \ln(k)}{(k+1) \ln(k+1)}$

$= \cancel{\frac{1}{1+\frac{1}{k}}}$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(k+1)\ln(k+1)}{k \ln k}$

$\sum 2^k \frac{1}{2^k \ln 2^k} = \frac{1}{\ln 2} \sum \frac{1}{k}$

Vorl. ANA Übg

$a_n \neq 0$, $c > 1$, $|a_{n+1}| \leq \left(1 - \frac{c}{n}\right)|a_n|$ Quotientenkrit.?

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1 \quad : q \in \mathbb{R}$$

$$n|a_{n+1}| \leq n|a_n| - c|a_n| \Leftrightarrow c|a_n| \leq n|a_n| - n|a_{n+1}|$$

$$0 \leq (c-1)|a_n| \leq n|a_n| - n|a_{n+1}| - |a_n|$$

$$= \underbrace{|a_n|(n-1) - |a_{n+1}|n}_{=b_n},$$ Majorante

$= b_n$ ← Teleskopreihe, $\sum b_n$ konvergiert

$\Rightarrow \sum (c-1)|a_n|$ ist konv. $\Leftrightarrow \sum a_n$ ist abs. konv.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{n}} \leq c \qquad c > 1$$

$$\Rightarrow \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 1 - \frac{c}{n} \Rightarrow \frac{|\frac{c}{2} - n|}{|n+1|} < 1 - \frac{c}{n} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq -(1+\frac{c}{n})$$

$\to 0$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow c \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$

$$\sum_{n=0} a_n = \sum_{n=1} (a_n) + a_0 \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n \text{ konv. für welche } x \text{ ?}$$

$\sum a_n$ und $\sum b_n$ konv. abs.

$\Rightarrow c_n$ konv. abs wenn $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

und $\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$

$$\sum n x^n = \sum_{k=1}^{n} x^n$$

Sei $a_k = b_k = x^k \Rightarrow a_k b_{n-k} = x^n$

$\sum a_n$ und $\sum b_k$ konv. $\Leftrightarrow \boxed{|x| < 1}$,

wenn $|x| \geq 1$ dann $n x^n$ keine NF,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

$$\frac{(n+1) x^{n+1}}{n x^n} < q < 1$$

$a_n = a_n^1 + a_n^2$

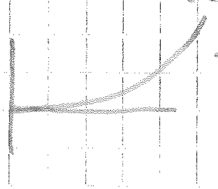
$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow f: U \subset D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig „Restriktion"

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig und sei $a \in \mathbb{R}$.

a) a ist Häufungspunkt in D

b) a ist kein " in D



$f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$

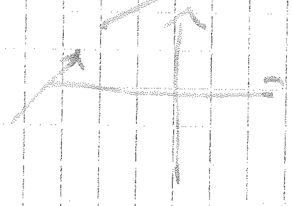
x ist HP $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon \exists x' \in U_\varepsilon(x)$ mit $x' \neq x$

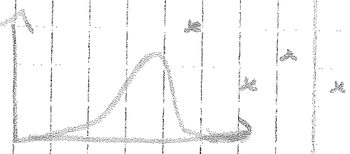
ANA Übung

b) Sei $\tilde{f}: D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ mit $x \neq a$

dann $\tilde{f}$ stetig

c) $\exists\, \tilde{f}(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ | $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x)$ existiert





$$\underbrace{\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}}_{f(x)} \text{"} = \text{"} \underbrace{x + 1}_{\tilde{f}(x)}$$

l'Hospital

ANA Übung

09.01.15

3

9.1)

z.z. U offen $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in U : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U$

„$\Rightarrow$" Sei U offen

Fall 1: leere Menge, $\mathbb{R}$ klar

Fall 2:

$\Rightarrow \mathbb{R} - U$ abgeschlossen

$\Rightarrow \forall (x_n) \subset \mathbb{R} - U$ mit $x_n \to x$, $x \in \mathbb{R} - U$

$\Rightarrow \nexists (z_n) \subset \mathbb{R} - U$ mit $z_n \to z$, $z \in U$

$\Rightarrow \exists (y_n) \subset U$ mit $y_n \to y$: $y \in \mathbb{R} - U$

$\Rightarrow |y_n - y|$

$\Rightarrow$ da $y_n \subset U$,

$\Rightarrow x \in U$ $(y+\varepsilon, x) \subset U$, $(x, y-a) \subset U$

$\Rightarrow \forall x \in U : \exists \varepsilon > 0 : (x-a, x+\varepsilon) \subset U$

„$\Leftarrow$"

$\Rightarrow \exists x_n \subset U$ mit $x_n \to x$: $x \notin U$

$\Rightarrow (y_n) \subset \mathbb{R} - U$ mit $y_n \to x$ $x \in \mathbb{R} - U$

$\Rightarrow \forall y_n \subset \mathbb{R} - U$ mit $y_n \to y$: $y \in \mathbb{R} - U$

$\Rightarrow U$ offen

d)

$f: D \to \mathbb{R}$ stetig $\Leftrightarrow f^{-1}(U)$ offen $\forall U$ offen

„$\Rightarrow$" Sei U offen

$\Rightarrow \forall x_n \subset f^{-1}(U)$ mit $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

z.z. $\forall x_n \subset \mathbb{R} - f(U)$ mit $x_n \to x \Rightarrow x \in \mathbb{R} - f^{-1}(U)$

$\Rightarrow \forall f(y_n) \subset \mathbb{R} - U$ mit $f(y_n) \to f(y) \Rightarrow f(y) \in \mathbb{R} - U$

$f(x) \in \mathbb{R} - U \Rightarrow x \in f^{-1}(\mathbb{R} - U)$, Da $f^{-1}(\mathbb{R} - U) \subset \mathbb{R} - f^{-1}(U)$

$x \in \mathbb{R} - f^{-1}(U)$

$\Rightarrow f^{-1}(U)$ offen

alternativ „$\Rightarrow$"

Sei f stetig, $x \in f^{-1}(U)$ mit U offen.

U offen $\Rightarrow$ $\exists$ Umgebung U um $f(x)$

$\exists$ $\tilde{U}$ um x mit $f(\tilde{U}) \subset U$

$\Rightarrow \tilde{U} \subset f^{-1}(U)$

„$\Leftarrow$"

z.z. $\exists\, \delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \;\forall\, |x - x_0| < \delta$

$U_\varepsilon(f(x)) \overset{\text{Annahme}}{\Longrightarrow} f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ ist offen

$\exists\, U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ liegt $\Rightarrow$ Stetigkeit $\square$

z.z. $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, x_0 > 0 \quad |\log(x)| \leq \varepsilon\, |\sqrt[k]{x}| \quad \forall x \geq x_0$

$x_0 := \dfrac{(\log(x))^k}{\varepsilon^k}$

$\varepsilon\, |\sqrt[k]{x_0}| = \varepsilon\, \dfrac{\log(x)}{\varepsilon} = \log(x)$

ANA ÜBUNG 23.01.15

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; b) $g(x) = \begin{cases} xe^x & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ 4

stetig? glm. stetig?

zu a) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$:

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| = \left| \frac{y^2 - x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \right|$

$= |y-x| \underbrace{\frac{|y+x|}{(\ldots)(\ldots)}}_{<2} < 2\delta < \varepsilon$

b) zz: $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$

sei $\varepsilon = 1$, $x > 0$ mit $\frac{\delta}{2} \exp(x + \frac{\delta}{2}) > 1$

$y = x + \frac{\delta}{2}$ also $|y - x| \leq \frac{\delta}{2}$;

$|g(x) - g(y)| = (y + \frac{\delta}{2}) e^{x + \frac{\delta}{2}} - x e^x$

$= x(e^{x+\frac{\delta}{2}} - e^x) + \frac{\delta}{2} e^{x + \frac{\delta}{2}}$

$> \frac{\delta}{2} e^{x + \frac{\delta}{2}} > 1$

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\quad f_n(x) = \sqrt[n]{x^2+1} \\ &\text{b)}\quad g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{2^k} \\ &\text{c)}\quad h_n(x) = \frac{\sin(nx)}{2 - \cos((n+1)x)} \end{aligned}\right\} \text{ pkt./glm. konvergent?}$$

zu a) pkt. ✓

$\varepsilon = 1$, $x > \sqrt{(\varepsilon+1)^n - 1}$: $x^2 + 1 > (\varepsilon + 1)^n$

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{x^2+1} > \varepsilon + 1$

$\Rightarrow |f_n - f| > 1 = \varepsilon$

b) $$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{2^k}$$

<u>Beh</u>: g glm. konv.

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x k)}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \Rightarrow \text{konv. abs.}$$

glm., da Majorante nicht von x abh.

c) nichts.

Berechne $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \; e^{\sin x} \cos x$

$u(x) = \sin(x) \quad u' = \frac{du(x)}{dx} = \cos(x)$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \, e^{\sin(x)} \cos(x) = \int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} du(x) \, e^{u(x)} = e^{u(x)} \Big|_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} = e - 1$$

ANA
ÜBUNG
23.01.15

4

② $f: I \to \mathbb{R}$ konvex

$(x_i)_{i \in I} \in I$

$f_1(t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \ldots + t_n f(x_n)$

$n \rightsquigarrow n+1$

$t' := \sum_{i=1}^{n} t_i \; ; \; t' + t_{n+1} = 1$

$f(t_1 x_1 + \ldots + t_{n+1} x_{n+1}) = f\left(t'\left(\frac{t_1}{t'} y_1 + \ldots \frac{t_n}{t'} y_n\right) + t_{n+1} x_{n+1}\right)$??

Def. konv.

$\overset{\text{I.A.}}{\leq} \; t' f\left(\frac{t_1}{t'} y_1 + \ldots + \frac{t_n}{t'} y_n\right) + t_n x_1 f(x_n+1)$

$\leq \; t'\left(\frac{t_1}{t'} f(x_1) + \ldots + \frac{t_n}{t'} f(x_n)\right) + t_{n+1} f(x_n+1)$

③

Sei $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar

$f'(x) \leq 5 \quad \forall x \in [0,2]$

$f(0) = -3$

Beh. $f(2) \leq 7$

Ann. $\exists f: f(2) > 7$

$\exists x_0 : f'(x_0) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} > \frac{10}{2} = 5$

$\overset{\text{Wid}}{\Downarrow}$ Mittelwertsatz

B

c) $\lim_{x \to 0} \frac{x^{-200}}{5^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-200 \log x}}{e^{\frac{1}{x} \log 5}} = \lim_{x \to 0} \exp\left[-\left(200 \log x + \frac{1}{x} \log 5\right)\right]$

$y = \frac{1}{x} \quad \ldots = \lim_{y \to \infty} \exp\left[-\left(-200 \log y + y \log 5\right)\right] = 0$

$\log x < \mathcal{O}(\sqrt{x}) < \mathcal{O}(x) < \mathcal{O}(\exp(x))$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{-x}\left(1+\cos\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{-x}} = \frac{1}{4} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 e^{-x}} \right)$

$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) + \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3 e^{-x}(2-x)} \right) = -\lim \frac{1}{x^4 e^{-x}} =$

$= -\lim_{x\to\infty} e^x$ ex. nicht.

3d) $\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{-x}}$ ↯

$\lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0} \cos(y) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$

$= \lim_{x\to\infty} - \frac{1}{2x^2 e^{-x}}$

Zeige mit ε-δ, dass $f(x) = 2x^2$ in $x = 4$ stetig ist

Sei $\varepsilon > 0$, finde $\delta > 0$ mit $|x-4| < \delta$

$|f(x) - f(4)| = |2x^2 - 2\cdot 4^2| = 2|(x+4)(x-4)|$

$= 2|x+4|\,|x-4|$

$\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{18}, 1\right)$

- $\delta = 1$: $|x-4| < \delta = 1 \Rightarrow 3 \le x \le 5 \Rightarrow |x+4| < 9$
  $\Rightarrow 2|x+4| < 18$
- $\delta = \frac{\varepsilon}{18}$: $|x-4| < \delta = \frac{\varepsilon}{18} \Rightarrow 4 - \frac{\varepsilon}{18} < x < 4 + \frac{\varepsilon}{18}$

$\Rightarrow |x+4| < 8 + \frac{\varepsilon}{18} \Rightarrow 2\underbrace{|x-4|}_{< 8+\frac{\varepsilon}{18}}\underbrace{|x-4|}_{<\frac{\varepsilon}{18}} < \frac{2\varepsilon}{18}\underbrace{\left(8+\frac{\varepsilon}{18}\right)}_{<9} < \varepsilon \;\square$